

APPARATUR FÖR ANALOG UTVÄRDERING AV STÖTVÅGS-
FÖRLOPP REGISTRERADE MED PIEZOELEKTRISKA
GIVARE.

Algot Persson och Roger Holmberg

DS 1974:15

3.12.1974

STIFTELSEN
SVENSK DETONIKFORSKNING
SWEDISH DETONIC RESEARCH FOUNDATION

VINTERVIKEN - 117 48 STOCKHOLM
SWEDEN

APPARATUR FÖR ANALOG UTVÄRDERING AV STÖTVÅGS-
FÖRLOPP REGISTRERADE MED PIEZOELEKTRISKA
GIVARE.

Algot Persson och Roger Holmberg

DS 1974:15

3.12.1974

Sammanfattning.

En apparatur för analog utvärdering av en stötvågs impuls- och energitäthet samtidigt med registrering av dess tryck-tidförlopp har konstruerats. Apparaturen har provats vid registrering av stötförloppet från detonerande trotylladdningar i vatten. Resultaten av de analogt bestämda värdena på impulstäthet och energitäthet har jämförts med motsvarande ur tryck-tidförloppet numeriskt beräknade värden. Avvikelsen är 4% eller mindre. Olika approximationer vid den numeriska beräkningen diskuteras.

1. Olika metoder att bestämma data ur en stötvågs tryck-tidförlopp.

Vid registrering av stötvågor i luft eller vatten är det inte bara vågens maximitryck som är av intresse utan även dess impuls- och energitäthet. Bestämningen av de båda senare storheterna innebär en beräkning av tidsintegralen för såväl tryckfunktionen som dess kvadrat. En manuell beräkning av tidsintegralen ur ett fotografiskt registrerat tryckförlopp är tidsödande och antalet registreringar som på detta sätt kan behandlas måste bli begränsat.

Man kan då välja mellan några olika metoder där man med hjälp av analog eller digital behandling av tryckförloppet bestämmer de nämnda storheterna.

- a/ Approximation av trycktidförloppet med en eller flera exponentialfunktioner och beräkning av dessas tidsintegral.
Anpassning av exponentialfunktionen till ett antal mätpunkter ur fotografiska registreringar och integralberäkning med ett computerprogram.
- b/ Analog integrering och kvadrering och integrering av trycktidförloppet med hjälp av analogikretsar.
- c/ Digitalisering av trycktidförloppet medelst A/D-omvandlare och lagring i minne (1-4 k ord), (med "transient recorder"), utvärdering med dator "on line" eller utstansning av digitalinformation på remsa alternativt inspelning på band för senare behandling.

Den första metoden kan endast användas då vi har att göra med ett tryckförlopp bestående av ett trycksprång åtföljt av ett exponentiellt avtagande tryckförlopp utan några vågreflexer.

Metod b medger samtidig registrering av såväl impulstäthet som energitäthet oavsett vågens utseende. Dock begränsar apparaturens bandbredd noggrannheten vid mycket kortvariga tryck-tidförlopp.

Den tredje metoden är utan tvekan den mest noggranna och begränsas endast av minneskapaciteten och samplinghastigheten, som bestämmer den längsta respektive kortaste stötvåg som kan registreras.

I det följande beskrivs en apparatur för analog bestämning av en stötvågs impuls- och energitäthet.

2. Apparaturens uppbyggnad.

Figur 1 visar apparaturens utseende. Den övre lådan rymmer laddningskalibrator, laddningsförstärkare, integrator och kvadrerare och integrator. I den undre lådan ryms ett stabiliserat likspänningsaggregat för matning av operationsförstärkare och kalibrator. Det tomma utrymmet i denna låda är avsett för planerade manöverkretsar och tidsmarkeringsgenerator för mätbandspelare. Blockschemat i fig. 3 visar de olika delarnas funktion och sammansättning.

Laddningsförstärkare

De två laddningsförstärkarna av typ Kiestler 568 har modifierats med ett tungrelä som kortsluter förstärkarens återkopplingskondensator och håller förstärkaren nollställd fram till mätögonblicket. Eljest kan temperaturdrift i givaren ge en likspänningsnivå som summeras i integratorerna. Tungreläerna manövreras med en knappsats i en manöverbox som samtidigt fungerar som tändapparat för en sprängkapsel typ S, se fig. 4.

Kalibrator

Om en kondensator med kapacitansen C uppladdas till en spänning U och kondensatorn kopplas till laddningsförstärkaren ger denna en utspänning proportionell mot laddningen $Q = C \cdot U$. Genom att ladda kondensatorn från en spänningsdelare bestående av en precisionspotentiometer ansluten till en konstant spänning (15 V) kan varierande laddningsmängder på kondensatorn erhållas.

Ex. En turmalingivare med känslighet 28 pC/bar ger vid 100 bar 2800 pC. Samma laddningsmängd tillföres då en kondensator om 1 nF laddas med 2.8 V. Om kondensatorn är ansluten till förstärkaringången kan på oscilloskopet ett utslag motsvarande 100 bar injusteras till lämplig höjd. Kondensatorn kan laddas positivt eller negativt för önskad polaritet på utslaget.

Laddningskalibratorns båda utgångar är kopplade parallellt med de båda givarna och medger samtidig kalibrering av de båda mätkanalerna. Schemat framgår av fig. 5. Kondensatorerna med polystyrendielektrikum avviker med högst 0.5% från nominellt värde. Spänningsdelaren för uppladdningsspänningen utgöres av en 10-varvig precisionspotentiometer med 0.25% noggrannhet. Inkopplingen av spänningen sker med hjälp av ett tungrelä som kan manövreras från panelen eller från en yttre switch. Kalibratoren har fyra områden 10-100 pC, 100-1000 pC, 1 nC - 10 nC, 10 nC - 100 nC.

Integrator för bestämning av impulstäthet

Utspanningen, U_L från laddningsförstärkaren är proportionell mot stötvågens tryck $U_L = A_I : P(t)$, $A_I = \text{konst.}$ Stötvågens impulstäthet är integralen av trycktidförloppet (se /2/)

$$i = \int_0^t P(t) dt$$

Schemat för en operationsförstärkare kopplad som en analog integrator framgår av fig. 6a. Om spänningen U_L tillförs ingången erhålles från utgången en spänning

$$U_{ut} = \frac{1}{R_i C_i} \int_0^t U_L dt = \frac{A_I}{R_i C_i} \int_0^t P dt \quad (1)$$

förutsatt att inverkan av förstärkarens biasström och offsetspänning kan försummas. R_i är motståndet i förstärkarens ingång och C_i kapacitansen mellan förstärkarens in- och utgång. C_i bör ha hög isolationsresistans. Det här aktuella integratorschemat framgår av fig. 6b. Till följd av att över laddningsförstärkarens utgång normalt finns en likspänning (c:a 50 mV) måste denna utbalanseras för att integratorn ej skall summera densamma. Detta sker med potentiometern R_{off} som måste justeras efter det att laddningsförstärkaren uppvärmts. Operationsförstärkarens offsetspänning som är temperaturberoende kan balanseras ut med potentiometern F_{off} . C_i är över ett tungrelä ansluten till ett lågt motstånd. Reläet manövreras samtidigt med reläerna i laddningsförstärkarna med hjälp av den förut nämnda knappsatsen (se fig. 4).

Kvadrerare och integrator för bestämning av energitäthet

Stötvågens energitäthet $\mathcal{E}_S$ är proportionell mot tidsintegralen av tryckförloppets kvadrat (se /2/)

$$\mathcal{E}_S = K \cdot \int_0^t P^2(t) dt$$

En operationsförstärkare kopplad som kvadrerare visas i fig. 7a. Kvadreringen av inspanningen U_L göres med hjälp av en s.k. diodfunktionsgenerator. I korthet fungerar kopplingen så att diodfunktionsgenerators konduktans varierar med insignalens storlek. Eftersom diodfunktionsgeneratoren utgör ingångsmotstånd till operationsförstärkaren kommer dess

förstärkning likaledes att variera med signalens storlek. Med lämplig förspänning på dioderna kommer förstärkningskurvan att med ett antal (11 st) linjära delar approximativt utgöra en kvadratisk funktion. Avvikelsen från den kvadratiske kurvan anges vara $\pm 1\%$ vid 100 kHz bandbredd för den kvadreringsmodul, Teledyne Philbrick 4353, som användes. Det aktuella schemat för kvadrerare och integrator framgår av fig. 7b. Kvadreringsmodulen är kopplad för att acceptera endast negativa signaler, då laddningsförstärkarens utsignal vid användning av turmalingivare är negativ. För positiv insignal kan kopplingen enkelt ändras och med ytterligare en operationsförstärkarens hjälp kan såväl negativa som positiva signaler kvadreras. Utsignalen U_K från kvadreraren förhåller sig till insignalen U_L som

$$U_K = \frac{U_L^2}{10}$$

Laddningsförstärkaren kan endast ge max. 5 V negativ utsignal. För att utnyttja hela diodfunktionsgenerators område föregås kvadreraren av en förstärkare med 2 ggr förstärkning. Utspänningen efter integratorn, U_{ut} blir då

$$U_{ut} = \frac{0.4}{R_i C_i} \int_0^t U_L^2 dt = \frac{0.4}{R_i C_i} A_I \int_0^t P^2(t) dt \quad (2)$$

3. Prov med apparaturen.

Apparaturens funktion har provats genom att bestämma impulstätheten och energitätheten i stötvågorna från ett 100 g respektive ett 250 g trotylklot som detonerades nedsänkta i vatten på ett avstånd $r = 2.0$ m från en 1/4 tums turmalinkristallgivare och på 2.5 m:s djup. Trycktidförloppet, impuls- och energitätheten registrerades på såväl oscilloskop (Tektronix 7403) som mätbandspelare (Sangamo, Sabre III). Figur 3 visar en oscilloskopregistrering av trycktidförlopp och energitäthet i stötvågen från en 100 g laddning. För att underlätta avspelning och för att erhålla en nollinje till trycktidförloppet användes signalen från den ena givaren som triggsignal för oscilloskopsvepet såväl vid den direkta registreringen som vid avspelning från bandspelaren.

Vid avspelning av bandet måste avspelningsförstärkarna vara noggrant kalibrerade. En kontroll av hela mätsystemets förstärkning erhöles genom att med kalibratorn simulera en trycksignal, t.ex. 100 bar, före eller efter själva mätningen. Impuls- och energitäthet kan avläsas på oscilloskopbild eller skrivardiagram vid önskat tidsintervall och omräknat till lämpliga enheter medelst ekv. (1) och (2).

4. Utvärdering av mätdata.

Trycktidförloppet för en stötvåg från en detonerande högbrisant laddning i vatten kan beskrivas som ett diskontinuerligt trycksprång åtföljt av ett exponentiellt avtagande tryckförlopp (se fig. 8 förlopp A)

$$\begin{array}{ll}
 t < t_0 & P = 0 \\
 t = t_0 & P = P_{\max} \\
 t > t_0 & P = P_{\max} e^{-\frac{t-t_0}{\theta}}
 \end{array}$$

Tidskonstanten θ förändras för $t > \theta$ men ett förlopp som det i fig. 2 visade kan ganska väl beskrivas av två exponentialfunktioner.

Det diskontinuerliga trycksprånget kan givaren till följd av sin utsträckning inte återge utan givarens svar blir som kurva B i fig. 8. Tryckförloppets "stigtid" bestäms av vågens gångtid τ_g över givarens diameter a . För små laddningsvikter (< 1000 g) är avvikelserna mellan registrerat och verkligt tryckförlopp tydligt märkbart och maximitrycket måste bestämmas genom extrapolation bakåt i tiden av kurvans exponentiellt avtagande del till en tid motsvarande halva gångtiden såsom visats av Arons och Cole [1].

Den på oscilloskopet registrerade signalens egentliga stigtid beror även av efterföljande förstärkare. I de här redovisade mätningarna är den uppmätta tiden från signalens fotpunkt till dess toppunkt, $8.8 \mu\text{s}$, d.v.s. dubbelt så lång som gångtiden över givaren vars diameter var 6.3 mm. Stigtiden kan emellertid inte bestämmas ur fotot. Detta beror på att registreringen av tryck-tidförloppet som gjorts med en förstärkare försedd med elektronkopplare för 2-kanalmätning (switch-frekvens c:a 1 MHz) och med en sveptid av $100 \mu\text{s}$ /skaldel, inte ger tillräcklig tidsupplösning för en noggran bestämning av stigtiden. Den observerade toppunkten kan dessutom vara påverkad av ett visst "overshot" från förstärkarna. Av denna anledning bör toppunkten utelämnas vid analysen. Eftersom första delen av signalens förlopp inte kan bestämmas tillfredsställande har extrapolation av maximaltrycket gjorts till halva den tid som uppmätts mellan fotpunkt och toppunkt, se fig. 8. Den osäkerhet i max.-tryckbestämningen som man härvid får räkna med är högst 1%.

Alla återgivningsfel kommer givetvis också att påverka den analoga bestämningen av impuls- och energitäthet. För att kontrollera apparaturens noggrannhet och speciellt integratorernas funktion har de på oscilloskopet registrerade trycktidförloppen utvärderats och behandlats på några olika sätt.

Med hjälp av koordinatmikroskop uppmättes tryck- och tidskoordinater för ett 50-tal punkter på tryck-förloppet. De femton första av dessa är upprättade i ett log.-lin. diagram, fig. 9, och en rät linje har dragits genom punkterna. Ur detta diagram kan maximitrycket, $P_{\max}$, erhållas genom extrapolation till $t = \tau/2 = 4.4 \mu\text{s}$. Tidskonstanten θ erhålles som den tidpunkt då trycket sjunkit till $\frac{P_{\max}}{e}$. Beräkningen av impulstäthet och energitäthet gjordes först manuellt för båda försöken och resultaten återfinns i tabell 2 under rubriken "num.ber. kurva C" varmed menas att trycksprånget approximerats med linjen C i fig. 8. Denna approximation ansluter sig bäst till den signal som den analoga integratorn behandlar. Som övre integrationsgräns har i samtliga beräkningar använts 6.7θ i enlighet med Cole /2/.

Med hjälp av en Hewlett Packard 9830 computer har regressionsanalys utförts på mätvärdena från 250 g skottet. Härvid anpassades en exponentialfunktion till de femton första mätpunkterna efter toppvärdespunkten se fig. 10. Förfarandet vid denna analys beskrivs i Appendix I. En annan exponentialfunktion anpassades till resterande mätpunkter. Dessutom gjordes en approximation av trycktidförloppet med en serie polynom genom samtliga mätpunkter. Den första delen av förloppet approximerades dock med den förstnämnda exponentialfunktionen. Impuls- och energitäthet beräknades sedan dels med hjälp av de två förstnämnda exponentialfunktionerna dels med hjälp av polynomen. Resultaten återfinnes i tabell 2 under rubrik "med reg.-analys" "två exp.funkt." respektive "polynom". Som synes är skillnaden mellan de olika approximationssätten i detta fall mindre än en procent. Man får dock anse att approximation med flera polynom givit det mest exakta resultatet. Approximation av förloppets första del och därmed max.-trycket, kommer i hög grad att inverka på värdet av energitätheten. Hur pass exakt approximationen kan göras beror dels på antalet mätpunkter och hur noga dessa utmättes ur fotot, dels på tillvägagångssättet. Om approximationen utföres på de logaritmerade tryckvärdena eller direkt på tryckvärdena ger en skillnad på c:a 2% vid bestämning av energitätheten. Fig. 10 visar resultat av regression via logaritmering och fig. 11 direkt av tryckvärdena.

Jämför man de med analogiapparaturen uppmätta värdena med de numeriskt beräknade är avvikelserna inte större än 4% vilket med tanke på alla felmöjligheter får anses rimligt. Det här studerade trycktidförloppet har ett sådant

utseende att det ganska enkelt låter sig approximeras. Alla sprängämnesladdningars trycktidförlopp vid undervattensdetonation är dock inte så enkelt approximerbara som de från TNT. Den här beskrivna analoga mätapparaturen är därför ett användbart hjälpmedel för snabb bestämning av impuls- och energitäthet.

Genom att beräkna den reducerade impulstätheten, i_r , respektive stötvågens totala energi per kg sprängämne, $\frac{E_s}{Q}$, kan vi jämföra de erhållna resultaten med tidigare gjorda mätningar på TNT vilka redovisas av Cole /2/.

i_r erhålles ur impulstätheten i

$$i_r = \frac{r}{Q^{2/3}} \cdot i = \frac{r}{Q^{2/3}} \cdot \int_{\tau/2}^{6.7\theta + \tau/2} P(t) dt$$

där r = avståndet och Q = laddningsvikten.

Stötvågens energi E_s erhålles ur energitätheten ϵ_s

$$E_s = \frac{4\pi r^2}{\rho c} \cdot \epsilon_s = \frac{4\pi r^2}{\rho c} \cdot \int_{\tau/2}^{6.7\theta + \tau/2} P^2(t) dt$$

där ρ = täthet för vatten = 1000 kg/m³ och c = ljudhastigheten i vatten = 1440 m/s.

De ur resultaten i tabell 2 beräknade värdena på reducerad impulstäthet respektive stötvågsenergi per kg sprängämne, $\frac{E_s}{Q}$, återfinns i tabell 3 tillsammans med värden enligt Cole /2/. En jämförelse visar att såväl värdena för red. impulstätheten som energivärdena var ungefär 25% större än de av Cole angivna, medan såväl maximitryck som tidskonstant väl överensstämde med data från samma källa. Detta kan bero på något mätfel i givaren t.ex. nollpunktsförskjutning som ger ett skenbart mindre tryckavtagande, eller möjligen signal från skadade partier av mätkabeln som var av "low-noise" typ och speciellt utvald för tryckmätningar.

5. Kommentarer.

Den beskrivna apparaturen för analog bestämning av stötvågsors impulstäthet och energitäthet ger för små laddningar (100, 250 g) mätvärden som med 3.5% avviker från numeriskt beräknade värden på impulstäthet och med 4% för på samma sätt erhållna värden på energitäthet. Med hänsyn till de mätfel som kan göras vid utvärderingen av oscilloskopfotona måste denna överensstämmelse anses vara fullt tillfredsställande vid denna laddningsstorlek. En apparatur av detta slag bör därför kunna avsevärt reducera utvärderingsarbetet vid

rutinmässiga mätningar på undervattensdetonationer. Apparaturen kan kompletteras med analog bestämning av tidskonstanten θ , varvid energi- och impulstäthet kan uppmätas direkt ur registreringarna, utan att θ behöver härledas ur trycktidförloppet. En analog bestämning av θ är möjlig med hjälp av en funktionsgenerator av logaritmisk typ.

Det observerades vid mätningarna viss svårighet att utbalansera laddningsförstärkarnas offsetspänning vilken är i högsta grad temperaturberoende. Inverkan av denna offsetspänning kan givetvis undvikas genom att spärra spänningen i integratorns ingång med en stor kondensator. Detta medför emellertid att en ny tidskonstant införes och för längre integreringstider kan detta ge ett betydande mätfel liksom en ej helt utbalanserad offsetspänning.

Litteraturreferenser.

1. Arons, A.B., and Cole, R.H. Design and Use of Piezoelectric Gauges of Large Transient Pressures.- The Review of Scientific Instruments, Volume 21, n:r 1, January 1950.
2. Cole, R.H. Underwater Explosions.- Princeton, New Jersey 1948, Princeton University Press.

Tabell 1. Registrerade och extrapolerade data för max. tryck och tidskonstant jämfört med data enligt Cole /2/.

Laddn. vikt g	P_{max} , bar				tidskonstant, θ , μs		
	registrerat	extrapolerat man.	regr. analys	enl. Cole	man. ber.	ur regr. analys	enl. Cole
100	92.0	100	-	101	61.5	-	63
250	131.5	144	144.5	144	82.0	82.2	81

Tabell 2. Data för impulstäthet och energitäthet erhållna analogt och numeriskt.

Laddn. vikt g	Impulstäthet = $\int_{\tau/2}^{6.7\theta + \tau/2} p \, dt$, bar ms				Energitäthet = $\int_{\tau/2}^{6.7\theta + \tau/2} p^2 \, dt$, bar ² ms			
	analogt	num.ber. kurva C	med regr. analys två exp. funkt.	flera polynom	analogt	num.ber. kurva C	med regr. analys två exp. funkt.	flera polynom
100	8.8	8.5	-	-	346	340	-	-
250	16.0	15.6	15.6	15.7	880	913	901	907

Tabell 3. Data för reducerad impulstäthet och energi per kg sprängämne.

Laddn. vikt g	i_{red} ; bar ms kg ^{-2/3}				E_s/Q MJ · kg ⁻¹			
	registre- rat	numera- ber. kurva C	med reg. analys polynom	enl. Cole	registre- rat	numera- ber. kurva C	med reg. analys polynom	enl. Cole
100	81.8	78.9	-	66.7	1.21	1.19	-	0.99
250	80.6	78.6	79.1	66.7	1.23	1.28	1.27	0.99

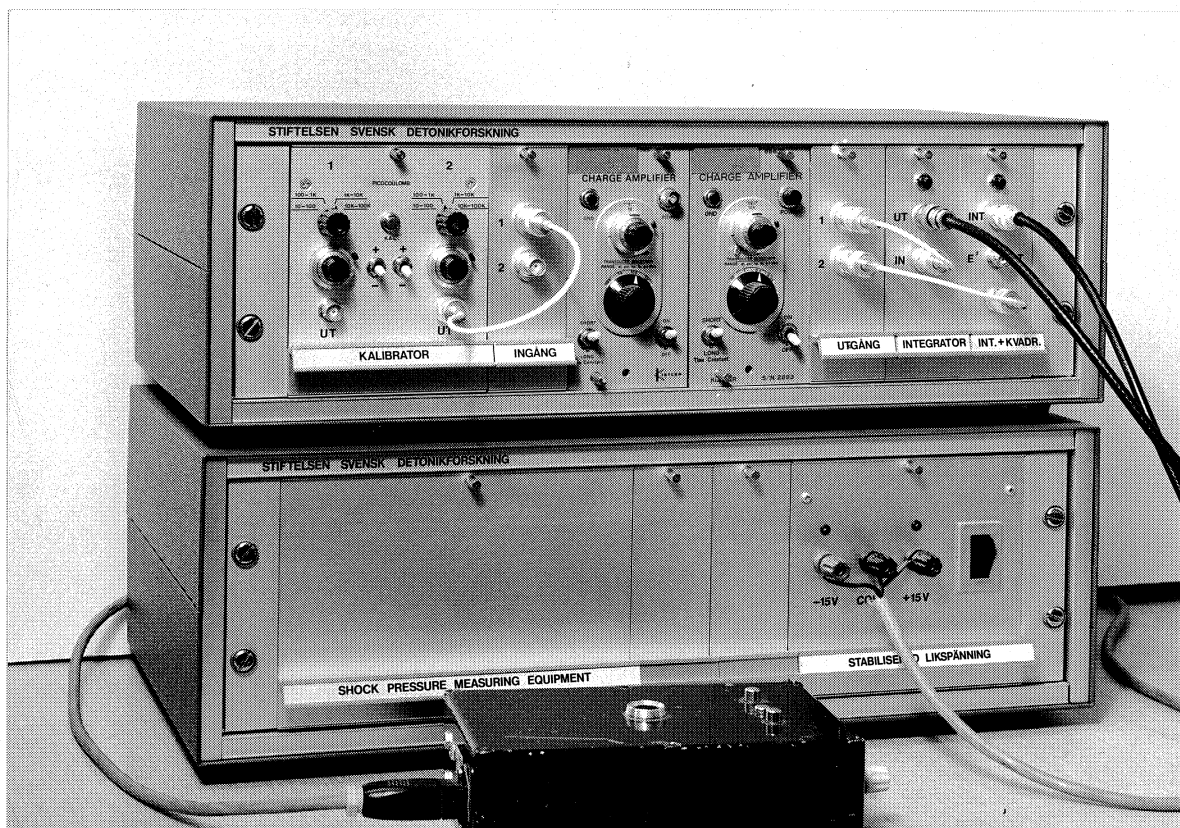


Fig. 1. Apparatur för analog bestämning av en stötvågs maximetryck, impulstäthet och energitäthet.

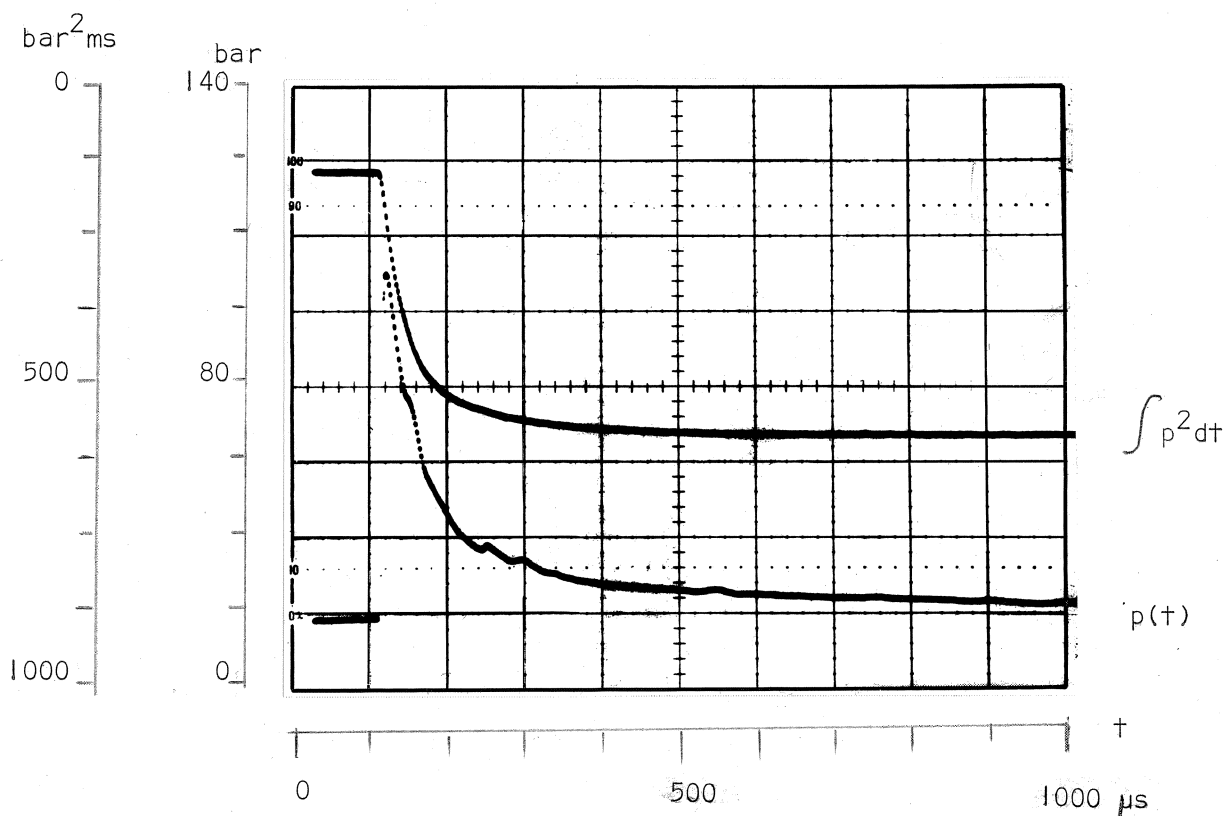


Fig. 2. Oscilloskopregistrering av stötvågens trycktidförlopp och energitäthet (100 g TNT 2 m avstånd i vatten).

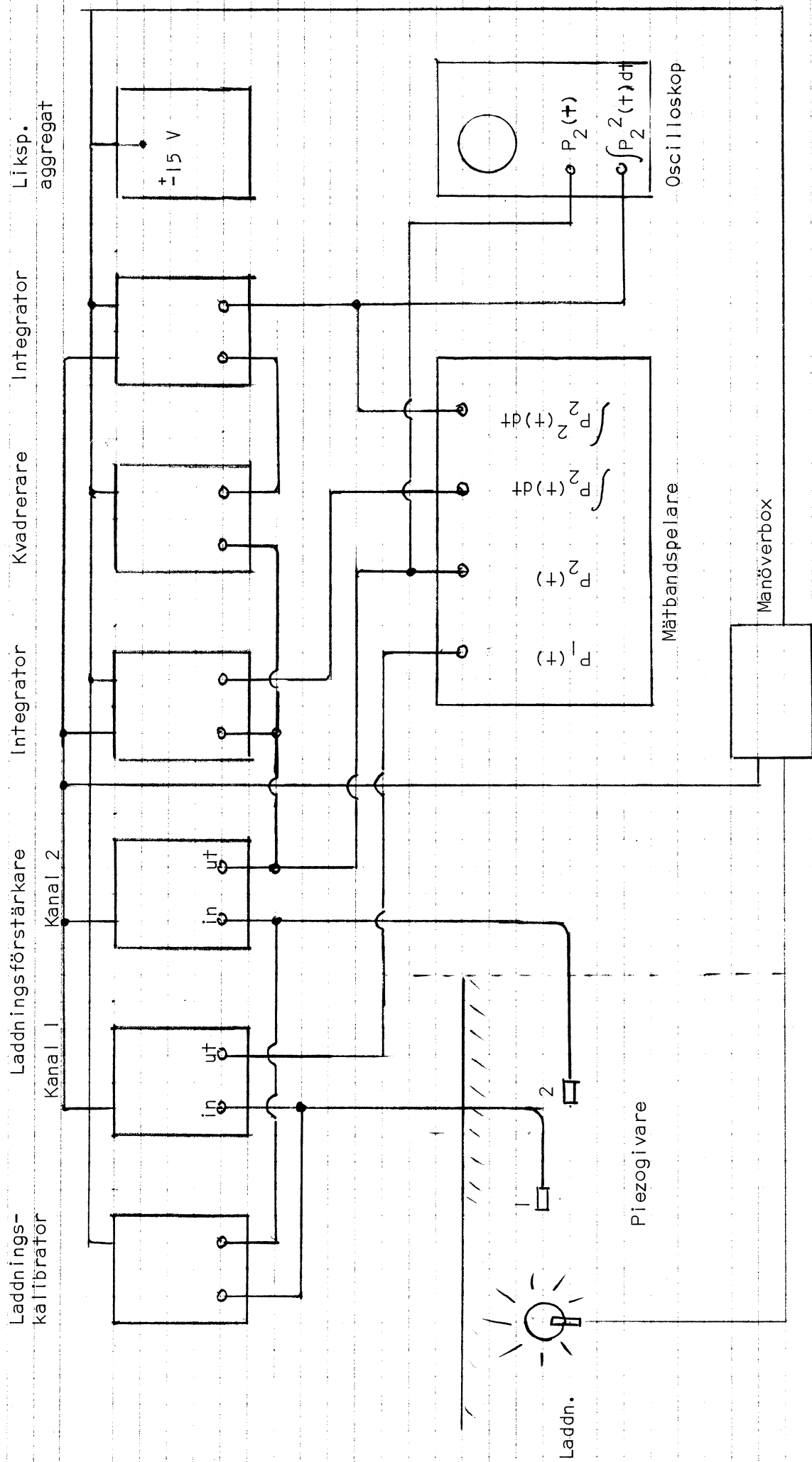


Fig. 3. Blockschema över mätapparat.

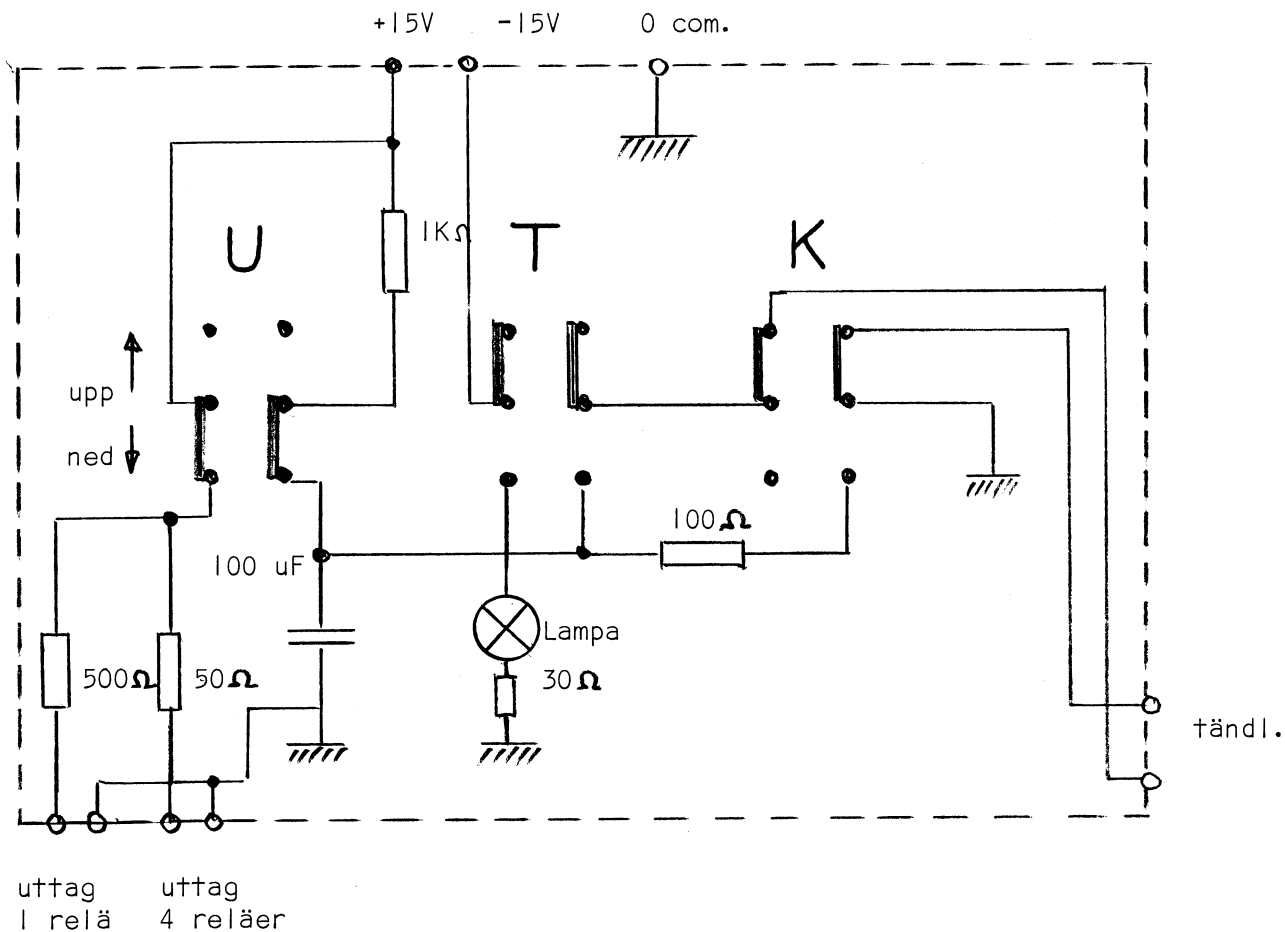


Fig. 4. Kopplingsschema för manöverbox.

Funktioner

Knapp U nedtryckt: Reläerna drar och kortsluter förstärkare och integratorer.
Tändkondensatorn uppladdas.

Knapp T nedtryckt: Knapp U går tillbaka. Kortslutning upphör. Tändledningen tillkopplas.
Röd lampa lyser.

Knapp K nedtryckt: Tändledningen fränkopplas.
(alltid vid arbete Tändkondensatorn kortslutes via ett 100 Ω motstånd.

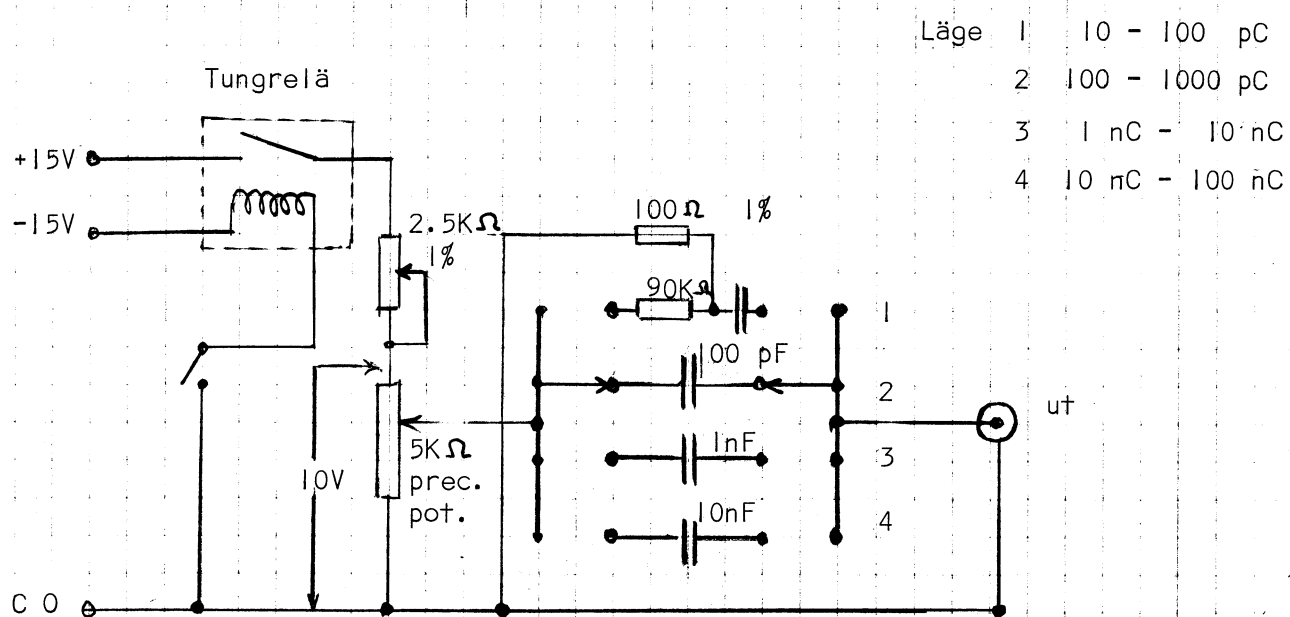
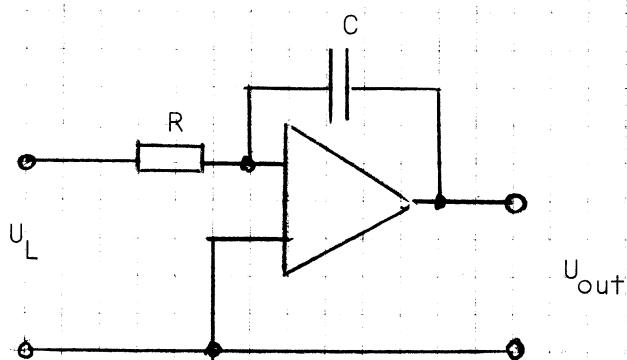


Fig. 5. Laddningskalibrator, schema.



$$U_{out} = \frac{1}{RC} \int_0^t U_L dt$$

Fig. 6a. Integratorkoppling med op.-förstärkare.

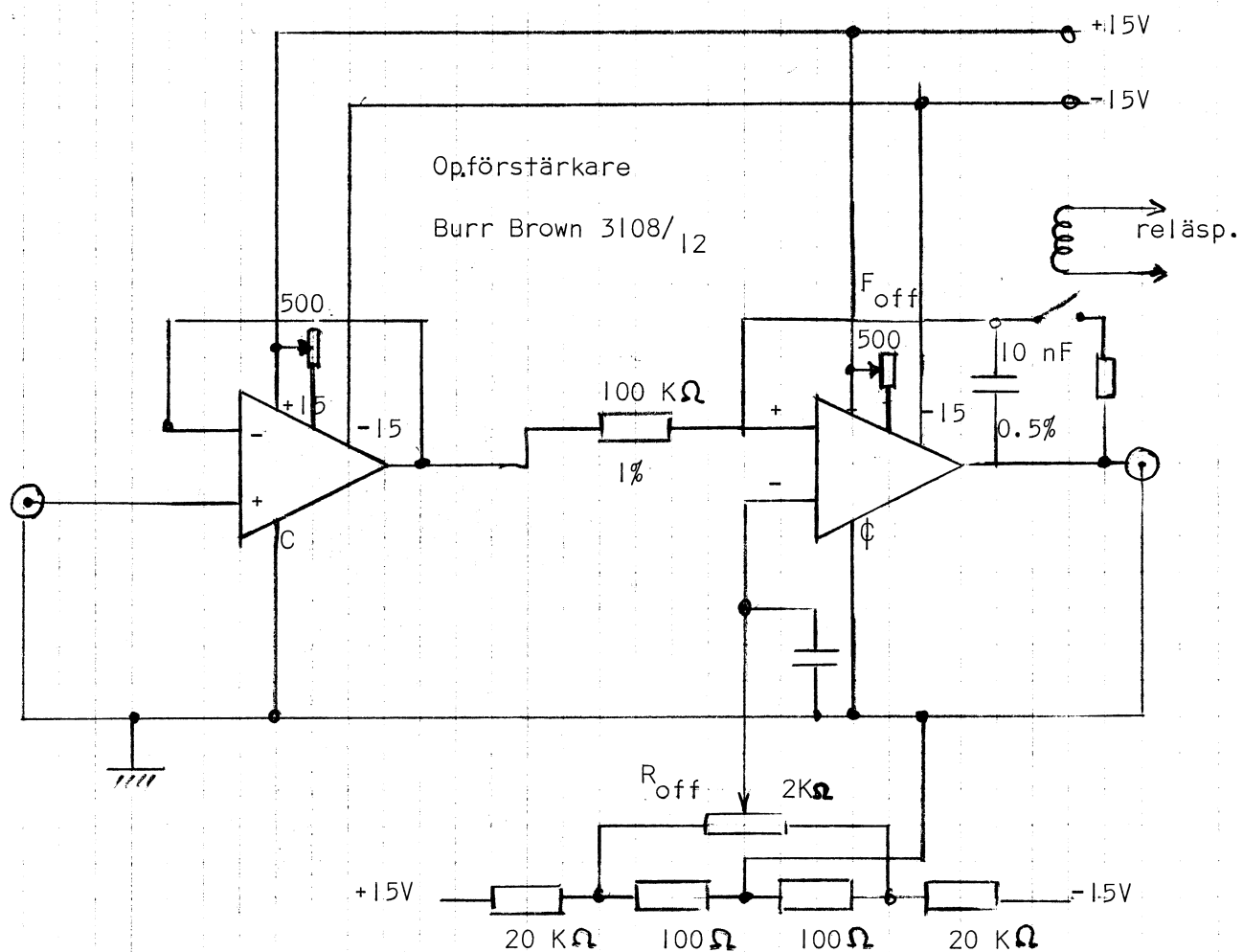


Fig. 6b. Integrator, kopplingsschema.

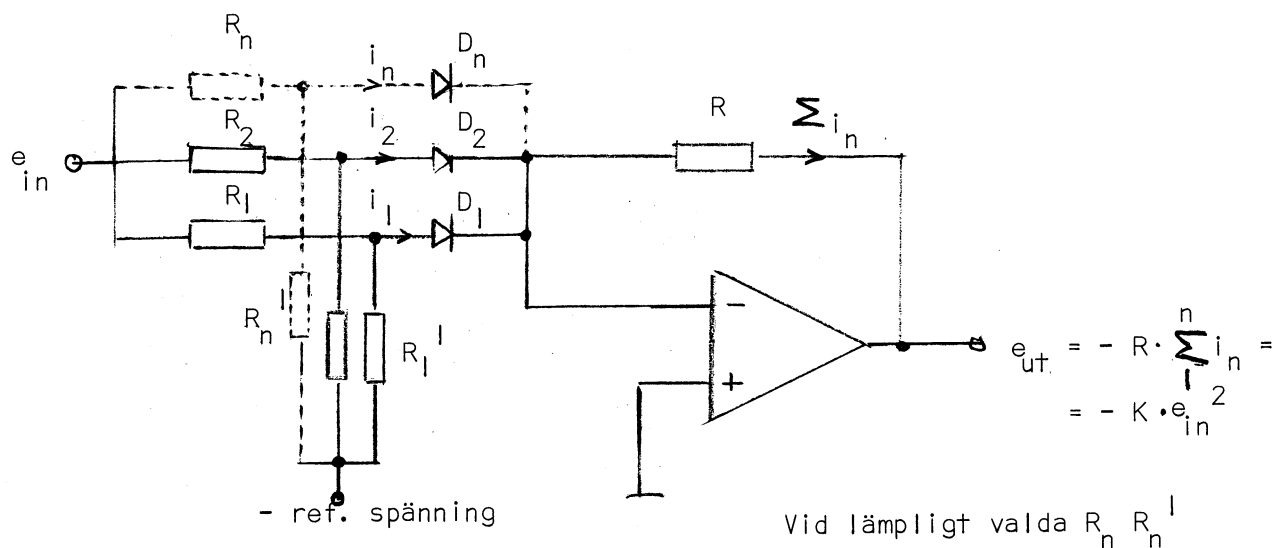


Fig. 7a. Principschema för funktionsgenerator.

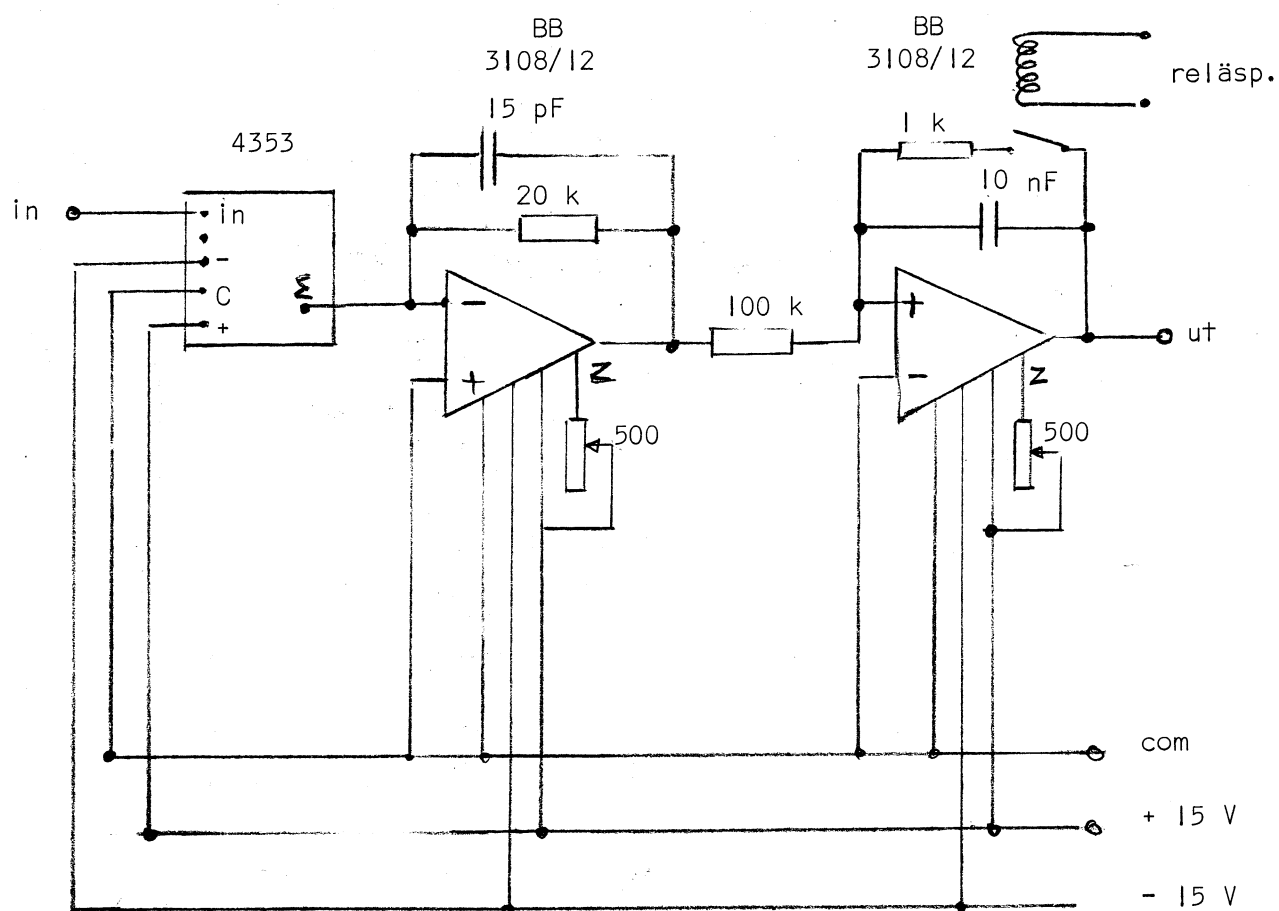
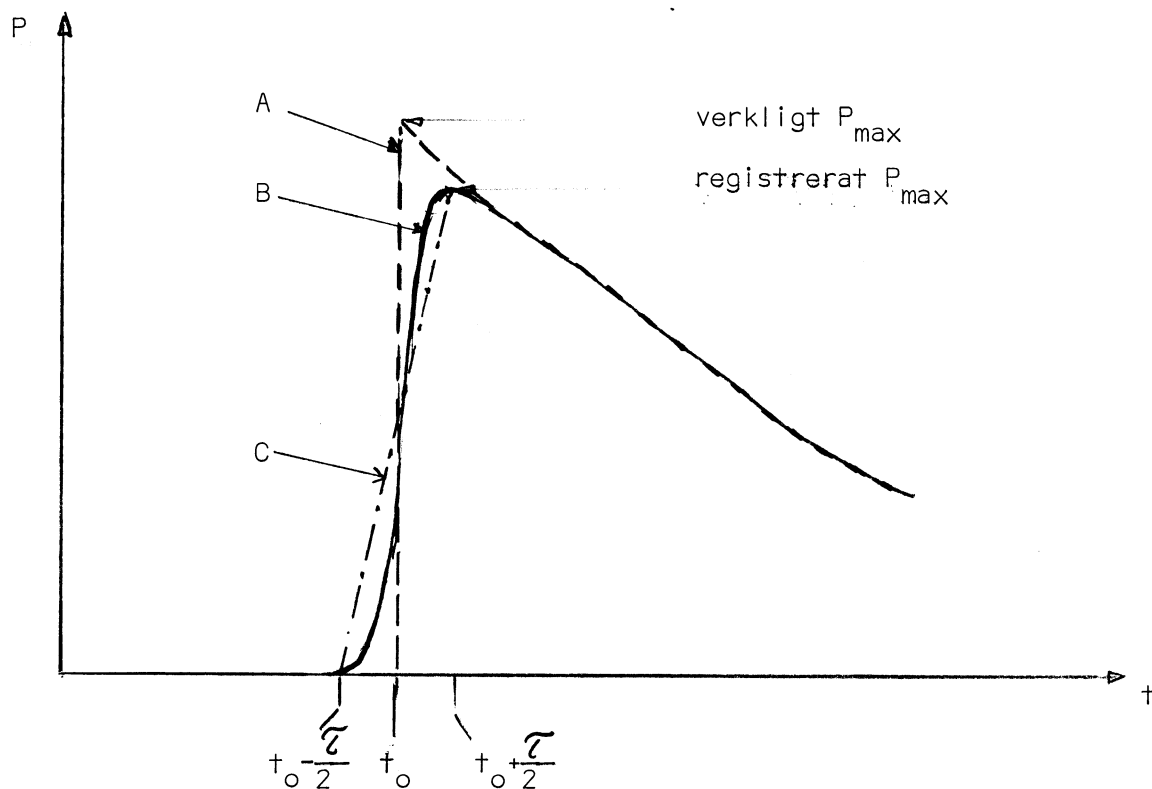


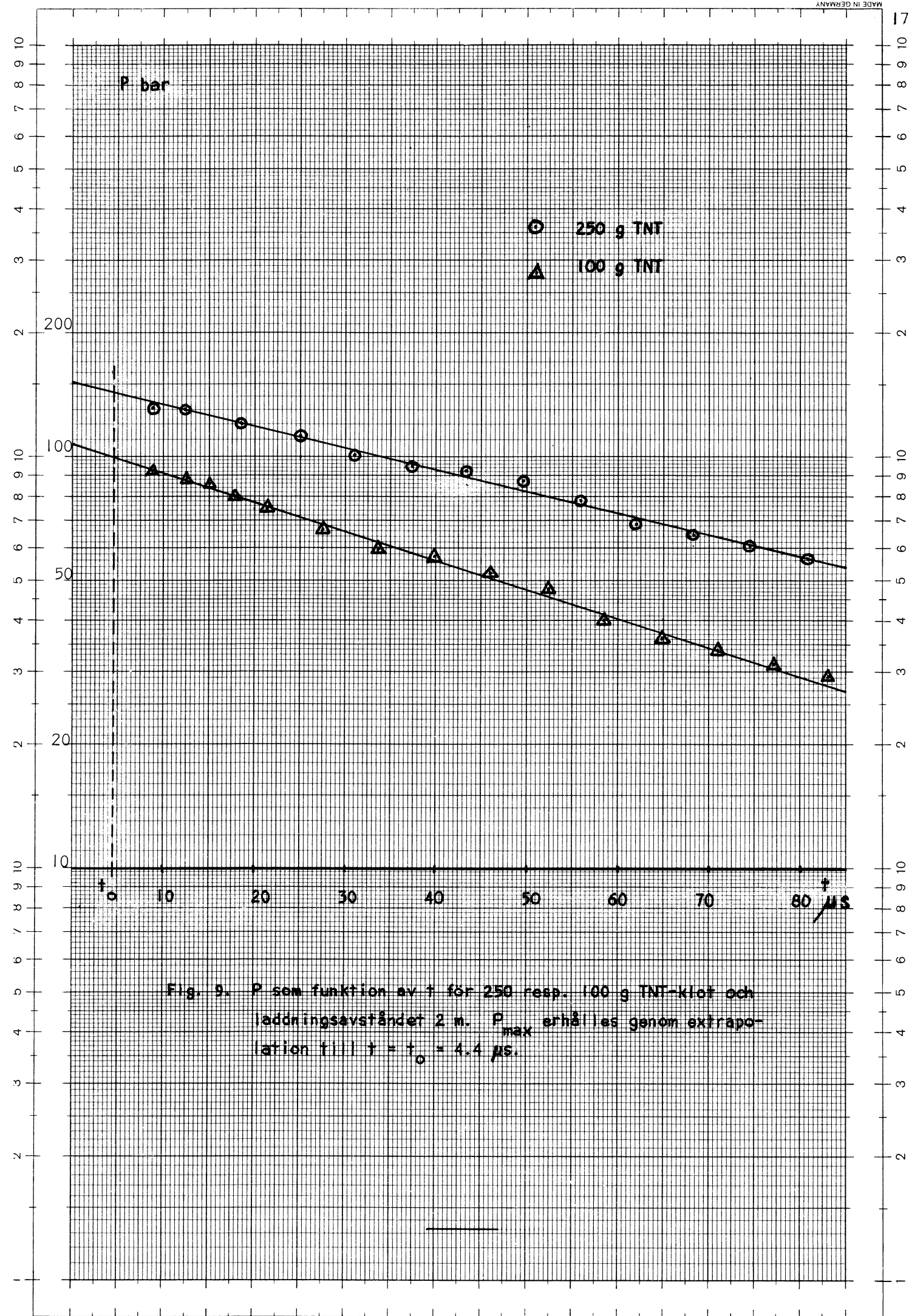
Fig. 7b. Kopplingsschema för kvadrerare och integrator.



t_0 = tidpunkt för vågfrontens passage över givarens mittpunkt.

- A: verkligt tryckförlopp
- B: givarens svar på tryckförloppet
- C: approximation av tryckkurvans stigande del vid kontrollräkning av integratorfunktion.

Fig. 8. Stöt vågens verkliga trycktidsförlopp i vatten samt givarens svar.



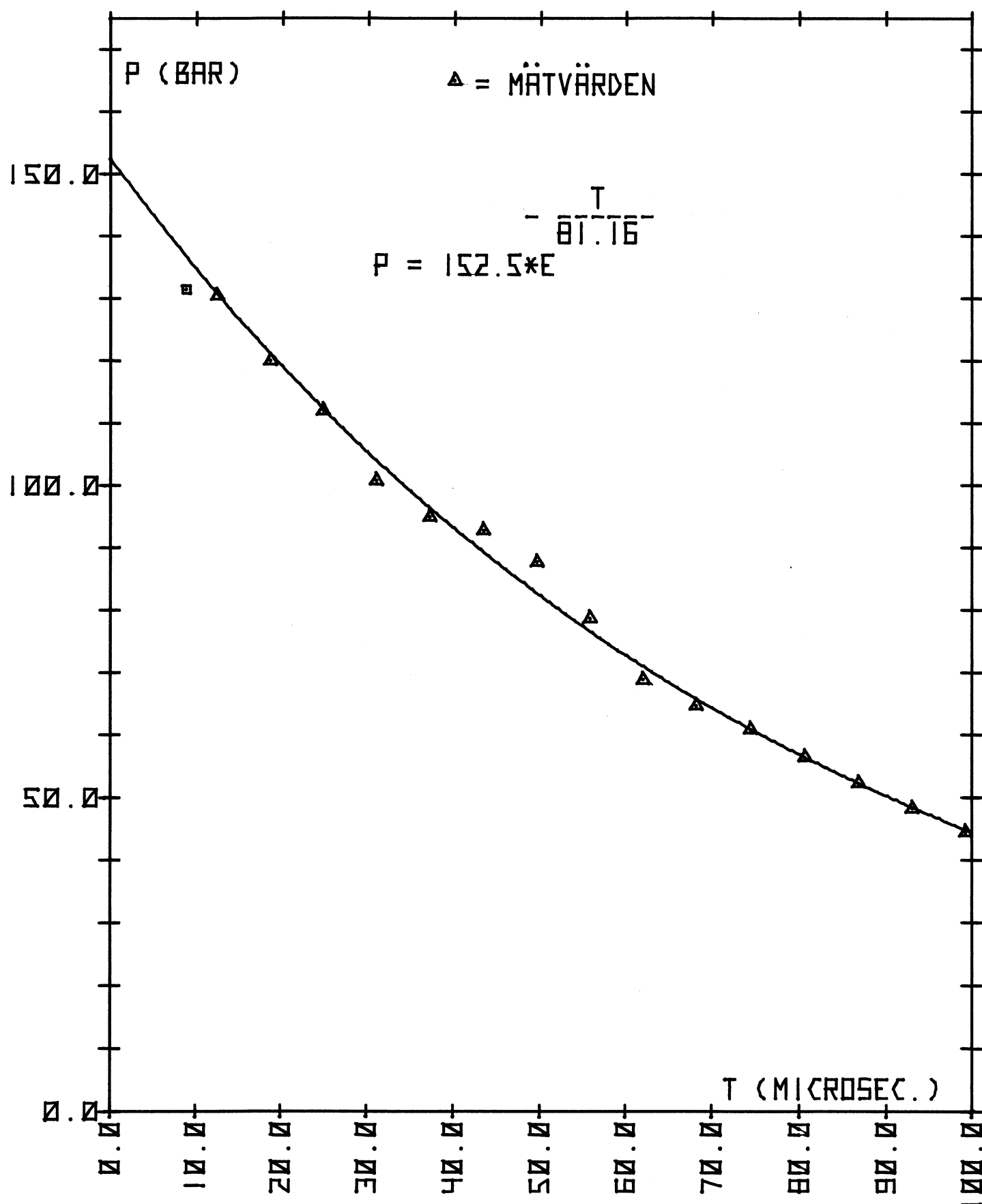


Fig. 10. Tryck-tidförlopp för stötvågen från en 250 g:s TNT-laddning i vatten.
 Δ = mätdata erhållna ur foto. Helden kurva resultat av regressions-
 analys efter logaritmering av tryckvärdena.

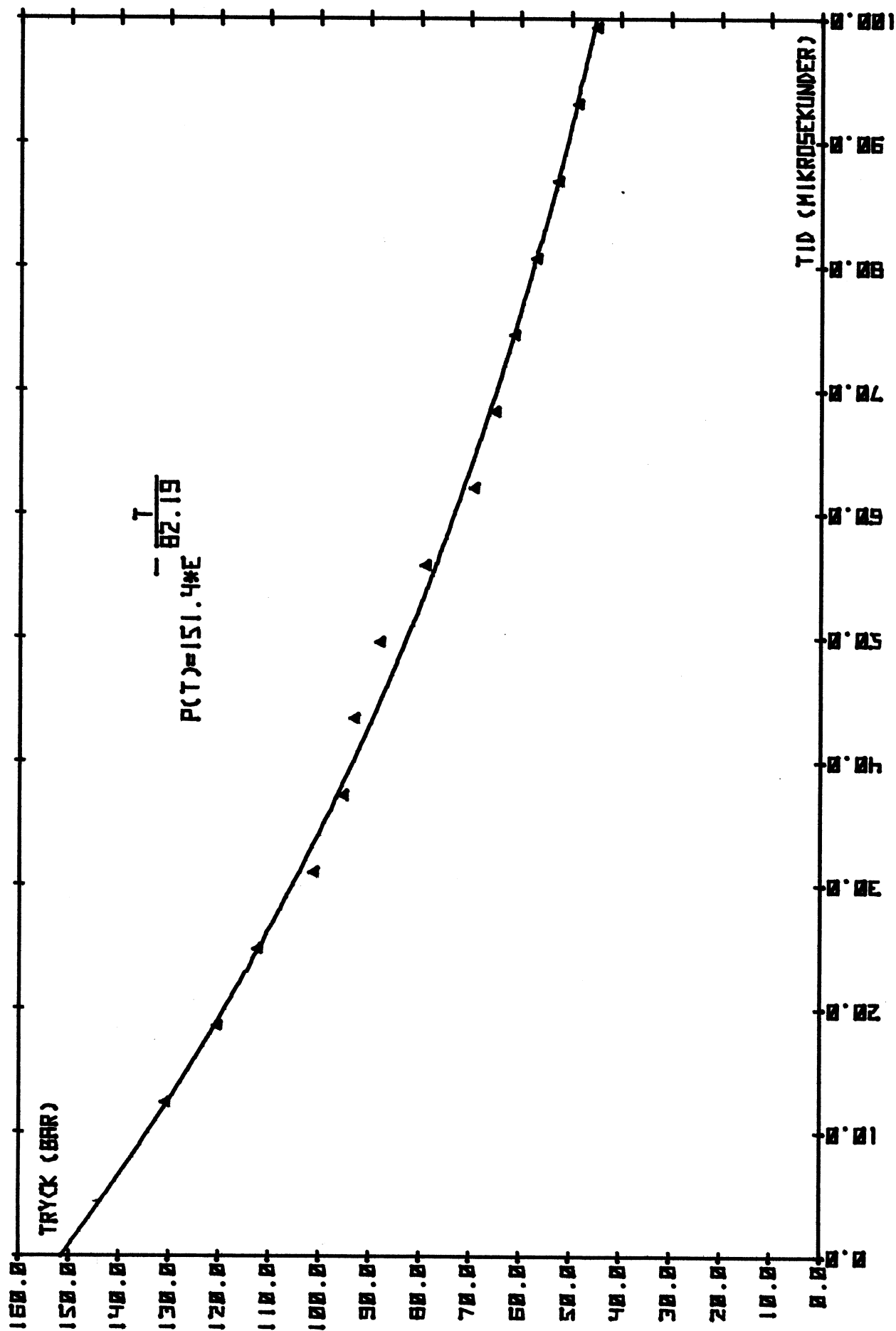


Fig. 11. Tryck-tidförlopp för stötvågen från en 250 g:s TNT-laddning i vatten Δ = mätdata.
Heldragen kurva resultat av regressionsanalys direkt på mätvärdena.

APPENDIX I

När de diskreta mätpunkterna från tryck-tidförloppet är utvärderade skall en funktion anpassas till dessa värden för att tidskonstanten och maxtrycket skall kunna uppskattas.

En lämplig funktion för anpassningen har visat sig vara;

$$f(t) = Ae^{Bt} \quad 1.1$$

där tidskonstanten erhålles som det inverterade värdet av $(-B)$ och där maxtrycket svarar emot värdet på konstanten A.

När $f(t)$ skall minstakvadratanpassas till de givna punktparen (t_i, p_i) är det ekvivalent med att söka konstanter A och B som minimerar funktionen

$$F(A,B) = \sum_{i=1}^n (Ae^{Bt_i} - p_i)^2 \quad 1.2$$

En nödvändighet för minimum är villkoren;

$$\frac{\delta F}{\delta A} = \frac{\delta F}{\delta B} = 0 \quad 1.3$$

vilket resulterar i det icke-linjära ekvationssystemet;

$$A \sum_{i=1}^n e^{2Bt_i} = \sum_{i=1}^n e^{Bt_i} p_i \quad 1.4$$

$$A \sum_{i=1}^n e^{2Bt_i} t_i = \sum_{i=1}^n e^{Bt_i} p_i t_i$$

Ekvationssystemet 1.4 är olinjärt och kan lösas iterativt. Detta kan göras genom att "frysa" B varefter konstanten A kan bestämmas.

Funktionen F beräknas och därefter väljes ett nytt fixt B o.s.v. till dess att F är minimerad.

Om en logaritmering av tryckvärdena först utföres och man därefter anpassar en funktion av typ 1.1 till de diskreta punkterna $(t_i, \ln p_i)$ innebär detta att en minimering av följande funktion skall ske;

$$G(\ln A_1, B_1) = \sum_{i=1}^n (\ln A_1 + B_1 t_i - \ln p_i)^2 \quad 1.5$$

Det ekvationssystem som uppkommer i detta fall blir linjärt och det uppstår inga svårigheter vid evalueringen av konstanterna A_1 och B_1 .

Resultatet från minimeringen 1.2 ger en funktion

$$p = Ae^{Bt}$$

och minimeringen 1.5 ger en funktion

$$\ln p = \ln A_1 + B_1 t$$

som omskriven blir

$$p = A_1 e^{B_1 t}$$

Det bör observeras att det gäller att $A_1 \neq A$ och $B_1 \neq B$ ty vid minsta-kvadratmetoden minimerar man ju summan av kvadraterna på avståndet i y-led från regressionslinjen. Vid anpassningen av regressionslinjen till punktparen $(t_i, \ln p_i)$ påverkas därför anpassningen mer av låga p_i -värden än av höga varför anpassning enligt 1.5 blir tvivelaktig om maxtrycket skall punktskattas.