

EXPANSIONSKRAFTER PÅ EN KANTSPRICKA
I ETT OÄNDLIGT ELASTISKT HALVPLAN

Finn Ouchterlony

DS 1974:13

19.11.1974

STIFTELSEN
SVENSK DETONIKFORSKNING
SWEDISH DETONIC RESEARCH FOUNDATION

VINTERVIKEN – 117 48 STOCKHOLM
SWEDEN

EXPANSIONSKRAFTER PÅ EN KANTSPRICKA
I ETT OÄNDLIGT ELASTISKT HALVPLAN

Finn Ouchterlony

DS 1974:13

19.11.1974

Sammanfattning

Rapporten innehåller en spänningsanalys av fallet med en kant-spricka i ett oändligt elastiskt halvplan som belastas med krafter vid ytan vilka bildar en godtycklig vinkel med sprickans plan. Analysen är begränsad till spänningstillståndet vid sprickspetsen och resultatet redovisas i form av spänningsintensitetsfaktorer. Noggrannheten i resultatet bedöms vara ungefär 1%. En följd av analysen är att om krafterna bildar en vinkel med sprickan som är mindre än $\arctan(2/\pi) \approx 32.5^\circ$ så sluts den.

Låt oss här studera spänningstillståndet vid spetsen på en kantspricka med djupet a i ett oändligt elastiskt halvplan enligt fig 1a. Sprickan är vinkelrät mot kantytan. Denna geometri utgör en förenklad bild av en grund spricka i en plan skiva med dimensionerna $B \times H \times L$ där vi kräver att $a \ll H, L$. Se fig. 1b. Ur belastningssynpunkt finns det däremot en viktig skillnad mellan ett oändligt halvplan och en ändlig skiva vilket man utnyttjar vid det s.k. Brasilienprovet. Vi antar att plant deformationstillstånd råder och sätter $B = 1$ i.e.

Först studerar vi det belastningsfall som uppstår när horisontella krafter F_h angriper vid den fria ytan som i fig. 2a. Det betecknas med index h . Spänningsintensitetsfaktorn för detta fall är känd. Hartranft och Sih /1/ t.ex. ger med 1% noggrannhet

$$K_{Ih} = 2.589 F_h / \sqrt{\pi a}. \quad (1)$$

I fig. 2b visas en mer realistisk belastning. Där har linjekrafterna F_h ersatts av en jämnt fördelad spänning σ_h med samma kraftresultant ned till djupet h . Dvs. $\sigma_h = F_h/d$. Resultaten från Emery m.fl. /2/ visar att K_{Ih} -värdet i detta fall inte skiljer sig nämnvärt från ekv. (1) så länge som $d/a \leq 0.4$.

En annan känd sprickgeometri är stjärnsprickan med fyra armar av alternerande längd och utsatt för centralt angripande krafter, se Ouchterlony /3/. Den visas i fig. 3a. När förhållandet mellan sprickarmarnas längder växer liknar denna geometri alltmer kantsprickan i ett oändligt halvplan utsatt för krafter som angriper längs bissektрисerna mellan sprickan och kanten, se fig. 3b. Betecknar vi detta fall med index s ger räkningarna i /3/ det extrapolerade värdet

$$K_{Is} = 0.47 \sqrt{2} F_s / \sqrt{\pi a}. \quad (2)$$

Vi kan direkt dela upp kraften F_s i en horisontell komponent F_{sh} och en vertikal komponent F_{sv} . Det gäller att $F_{sh} = F_{sv} = F_h / \sqrt{2}$. Väljer vi sedan

$$F_s = F_h \cdot \sqrt{2} \quad (3)$$

får vi att $F_{sh} = F_h$. Härigenom kan vi utnyttja superpositionsprincipen såsom fig. 4 visar och bestämma vilken inverkan på spänningstillståndet kring sprickspetsen som de vertikala komponenterna $F_{sv} = F_h$ har. Ekv. (1)-(3) ger

$$K_{Iv} = K_{Is} - K_{Ih} = -1.65 F_h / \sqrt{\pi a} \quad (4a)$$

För att generalisera resultaten betecknar vi till sist den vertikala kraften

med F_v vilket ger

$$K_{IV} = -1.65 F_v / \sqrt{\pi a}. \quad (4b)$$

Minustecknet i ekv. (4b) innebär att den vertikala lasten strävar att sluta sprickans spets. Uttrycket är därför strängt taget endast meningsfullt om det används tillsammans med andra belastningar så att summaverkan är en öppning av sprickspetsen.

Så länge som vi får en öppning av sprickspetsen kan vi genom superposition av horisontella och vertikala krafter verkan bestämma spänningsintensitetsfaktorn $K_{I\theta}$ för det fall som visas i fig. 5 där kraftresultanten F_θ bildar en vinkel θ med sprickan och där $0 \leq \theta \leq \pi$. Komposantuppdelning av F_θ ger

$$\left. \begin{aligned} F_h &= F_\theta \sin \theta \\ F_v &= F_\theta \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

och superposition av ekv. (1) och (4b) ger därefter

$$K_{I\theta} = (2.59 \sin \theta - 1.65 \cos \theta) F_\theta / \sqrt{\pi a}. \quad (6)$$

Detta uttryck gäller så länge sprickspetsen är öppen, dvs när $K_{I\theta} > 0$. Det värde på θ för vilket spetsen sluts betecknar vi θ_0 . Därmed gäller $K_{I\theta} = 0$ när $\theta = \theta_0$ och ekv. (6) ger

$$\theta_0 = \arctan(1.65/2.59) \approx 32.50^\circ. \quad (7)$$

I fig. 6 ser vi $K_{I\theta}(\theta)$.

Reichmuth /4/ har gjort en spänningsanalys av två närliggande oändliga kvartsplan som belastats enligt fig. 7a med krafter F_θ som bildar vinkeln θ med vertikalplanet. Han finner att när θ är mindre än ett värde θ_0' går kvartsplanen ihop och då degenererar problemet till att lösa spänningsfördelningen under en vertikal kraft på randen till ett oändligt halvplan enligt fig. 7b. Det värde på θ_0' som Reichmuth räknar fram är

$$\theta_0' = \arctan(2/\pi) \approx 32.48^\circ. \quad (8)$$

Överensstämmelsen är bättre än 1‰! Detta är knappast en tillfällighet och de två belastningsfallen i fig. 7b och fig. 4 bör i någon mening vara likvärdiga.

Vi kan se det genom att närmare analysera belastningsfallet med en vertikal kraft F på randen till ett oändligt halvplan. Enligt Reichmuth /4/ och Timoshenko och Goodier /5/ kan det som fig. 8 visar med ett symmetrisnitt delas upp på två kvartsplan, vardera med den vertikala kraften $F/2$ och den

inducerade horisontella kraften F/π . Symmetrisnittet som är sprickplanet i våra första belastningsfall är spänningslöst och deformeras inte i tvärled. Om vi som fig. 9 visar superponerar fallet en kantspricka i ett oändligt halvplan med slutande horisontella tvärkrafter och det oändliga halvplanet med en vertikal kraft får vi fallet en kantspricka i ett oändligt halvplan med vertikala krafter. Härmed har vi visat att den vertikala belastningen $F/2$ har samma verkan på den vertikala kantsprickan som slutande horisontella tvärkrafter F/π . Ur detta följer också att om vi skall kunna öppna kantsprickan under vertikal belastning måste vi lägga på öppnande horisontella tvärkrafter som är större än F/π . Till sist, förhållandet mellan de horisontella och de vertikala kraftkomponenternas storlek när deras verkan balanserar varandra är just $2/\pi$ och resultanten bildar då vinkeln $\arctan(2/\pi) = \theta_0'$ med sprickan.

Med tanke på dels att θ_0' och θ_0 är nästan identiska och dels att K_I i ekv. (1) angetts med ungefär 1% noggrannhet bör även noggrannheten i ekv. (2), (4b) och (6) vara ungefär 1%. Vi kan också skriva ekv. (6)

$$K_{I\theta} = 3.07 \sin(\theta - \theta_0) F_e / \sqrt{\pi a}, \quad (9)$$

som följaktligen gäller med ca 1% noggrannhet när $\theta > \theta_0 = 32.5^\circ$. När $\theta \leq \theta_0$ sluts hela sprickan.

Referenser

1. Hartranft, R.J. och Sih, G.C. Methods of Analys and Solution of Crack Problems.- G.C.Sih ed., Noordhoff, Leyden, kap. 4 s 179-238 (1973).
2. Emery, A.F., Walker, G.E. och Williams, J.A. A Green's Function for the Stress-Intensity Factors of Edge Cracks and It's Application to Thermal Stresses.- J. Basic Engng, 91 s 618-624 (1969).
3. Ouchterlony, F. Analys av spänningstillståndet kring några olika geometrier med radiellt riktade sprickor i ett oändligt plant medium under inverkan av expansionskrafter.- Stiftelsen Svensk Detonikforskning, rapport nr DS 1972:11.
4. Reichmuth, D.R. Rock Mechanics.- C. Fairhurst ed., Pergamon Press, London, s 33-60 (1963).
5. Timoshenko, S. och Goodier, J.N. Theory of Elasticity.- McGraw-Hill, New York, kap. 33 (1951).

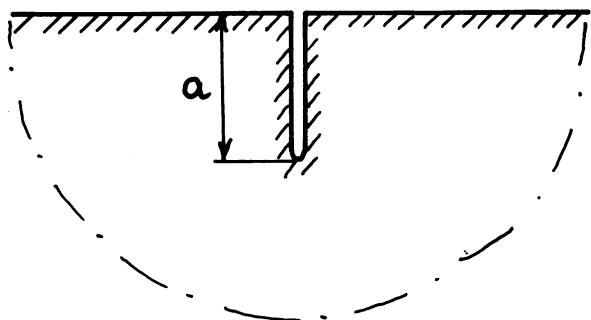


fig 1a

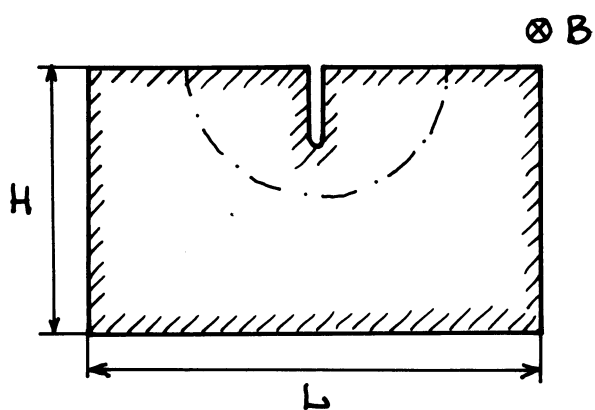


fig 1b

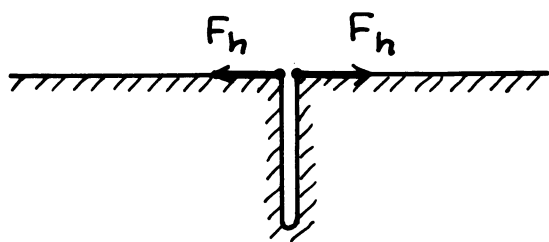


fig 2a

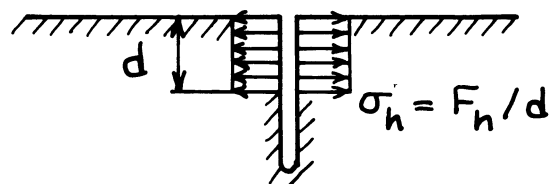


fig 2b

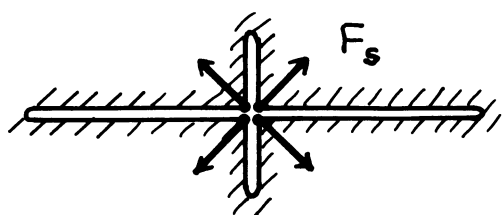


fig 3a

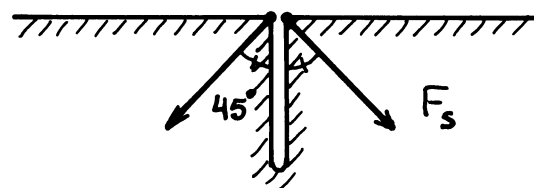


fig 3b

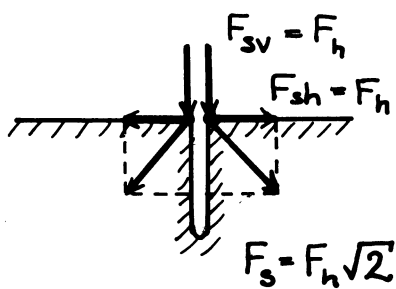
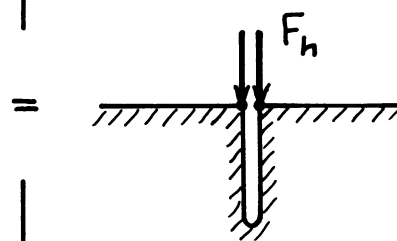
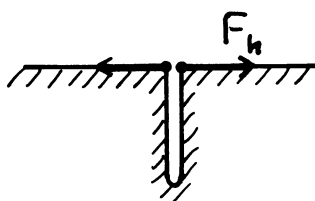


fig 4.



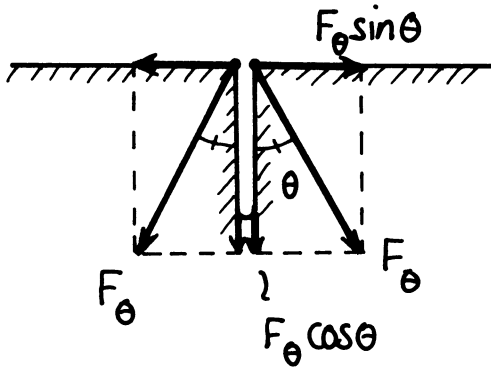


fig 5

$$K_{I\theta} / (F_{\theta} / \sqrt{\pi a})$$

-2

-1

0

25

50

75

 θ

2.59

fig 6

32.5°

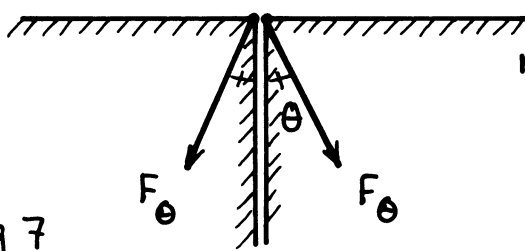


fig 7

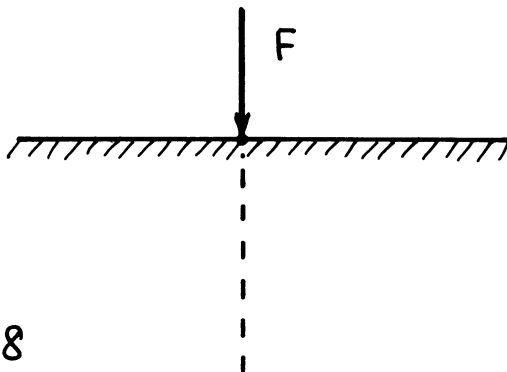
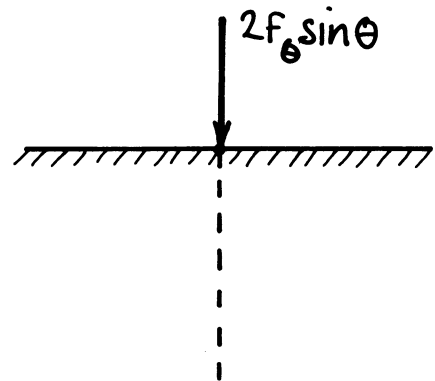
när $\theta < \theta'_0$ 

fig 8

=

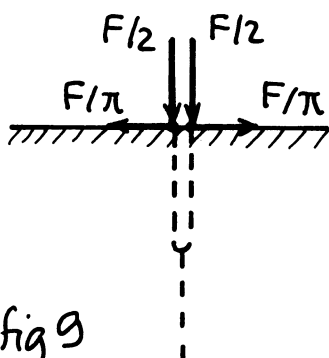
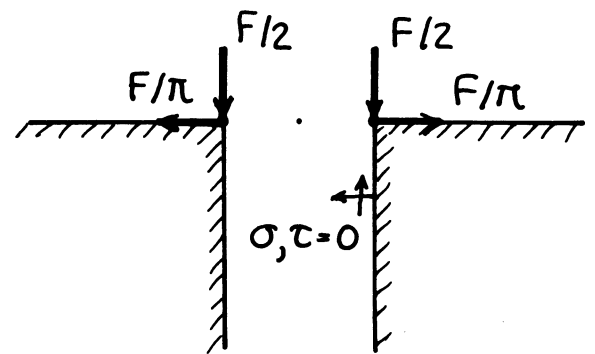
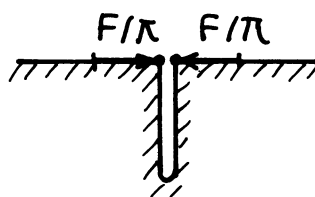
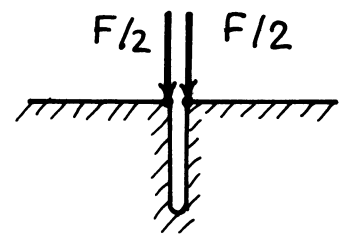


fig 9

+



=



FOa