

BERÄKNING AV MAXIMAL KASTLÄNGD
VID SPRÄNGNING.

Nils Lundborg

DS 1973:4

13.2.73

STIFTELSEN
SVENSK DETONIKFORSKNING
SWEDISH DETONIC RESEARCH FOUNDATION

VINTERVIKEN – 117 48 STOCKHOLM
SWEDEN

BERÄKNING AV MAXIMAL KASTLÄNGD
VID SPRÄNGNING.

Nils Lundborg

DS 1973:4

13.2.73

Sammanfattning

Stenarnas kastlängd vid 45° utgångsvinkel har beräknats som funktion av deras storlek och utgångshastighet där hänsyn tagits till luftmotståndet. Ett samband mellan hastighet, storlek och håldiameter har beräknats, och med hjälp av praktiska försök har maximala kastlängder beräknats vid skjutning med olika håldiametrar.

Inledning

Vid sprängning åstadkommes ibland att några stenar kastas avsevärt längre än huvudparten av det lossbrutna berget. Detta benämnes i allmänhet kast.

För luftmotståndet vid kast gäller att kraften

$$F = \frac{c_x \cdot 1,276 \pi \phi^2 v^2}{2 \cdot 4} \quad (1)$$

där v är hastigheten, ϕ diametern och c_x motståndskoefficienten, Faktorn 1,276 är luftens täthet i kg/m^3 vid lufttrycket 1 bar och temperaturen 0°C .

För sten gäller enligt Cranz /1/

$$c_x = 1,3 \quad (2)$$

som approximativt kan anses gälla för hastigheter upp till något hundratal meter per sekund.

För $c_x = 0$ (eller då stenens diameter $\phi \rightarrow \infty$) erhålles maximal kastlängd vid utgångsvinkeln från horisontalplanet (α_0) $\approx 45^\circ$. För $c_x \neq 0$ erhålles maximal kastlängd för $\alpha_0 < 45^\circ$.

Felet tycks dock ligga inom c:a 5% för $\phi > 0,05 \text{ m}$.

Beräkning av kastlängd och kasttid

Från (1) och Newtons lag fås

$$F = \frac{c_x \cdot 1,276 \pi \phi^2 v^2}{2 \cdot 4} = \frac{4\pi \phi^3}{3 \cdot 8} \rho a \quad (3)$$

som ger accelerationen

$$a = \frac{0,958 c_x v^2}{\rho \phi} \quad (4)$$

Rörelseekvationerna för ett kort tidssteg Δt kan då skrivas

$$\Delta y_n = v_n \sin \alpha_n \Delta t - \frac{0,958 c_x v_n^2}{\rho \phi} \sin \alpha_n \frac{\Delta t^2}{2} - \frac{9,81 \Delta t^2}{2} \quad (5)$$

$$\Delta x_n = v_n \cos \alpha_n \Delta t - \frac{0,958 c_x v_n^2}{\rho \phi} \cos \alpha_n \frac{\Delta t^2}{2} \quad (6)$$

$$v_{y,n+1} = v_n \sin \alpha_n - \frac{0,958 c_x v_n^2}{\rho \phi} \sin \alpha_n \cdot \Delta t - 9,81 \Delta t \quad (7)$$

$$v_{x,n+1} = v_n \cos \alpha_n - \frac{0,958 c_x v_n^2}{\rho \phi} \cos \alpha_n \Delta t \quad (8)$$

$$v_{n+1} = \sqrt{v_{y,n+1}^2 + v_{x,n+1}^2} \quad (9)$$

$$\alpha_{n+1} = \arcsin \frac{v_{y,n+1}}{v_{n+1}} \quad (10)$$

Ekv. (5) - (8) kan skrivas

$$\frac{\Delta y_n}{v_o^2} = \sin \alpha_n \left[\frac{v_n}{v_o} \frac{\Delta t}{v_o} - \frac{0,479 c_x v_o^2}{\rho \phi} \left(\frac{v_n}{v_o} \right)^2 \left(\frac{\Delta t}{v_o} \right)^2 \right] - 4,905 \left(\frac{\Delta t}{v_o} \right)^2 \quad (11)$$

$$\frac{\Delta x_n}{v_o^2} = \cos \alpha_n \left[\frac{v_n}{v_o} \frac{\Delta t}{v_o} - \frac{0,479 c_x v_o^2}{\rho \phi} \left(\frac{v_n}{v_o} \right)^2 \left(\frac{\Delta t}{v_o} \right)^2 \right] \quad (12)$$

$$\frac{v_{y,n+1}}{v_o} = \sin \alpha_n \left[\frac{v_n}{v_o} - \frac{0,958 c_x v_o^2}{\rho \phi} \left(\frac{v_n}{v_o} \right)^2 \frac{\Delta t}{v_o} \right] - 9,81 \frac{\Delta t}{v_o} \quad (13)$$

$$\frac{v_{x,n+1}}{v_o} = \cos \alpha_n \left[\frac{v_n}{v_o} - \frac{0,958 v_o^2}{\rho \phi} \left(\frac{v_n}{v_o} \right)^2 \frac{\Delta t}{v_o} \right] \quad (14)$$

Sättes längd-, hastighets- och tidsskalorna x/v_o^2 , y/v_o^2 , v/v_o och t/v_o erhålles identiska kastbanor för olika v_o med $\frac{c_x v_o^2}{\rho \phi}$ och α_o som parametrar.

Vi får när dessa är konstanta

$$\text{kastlängden } L \sim v_o^2 \quad (15)$$

$$\text{kasthöjden } H \sim v_o^2 \quad (16)$$

$$\text{och kasttiden } t \sim v_o \quad (17)$$

Om $v_o^2 / \rho \phi \rightarrow 0$ fås

$$L = v_o^2 \sin 2 \alpha_o / g \quad (18)$$

$$H = v_o^2 \sin^2 \alpha_o / 2g \quad (19)$$

$$t = 2 v_o \sin \alpha_o / g \quad (20)$$

som är ekvationerna för kast i vakuum.

Om $v_o^2 / \rho \phi$ hålls konstant fås enligt (15) - (17)

$$L \sim \rho \phi \quad (21)$$

$$H \sim \rho \phi \quad (22)$$

$$t \sim \sqrt{\rho \phi} \quad (23)$$

Beräkningarna enligt (11)-(14) har utförts med en H.P. bordskalkylator. Vid beräkningarna har Δt satts lika med $\frac{\Delta L}{v}$ varvid stenen förflyttat sig samma sträcka ΔL för varje integrationssteg. Beräkningarna utfördes med olika värden på ΔL och extrapolerades till $\Delta L = 0$.

Vi behöver endast beräkna en kurva för L och t som funktion av v_0 för ett givet värde på $\rho \phi$. De övriga erhålles genom parallellförskjutning längs en rät linje i ett log-log diagram där $v_0^2 / \rho \phi$ är konstant.

Fig. 1 visar beräknad kastlängd (L) och kasttid (t) som funktion av utgångshastigheten (v_0) för $\alpha_0 = 45^\circ$. Parametern $\rho \phi$ ger ingen direkt uppfattning av stenarnas storlek. Vi sätter därför i stället $\frac{\rho \phi}{2600}$ som parameter varvid parametern för normal täthet 2600 kg/m^3 blir lika med ϕ .

Vid beräkningarna har den av Cranz angivna motståndskoefficienten $c_x = 1,3$ använts.

Följande ekvation för beräknad kastlängd $L = f(v_0)$ med $\frac{\rho \phi}{2600} = p_1$ som parameter har anpassats till kurvorna i fig 1.

$$L = \frac{v_0^2 / 9,81}{1 + \frac{1}{8700} \left(\frac{v_0^2}{p_1} \right)^{7/8} + 10^{-6} \frac{v_0^2}{p_1}} \quad (24)$$

som stämmer väl för $v_0 < 1000 \text{ m/s}$.

Uppskattning av stenarnas hastighetsfördelning vid en salva

Då en laddning detonerar frigörs en viss energi och en viss impuls överförs till de lossprängda stenarna. Låt oss därvid anta att impulstätheten från en och samma laddning

$$i = \int p dt = \text{konst.} \quad (25)$$

för de närmast hålet belägna stenarna. Vi får därvid stenarnas impuls

$$I = \frac{\pi \phi^2}{4} \int p dt = \frac{4 \pi}{3} \left(\frac{\phi}{2} \right)^3 \rho v_0 \quad (26)$$

som ger

$$\rho \phi v_0 = \text{konst.} \quad (27)$$

Detta gäller så länge stenarnas hastighet är liten jämförd med spränggasernas hastighet. Gasens maximala hastighet är självklart en övre gränshastighet.

Om termerna för luftmotståndet i (11) - (14) förlänges med v_o ser man att kastlängd etc. kan beräknas som funktion av v_o för $\rho \phi v_o$ som parameter. Dessa kurvor får ett max. för L och t , där t.ex. $L_{\max}$ erhålles för ett visst värde på $v_o = v_m$. På samma sätt som i fig. 1 kan kurvan förskjutas och kommer då att gälla för andra värden på $\rho \phi v_o$.

Fig. 2 visar L och t som funktion av v_o med $\frac{\rho \phi v_o}{2600}$ som parameter.

Vid förskjutningen av kurvan enl. ovan kommer varje punkt på denna att förflyttas med bibehållet värde på $v_o^2 / \rho \phi$ varvid enligt (15) och (21)

$$L \sim v_o^2 \sim \rho \phi \quad (28)$$

som vid maximal kastlängd ger

$$L_m \sim v_m^2 \sim \rho \phi_m \quad (29)$$

Ur fig. 2 fås

$$L_m = 0,02 v_m^2 \quad (30)$$

$$L_m = \frac{3000 \rho \phi_m}{2600} \quad (31)$$

och

$$L_m = 56,28 \left(\frac{\rho \phi_m v_m}{2600} \right)^{2/3} \quad (32)$$

som gäller för $\alpha_o = 45^\circ$.

Enligt (24) fås här $L = f(v_o)$ med $\frac{\rho \phi v_o}{2600} = p_2$ som parameter

$$L = \frac{v_o^2 / 9.81}{1 + \frac{1}{8700} \left(\frac{v_o^3}{p_2} \right)^{7/8} + 10^{-6} \frac{v_o^3}{p_2}} \quad (33)$$

Av fig. 2 framgår också att kasttiden har ett max. för en viss kastlängd, men att detta motsvarar två olika utgångshastigheter och stenstorlekar för $\rho \phi v_o = \text{konst.}$

Fig. 3 visar kastlängden (L) som funktion av $\rho \phi$ med $\rho \phi v_o$ som parameter. Även här erhålles de olika parameterkurvorna genom parallellförskjutning längs en linje med $v_o^2 / \rho \phi = \text{konst.}$

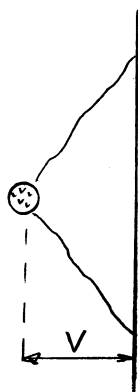
Omskrivning av (24) ger $L = f\left(\frac{\rho \phi}{2600}\right)$ med $\frac{\rho \phi v_o}{2600} = p_2$

som parameter

$$L = \frac{\left(\frac{2600}{\rho \phi} p_2 \right)^2 / 9.81}{1 + \frac{1}{8700} \left[\left(\frac{2600}{\rho \phi} \right)^3 p_2^2 \right]^{7/8} + 10^{-6} \left(\frac{2600}{\rho \phi} \right)^3 p_2^2} \quad (34)$$

De streckade linjerna är extrapolationer för $v_o > 1000$ m/s och är osäkra värden dels på grund av att motståndskoefficienten är osäker, dels på grund av extrapolationen.

Beräkning av $\rho \phi v_o$ som funktion av försättning och håldiameter.



För samma reducerade avstånd $R/\sqrt{q}$ från en cylindrisk laddning är impulstätheten

$$i \sim \sqrt{q} \quad (35)$$

där q är laddningsmängden per meter borrhål.

Vi får då

$$i \sim \sqrt{q} \sim d \quad (36)$$

där d är håldiametern. Enligt (25) och (26) fås därvid

$$d \sim \rho \phi \cdot v_o \quad (37)$$

som enligt (32) ger

$$L_m \sim d^{2/3} \quad (38)$$

Om vi antar att $\phi \sim$ försättningen V , fås för ett och samma ρ och q

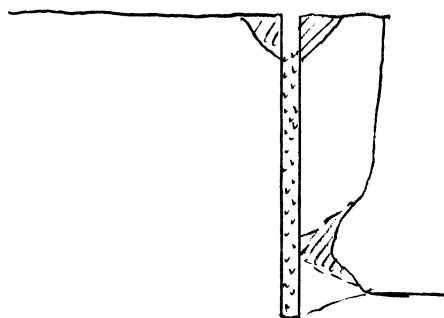
$$V \cdot v_o = \text{konst.} \quad (39)$$

och för ett och samma ρ och V

$$v_o \sim d \quad (40)$$

Ekv. 39 överensstämmer med experiment utförda av Noren /2/.

Uppskattning av $\rho \phi v$ som funktion av skalfaktorn. (t.ex. håldiametern d).



En speciell typ av kast är de som erhålles vid hålmynning eller lokala små försättningar (kratersprängning).

Låt oss här anta att gaserna strömmar ut radiellt varvid

$$i \sim Q^{1/3} \sim d \quad (41)$$

Vi får därvid i i likhet med (37)

$$d \sim \rho \phi v_0 \quad (42)$$

som ger samma resultat som (38) d.v.s.

$$L_m \sim d^{2/3} \quad (43)$$

(38) och (43) behöver dock ej ha samma proportionalitetskonstant.

Uppmätning av $\rho \phi v_0$ som funktion av håldiametern.

Försök där $\rho \phi v_0$ har uppmätts har utförts med 0,5, 1, 3 och 4,5" håldiameter. Värdena är underhandsresultat från försök utförda av Anders Ladegaard-Pedersen och kan, vid närmare analys, komma att revideras något. Några värden är också kända maximala kastlängder från olika salvor.

Då försöken utförts i olika bergarter är spridningen förklarligt stor men tendensen är klar att $\rho \phi v_0 = \text{konst.}$ torde gälla för samma håldiameter och bergart.

Fig. 4 visar de uppmätta resultaten.

Av figuren framgår att maximalvärdet på

$$\frac{\rho \phi v_0}{2600} = 400 d = 10 d'' \quad (44)$$

där d angetts i meter resp. tum.

Fig. 1.

Kastlängd (L) och kasttid (t) vid olika
utgångshastighet (v_0) med $\frac{p}{2600} \cdot \varnothing$ som
parameter

$$\alpha_0 = 45^\circ$$

8.

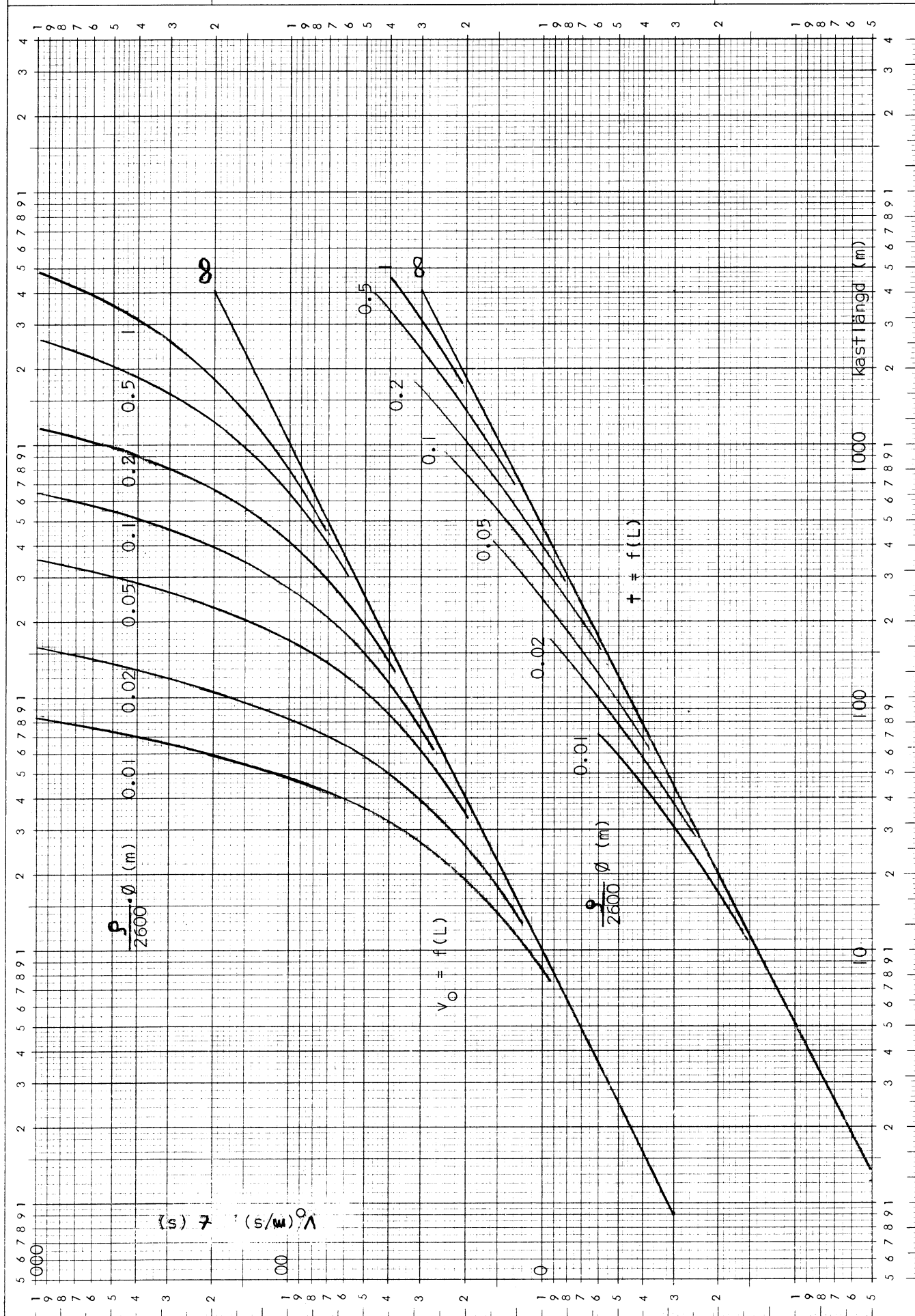


Fig. 2.

Kastlängd (L) och kasttid (t) vid olika utgångshastighet (v_0) med $\frac{\rho}{2600} \cdot \phi \cdot v_0$ som parameter

$$\alpha_0 = 45^\circ$$

9.

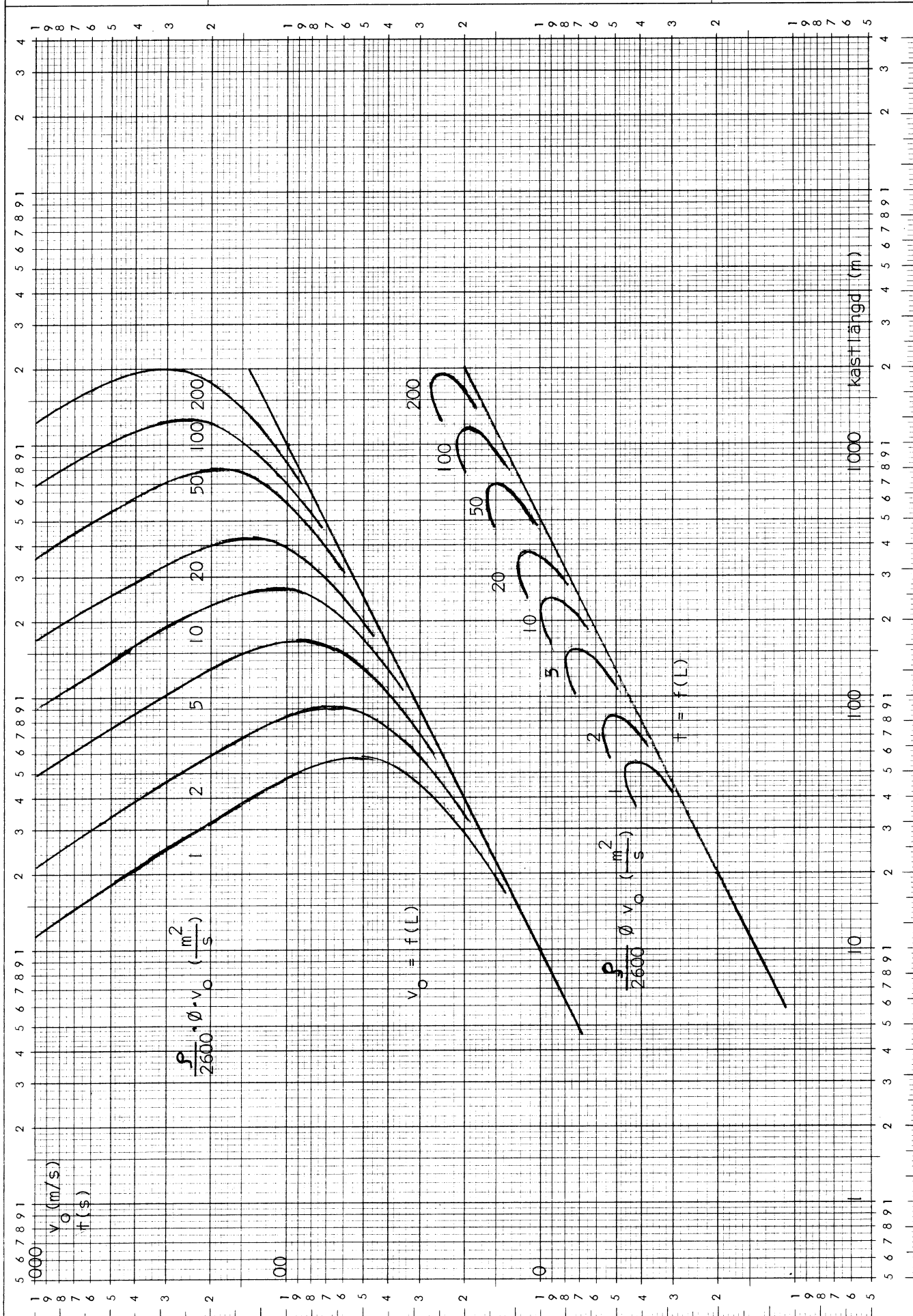


Fig. 3.

Kastlängden som funktion av stendiametern
med $g \cdot \rho \cdot v_0$ resp. håldiametern som parameter

$$\alpha_0 = 45^\circ$$

10.

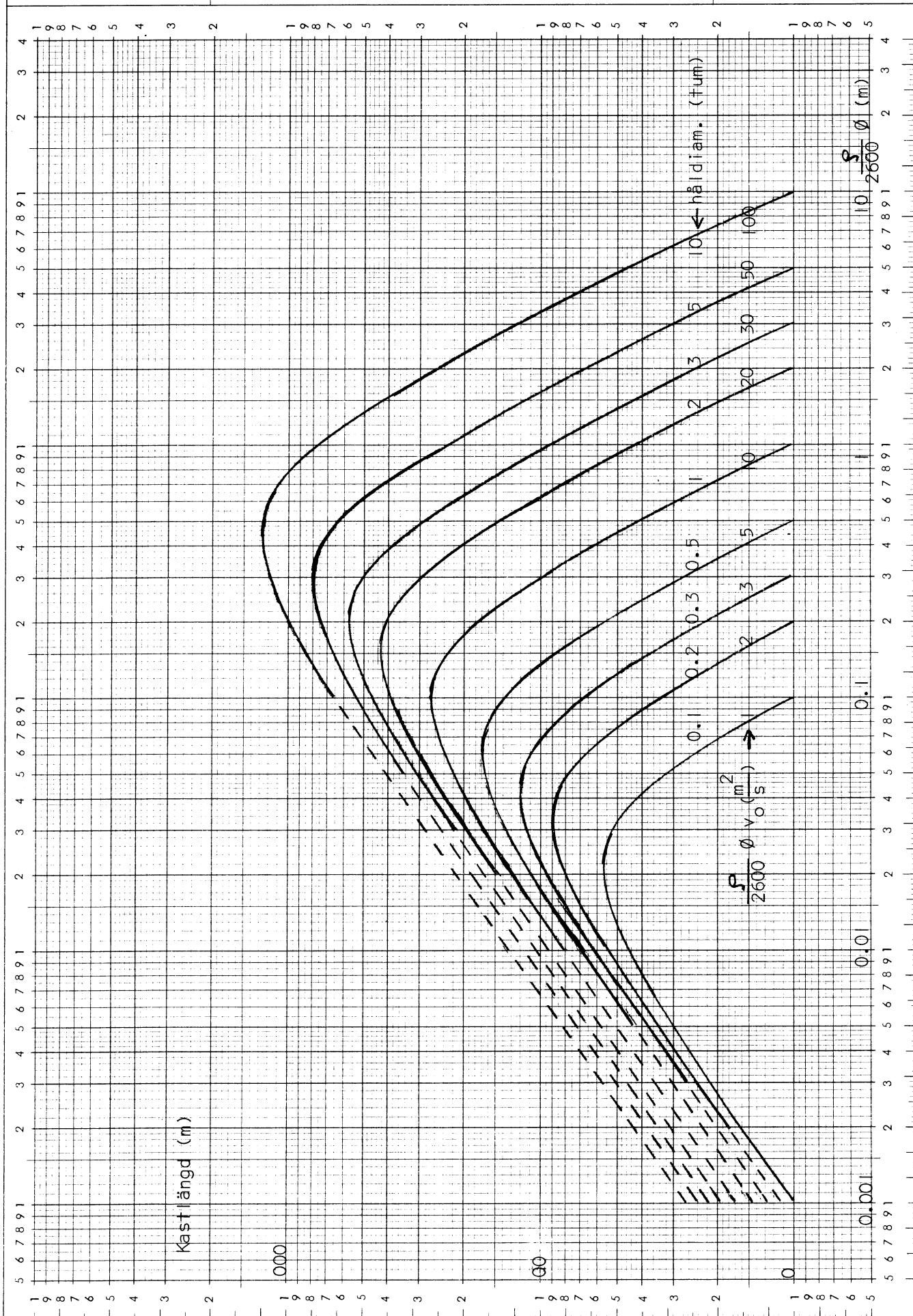


Fig. 4.

$\rho \cdot \emptyset \cdot v_o$ som funktion av håldiametern d''

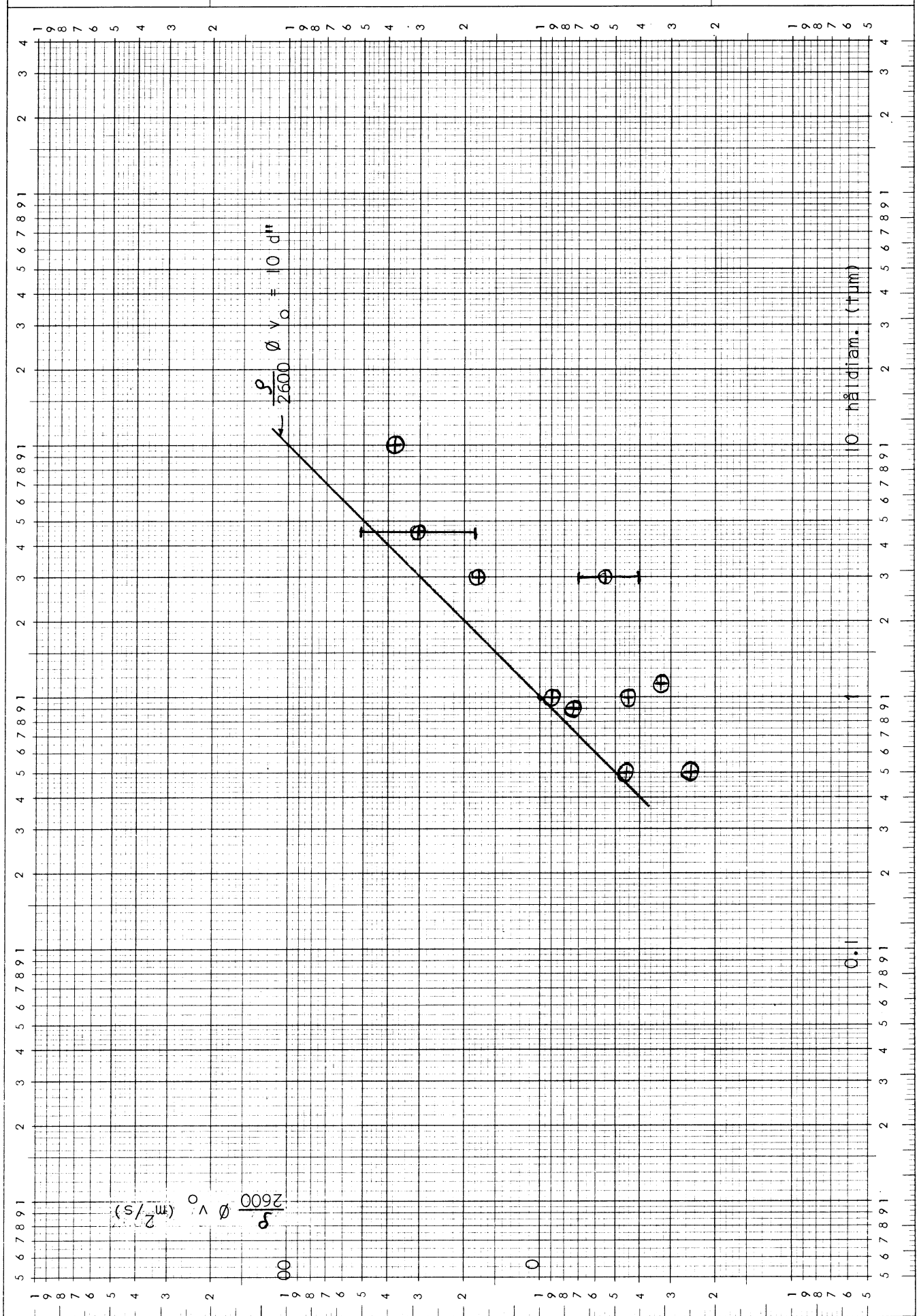


Fig. 5.

Stenarnas diameter (ϕ) som funktion av

$$\frac{2600}{\rho} \cdot M \text{ (M massan i kg)}$$

12.

