

ÖM EN SLUTNINGSEFFEKT SOM UPPTÄDER FÖR
CIRKELBÅGSPRICKAN OCH SPRICKUTBREDNINGS-
RIKTNINGEN VID PALLSPRÄNGNING.

Finn Ouchterlony

DS 1972:7

9.5.1972

STIFTELSEN
SVENSK DETONIKFORSKNING
SWEDISH DETONIC RESEARCH FOUNDATION

VINTERVIKEN - 117 48 STOCKHOLM
SWEDEN

ÖM EN SLUTNINGSEFFEKT SOM UPPTRÄDER FÖR
CIRKELBÅGSPRICKAN OCH SPRICKUTBREDNINGS-
RIKTNINGEN VID PALLSPRÄNGNING.

Finn Ouchterlony

DS 1972:7

9.5.1972

Sammanfattning

I denna rapport görs en analys av spänningstillståndet kring en cirkelbågspricka och spänningsintensitetsfaktorer, trolig tillväxtriiktning och sprickvolym beräknas för inre övertryck och centralt angripande krafter. För den sistnämnda belastningen sluter sig sprickan när halva sektorvinkeln blir ca. 70° . En jämförelse med den plana sprickan ger att dess tillväxtriiktning är stabil i den meningen att cirkelbågsprickan tenderar att plana ut vid tillväxt.

Beträffande utbredningsriktningen vid pallsprängning kan sägas att vinkelsprickans tendens att plana ut motverkas av närvaron av den fria ytan och kortare radiella sprickor nära borrhålet. Slutningseffekten kan medföra att det existerar en minsta utslagsvinkel på ca 40° .

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1. Inledning
2. Teckenförklaring
3. Analys av spänningstillståndet
 - 3.1 Inledning
 - 3.2 Uttryck för avbildningsfunktionen
 - 3.3 Beräkning av spänningsfunktionen
 - 3.4 Beräkning av spänningsintensitetsfaktorerna
 - 3.5 Beräkning av gasvolymen
4. Beräkningsdel
5. Diskussion av resultat
 - 5.1 Om sprickslutningen
 - 5.2 Jämförelse med den plana sprickan
 - 5.3 Jämförelse med vinkelsprickan och förhållandena vid pallsprängning
6. Referenser

1. Inledning

I denna rapport som behandlar dels en slutningseffekt som uppträder för cirkelbågsprickan dels en diskussion av sprickutbredningsriktningen vid pallsprängning görs först en analys av spänningstillståndet kring cirkelbågsprickan med den komplexa metoden. Spänningsintensitetsfaktorer, trolig utbredningsriktning räknad relativt sprickspetsplanet och sprickvolym beräknas som funktion av sektorvinkeln både för inre övertryck och centralt angripande krafter. Resultaten presenteras i figurer och tabeller.

För centralt angripande krafter sluter sig sprickspetsen när sektorvinkeln blir tillräckligt stor. Resultaten jämförs med motsvarande uttryck för den plana sprickan och dess riktningsstabilitet vid tillväxt berörs. Som avslutning utnyttjas cirkelbågsprickan som en approximation av en vinkelspricka för en överläggning om hur den troliga utbredningsriktningen påverkas av olika faktorer. För denna utnyttjas också resultaten från tidigare rapporter.

2. Teckenförklaring

z, u och ζ	=	komplexa tal som representerar rätvinkliga koordinatsystem
$w(\zeta)$	=	komplex avbildningsfunktion
Γ	=	enhetscirkeln i bildplanet eller ζ -planet
R	=	cirkelbågsprickans radie
β	=	halva sektorvinkeln för cirkelbågsprickan
$f(\zeta), g(\zeta)$	=	komplexa spänningsfunktioner
σ	=	komplex randkoordinat på Γ
$F(\sigma)$	=	komplex lastfunktion
$A_0(\sigma)$	=	lastintegral
Ω, Ω_0 och h	=	komplexa funktioner av ζ
p	=	gastryck som verkar i sprickan [N/m^2]
F	=	kraft som verkar i sprickan [N/m]
$\emptyset$	=	sprickspetsplanets vinkel mot reella axeln i det fysiska planet eller z -planet
K	=	komplex spänningsintensitetsfaktor [$N/m^{3/2}$]
K_I, K_{II}	=	spänningsintensitetsfaktorer mod I och II som är real resp. imaginärdel till K [$N/m^{3/2}$]
a	=	den plana sprickans halva längd [m]
σ, τ	=	spänningar [N/m^2]
(r, φ)	=	cylinderkoordinater
φ_0	=	trolig utbredningsriktning räknad relativt sprickspetsplanet
K_φ	=	spänningsintensitetsfaktor ur den tangentiella spänningen i sprickspetsen
V	=	gas- eller sprickvolym [m^3/m]
E	=	elasticitetsmodul [N/m^2]
ν	=	Poissons tal
u, v	=	förskjutningar [m]
$\mathcal{K}$	=	materialkonstant som beror av Poissons tal
K_{Ic}	=	brottseghet [$N/m^{3/2}$]
α	=	halva medelpunktsvinkeln hos vinkelsprickan

Om en slutningseffekt som uppträder för cirkelbågsprickan och sprick-
utbredningsriktningen vid pallsprängning.

3. Analys av spänningstillståndet

3.1. Inledning

Analysen bygger på den komplexa metoden för plana tillstånd inom elastomekaniken som den framställs bl.a. av Muskhelishvili /1/. Problemet är här att lösa en randvillkorsekvation i två komplexa spänningsfunktioner. Utom för de enklaste randgeometrierna avbildas konturen med konform avbildning på en enklare kontur för vilken formen hos spänningsfunktionerna är känd. Den transformerade randvillkorsekvationen blir möjlig att lösa, ibland erhåller man spänningsfunktionerna på slutet form vilket är fallet för cirkelbågsprickan. För att lösa ekvationen utnyttjas Cauchyintegrering. Är man enbart intresserad av förhållandena i sprickspetsarna dvs. spänningsintensitetsfaktorerna räcker det att känna till den ena av spänningsfunktionerna. Denna information räcker också till för att beräkna den elastiska energin och i förekommande fall gasvolymen. Analysen omfattar dels en uppställning av avbildningsfunktionen, dels bestämning av den komplexa spänningsfunktionen för belastningsfallen inre övertryck och centralt verkande krafter vidare beräkning av spänningsintensitetsfaktorerna och gasvolymen. Cirkelbågsprickan utsatt för allsidigt inre övertryck eller vilket är samma sak allsidig yttre dragning har behandlats av Muskhelishvili /1/ § 124 a samt Sih, Paris och Erdogan /2/.

3.2. Uttryck för avbildningsfunktionen

Avbildningen av cirkelbågsprickan i det fysiska z -planet på enhetscirkeln Γ i bildplanet ζ görs över den plana sprickan, se fig 1 där beteckningar framgår

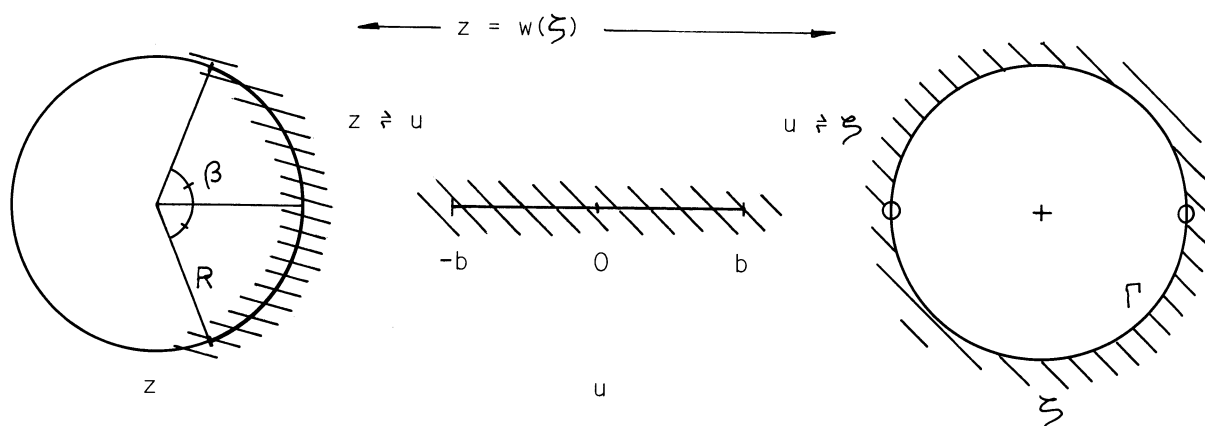


Fig. 1. Avbildning av cirkelbågsprickan

Den transformation som avbildar den plana sprickan på enhetscirkeln ges av

$$u = b/2 \cdot (\zeta + 1/\zeta), |\zeta| \geq 1 \quad (3.1)$$

Området utanför den plana sprickan avbildas på området utanför enhetscirkeln. Den bilineära transformationen avbildar cirkclar på cirkclar (räta linjer när radien blir stor) och cirkelbågsprickan avbildas på den plana av

$$\begin{cases} z = R \cdot \frac{b \cos \beta/2 + i \sin \beta/2}{b \cos \beta/2 - i \sin \beta/2} \\ \beta \in (0, \pi) \end{cases} \quad (3.2)$$

Eliminering av u ger

$$\begin{cases} z = w(\zeta) = -R \cdot \frac{\zeta^2 - 2i \cot \beta/2 \cdot \zeta + 1}{\zeta^2 + 2i \cot \beta/2 \cdot \zeta + 1} \\ |\zeta| \geq 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

Täljarens och nämnarens nollställan ges av

$$T: \zeta_0 = \begin{cases} i \cot \beta/4 \\ -i \tan \beta/4 \end{cases} \quad N: \zeta_0 = \begin{cases} -i \cot \beta/4 \\ i \tan \beta/4 \end{cases} \quad (3.4)$$

Nollställena är varandras spegelbilder i enhetscirkeln för både täljare och nämnare. Oändlighetspunkten i det fysiska planet svarar mot $\zeta_0 = -i \cot \beta/4$ i bildplanet.

Derivering av $w(\zeta)$ ger

$$w'(\zeta) = -4R i \cot \beta/2 \cdot \frac{\zeta^2 - 1}{(\zeta^2 + 2i \cot \beta/2 \cdot \zeta + 1)^2} \quad (3.5)$$

Sprickspetsarnas läge på Γ ges av derivatans nollställan $\zeta = \pm 1$. Andra derivatans värde i ena spetsen $\zeta = 1$ ges av

$$w''(1) = R i \sin \beta e^{i\beta} \quad (3.6)$$

Den andra behöver inte beräknas av symmetriskäl.

3.3. Beräkning av spänningsfunktionen

Denna del följer i allt väsentligt framställningen i Muskhelishvili /1/ kap. 15 speciellt § 85 där en avbildningsfunktion på rationell form behandlas. Det existerar en skillnad, i detta fall tillåts avbildningsfunktionens derivata ha nollställen på det avbildade områdets rand vilket normalt inte är fallet hos Muskhelishvili. Nollställena svarar mot spetsar i konturen dvs. punkter där tangenten till randkurvan i det fysiska planet ändrar riktning 180° . Varje annan spetsvinkel på konturen medför att avbildningsfunktionen har förgreningspunkter på Γ och då blir Cauchyintegrering av randvillkorsekvationen omöjlig. Dessutom har beteckningarna ändrats så att de överensstämmer med Persson /3/.

Randvillkorsekvationen ges av

$$f(\sigma) + \overline{f'(\sigma)} \cdot w(\sigma) / \overline{w'(\sigma)} + \overline{g(\sigma)} = F(\sigma) \quad (3.7)$$

där f och g är de två komplexa spänningsfunktionerna och F är en funktion som beror av belastningen. σ är en komplex randkoordinat på Γ .

Spänningsfunktionernas form ges för en balanserad last på sprickranden av

$$\begin{cases} f(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{-k} \\ g(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^{-k}, \end{cases} \quad (3.8)$$

De är holomorfa i $|\zeta| > 1$.

Låt oss betrakta $f(\sigma)$ som randvärdet (R.V.) till den i $|\zeta| > 1$ holomorfa funktionen $f(\zeta)$ och den andra termen i (3.7) som ett R.V. till funktionen

$$\Omega(\zeta) = \overline{f'(1/\bar{\zeta})} \cdot w(\zeta) / \overline{w'(1/\bar{\zeta})} \quad (3.9)$$

Partialbråksuppdelning av $w/\overline{w'}$ ger

$$w(\zeta) / \overline{w'(1/\bar{\zeta})} = - \frac{4 \cos^2 \beta/2}{\zeta - i \tan \beta/4} + \zeta^{-2} h(\zeta) \quad (3.10)$$

där $h(\zeta)$ är en funktion som är holomorf i $|\zeta| < 1$.

Utveckling av $\overline{f'(1/\bar{\zeta})}$ i Taylorserie kring $\zeta_1 = i \tan \beta/4$ ger

$$\overline{f'(1/\bar{\zeta})} = \overline{f'(1/\bar{\zeta}_1)} - (\zeta - \zeta_1) \overline{f''(1/\bar{\zeta}_1)} / \zeta_1^2 - \dots \quad (3.11)$$

sambanden (3.8) - (3.11) ger så

$$\Omega(\zeta) = -\frac{4\cos^2 \beta/2 \cdot \overline{f'(1/\bar{\zeta}_1)}}{\zeta - \zeta_1} + \Omega_0(\zeta) \quad (3.12)$$

där $\Omega_0(\zeta)$ är holomorf i $|\zeta| < 1$.

Funktionen $\overline{g(\sigma)}$ i tredje termen betraktas som R.V. till den i $|\zeta| < 1$ holomorfa funktionen $\overline{g(1/\bar{\zeta})}$. Kända satser för Cauchy-integraler ger vid Cauchyintegrering av (3.7)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\zeta) - \frac{4\cos^2 \beta/2 \cdot \overline{f'(1/\bar{\zeta}_1)}}{\zeta - \zeta_1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} \\ |\zeta| \geq 1 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Innan $f(\zeta)$ är bestämd återstår beräkning av lastintegralen i H.L. som betecknas $A_0(\zeta)$ och $\overline{f'(1/\bar{\zeta}_1)}$.

De två belastningsfall som först studeras är dels ett allsidigt inre övertryck, dels centralt angripande krafter där krafterna utgör resultaten till gastryckets i ett borrhål verkan $F = 2pR$, se fig. 2.

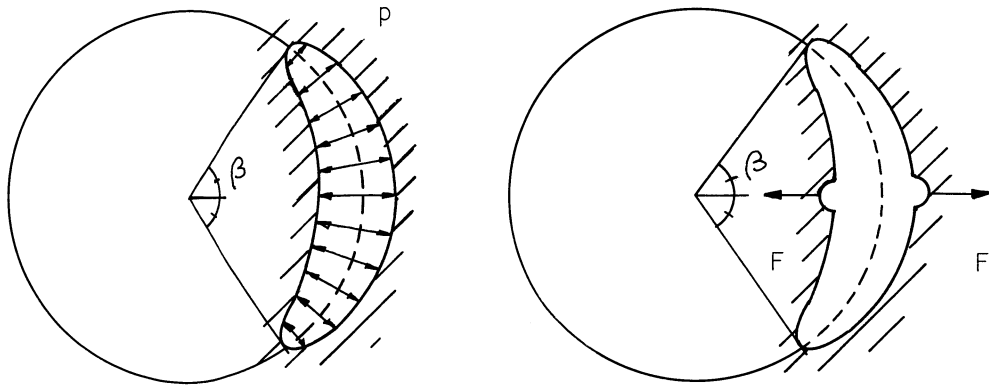


Fig. 2. De olika belastningsfallen

För allsidigt inre övertryck gäller

$$F(\sigma) = -p \cdot w(\sigma) \quad (3.14)$$

och för de centralt angripande krafterna

$$F(\sigma) = \begin{cases} 0 & , \sigma \in (-i, i) \\ iF & , \sigma \in (i, -i) \end{cases} \quad (3.15)$$

I det första fallet kan lastintegralen i (3.13) beräknas som en Cauchyintegral medan den i det andra måste utvärderas som en linjeintegral. Partialbråks-uppdelning av avbildningsfunktionen ger

$$w(\zeta) = -R \left\{ 1 - 4i \cot \beta/2 \cdot \left[\frac{\cos^2 \beta/4}{\zeta + i \cot \beta/4} + \frac{\sin^2 \beta/4}{\zeta - i \tan \beta/4} \right] \right\} \quad (3.16)$$

Tillämpning av kända satser ger för inre övertryck

$$A_0(\zeta) = 4ipR \cot \beta/2 \cdot \frac{\sin^2 \beta/4}{\zeta - i \tan \beta/4} \quad (3.17)$$

För centralt verkande krafter erhålles

$$A_0(\zeta) = - \frac{F}{2\pi} \cdot \ln \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \quad (3.18)$$

Derivering av (3.13) och insättning av $\zeta = 1/\bar{\zeta}_1$ ger

$$f'(1/\bar{\zeta}_1) - 4 \sin^2 \beta/2 \cdot \overline{f'(1/\bar{\zeta}_1)} = -A_0'(1/\bar{\zeta}_1) \quad (3.19)$$

Då H.L. i bägge belastningsfallen är rent imaginärt blir $f'(1/\bar{\zeta}_1)$

också imaginär. Räkningar ger för inre övertryck

$$f(\zeta) = - \frac{4ipR \sin^2 \beta/4 \cot \beta/2}{1 + \sin^2 \beta/2} \cdot \frac{1}{\zeta - i \tan \beta/4} \quad (3.20)$$

$f(\zeta)$ är holomorf i $|\zeta| > 1$ och kontinuerlig på Γ . För centralt verkande inre krafter erhålles

$$f(\zeta) = \frac{F}{2\pi} \left[\ln \frac{\zeta - i}{\zeta + i} + 2i \frac{\cos \beta/2 \sin^2 \beta/4}{1 + \sin^2 \beta/2} \cdot \frac{1}{\zeta - i \tan \beta/4} \right] \quad (3.21)$$

som är holomorf i $|\zeta| > 1$ och är kontinuerlig på Γ utom i kraftangreppspunkterna. Derivatans värde i sprickspetsen $\zeta = 1$ ges av

$$f'(1) = \frac{ipR \sin \beta}{2(1 + \sin^2 \beta/2)} e^{i\beta/2} \quad (3.22)$$

för inre övertryck och för centralt verkande krafter

$$f'(1) = \frac{iF}{2\pi} \left[1 - \frac{2 \cos \beta/2 \sin^2 \beta/2}{1 + \sin^2 \beta/2} \cdot e^{i\beta/2} \right] \quad (3.23)$$

Dessa uttryck behövs för bestämningen av spänningsintensitetsfaktorererna.

3.4. Beräkning av spänningsintensitetsfaktorerna

Spänningsintensitetsfaktorernas värden ges av följande uttryck som härstammar bl.a. från Bowie /4/ och Andersson /5/

$$\bar{K} = K_I - iK_{II} = 2\sqrt{\pi} f'(\sigma_k) / \sqrt{w''(\sigma_k)} e^{i\phi_k} \quad (3.24)$$

där σ_k är spetsens läge på Γ och ϕ_k sprickspetsplanets vinkel mot reella axeln i z -planet. För den övre spetsen gäller

$$\begin{cases} \sigma_k = 1 \\ \phi_k = \beta + \pi/2 \end{cases} \quad (3.25)$$

Räkningar ger det för inre övertryck kända resultatet, Sih /2/

$$K_I + iK_{II} = \frac{p \sqrt{\pi R \sin \beta}}{1 + \sin^2 \beta/2} \cdot e^{i\beta/2} \quad (3.26)$$

och för centralt angripande krafter

$$K_I + iK_{II} = \frac{F}{\sqrt{\pi R \sin \beta}} \cdot \left[\frac{1 - 3\sin^2 \beta/2}{1 + \sin^2 \beta/2} + i \frac{\sin \beta}{1 + \sin^2 \beta/2} \right] \quad (3.27)$$

I gränsen för den plana sprickan när $\beta \rightarrow 0$ och $R \cdot \beta \rightarrow a$ ger (3.26) resultaten

$$\begin{cases} K_I \approx p \sqrt{\pi a} \\ K_{II} \approx 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

och (3.27)

$$\begin{cases} K_I \approx F / \sqrt{\pi a} \\ K_{II} \approx 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

som är välkända.

För en cirkelbågspricka där belastningen utgörs av ett inre övertryck över en del av randen, svarande mot sektorvinkeln 2γ ger räkningar

$$K_I + iK_{II} = p \frac{\sqrt{\pi R \sin \beta}}{1 + \sin^2 \beta/2} \cdot \frac{2}{\pi} \left[\frac{Q \cos^2 \beta/2 - P}{\cos \beta/2} + i \frac{Q \sin^2 \beta/2 - 0.5P}{\sin \beta/2} \right] \quad (3.30)$$

där

$$\begin{cases} Q(\beta, \gamma) = \operatorname{atan} \frac{\sin \gamma + \sqrt{(\cos \gamma - \cos \beta)(1 - \cos \gamma)}}{\cos \gamma - \cos \beta + \sqrt{(\cos \gamma - \cos \beta)(1 + \cos \gamma)}} \\ P(\beta, \gamma) = \sqrt{(\cos \gamma - \cos \beta)(1 - \cos \gamma)}, \beta \geq \gamma \end{cases} \quad (3.31)$$

Ur (3.30) erhålles (3.26) som gränssfall när $\gamma = \beta$, då är $Q = \pi/2$ och $P = 0$, när $\gamma \ll 1$ erhålles (3.27) med $F = 2p\gamma R$.

Ett antal författare bl.a. Barenblatt /6/ och Sih och Liebowitz /7/ använder dragspänningshypotesen för brott i ett sprött material eller annorlunda uttryckt att en spricka i ett sprött material skulle vara benägen att växa i den riktning där den tangentiella dragspänningen är störst. Uttrycken för spänningarna i de polära koordinaterna (r, φ) med origo i sprickspetsen ges av

$$\begin{cases} \sigma_{\varphi} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos^2 \varphi/2 \cdot [\cos \varphi/2 - 3 K_{II}/K_I \sin \varphi/2] \\ \tau_{r\varphi} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \varphi/2 \cdot [\cos \varphi/2 \sin \varphi/2 + K_{II}/K_I (1 - 3 \sin^2 \varphi/2)] \end{cases} \quad (3.32)$$

σ_{φ} är störst för ett värde φ_0 så att $d\sigma_{\varphi}/d\varphi = 0$ för $\varphi = \varphi_0$.

Med den givna formen på σ_{φ} och $\tau_{r\varphi}$ inses att φ_0 måste vara en huvudspänningsriktning och $\tau_{r\varphi} = 0$ för $\varphi = \varphi_0$. Se Ouchterlony /8/.

Det ger räknat moturs från sprickspetsplanet

$$\varphi_0 = -2 \operatorname{atan} \left[(\sqrt{K_I^2 + 8 K_{II}^2} - K_I) / 4 K_{II} \right] \quad (3.33)$$

När $K_{II} = 0$ är $\varphi_0 = 0$ och sprickan växer i sprickspetsplanets riktning, när $K_{II} \gg K_I$ däremot blir $|\varphi_0| \approx 70^\circ$ varför avvikelser från sprickspetsplanets riktning aldrig kan bli större. Man bör nog observera att φ_0 inte sammanfaller med den riktning för vilken den största huvudspänningen antar sitt största dragvärde, se Jaeger och Cook /9/.

Ur (3.32) kan K_{φ} definieras som K_I

$$K_{\varphi} = \cos^2 \varphi/2 \cdot [K_I \cos \varphi/2 - 3 K_{II} \sin \varphi/2] \quad (3.34)$$

och K_{φ_0} beräknas för en jämförelse med K_I och K_{II} .

3.5. Beräkning av gasvolymen

Eftersom sprickan är helt fylld med gas i ena fallet blir gasvolym och sprickvolym samma sak. Begreppet gasvolym kan också definieras för centralt angripande krafter med $F = 2pR$ men beräkningen genomförs inte här. Volymen har dimensionen $[m^3/m]$. Gasvolymen i en spricka ges av, jfr Ouchterlony /10/,

$$V(a) = 2n(1-\nu^2)/pE \int_0^a [K_I^2(a) + K_{II}^2(a)] da \quad (3.35)$$

Variabelbyte $a \rightarrow \beta$ och $da = R d\beta$ ger för två spetsar, $n = 2$ med (3.26) och $K_I^2 + K_{II}^2 = K\bar{K}$

$$V(\beta) = \frac{4\pi(1-\nu^2)pR^2}{E} \int_0^\beta \frac{\sin \beta d\beta}{(1+\sin^2(\beta/2))^2} \quad (3.36)$$

Integralen är elementär, räkningar ger

$$V(\beta) = \frac{2\pi(1-\nu^2)pR\sin\beta^2}{E} \cdot \frac{1}{1-\sin^4\beta/2} \quad (3.37)$$

I gränsen för den plana sprickan $\beta \rightarrow 0$ och $R\beta \approx a$ ger detta

$$V(0) \approx 2\pi(1-\nu^2)pa^2/E \quad (3.38)$$

som stämmer med kända uttryck. När $\beta \rightarrow \pi$ dvs sprickan blir en ring ger (3.37)

$$V(\pi) = 4\pi(1-\nu^2)pR^2/E \quad (3.39)$$

som överensstämmer med summan av de volymökningar som erhålles dels för en ändlig plan cirkulär platta dels för en oändlig plan platta med cirkulärt hål båda utsatta för ett konstant tryck på den cirkulära randen.

4. Beräkningsdel

I denna del presenteras för två av belastningsfallen värden på K_I , K_{II} , K_{φ_0} och φ_0 som funktion av β . Spänningsintensitetsfaktorererna redovisas dimensionslöst mot $p \cdot \sqrt{\pi R \sin \beta}$ resp. $F / \sqrt{\pi R \sin \beta}$ så att resultatet blir jämförbart med en plan spricka vars längd $2a$ är lika stor som kordans mellan sprickspetsarnas längd på cirkelbågsprickan $2R \sin \beta$, dvs $a \hat{=} R \sin \beta$ se fig 8. Referenstillstånden ges alltså av uttrycken (3.28) och (3.29) för den plana sprickan. Dessa dimensionslösa spänningsintensitetsfaktorer betecknas med k_1 , k_2 och k_φ . Resultaten finns i tabell 1 och 2 samt fig 3-6.

Tabell 1: Spänningsintensitetsfaktorer k_1 , k_2 och k_φ samt trolig tillväxtriktning φ_o för cirkelbågsprickan utsatt för inre övertryck.

β	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
k_1	1.	0.989	0.956	0.905	0.841	0.769	0.693	0.616	0.542	0.471	0.405	0.343	0.286	0.232	0.182	0.134	0.088	0.044	0.
k_2	0.	0.086	0.169	0.243	0.306	0.359	0.400	0.432	0.455	0.471	0.483	0.491	0.495	0.498	0.499	0.500	0.500	0.500	0.500
k_φ	1.	1.000	0.998	0.993	0.981	0.964	0.939	0.909	0.877	0.843	0.809	0.774	0.743	0.711	0.683	0.654	0.626	0.605	0.577
φ_o	0.	-9.85	-18.91	-26.74	-33.29	-38.71	-43.22	-47.03	-50.29	-53.14	-55.65	-57.92	-60.00	-61.93	-63.76	-65.51	-67.20	-68.87	-70.53

Tabell 2: Spänningsintensitetsfaktorer k_1 , k_2 och k_φ samt trolig tillväxtriktning φ_o för cirkelbågsprickan under centralt angripande krafter.

β	0	10	20	30	40	50	60	70.53
k_1	1.	0.970	0.883	0.749	0.581	0.394	0.200	0.
k_2	0.	0.172	0.332	0.469	0.575	0.650	0.693	0.707
k_φ	1.	1.014	1.038	1.050	1.033	0.987	0.914	0.817
φ_o	0.	-19.04	-34.00	-44.85	-52.98	-59.51	-65.13	-70.53

Spänningsintensitetsfaktorer (fig 3) och
trolig utbredningsriktning (fig 4) som
funktion av sektorvinkeln för en cirkel-
bågspricka under utbrett inre övertryck

13.

Fig 3 och 4

Rapport DS 1972:

F 0a

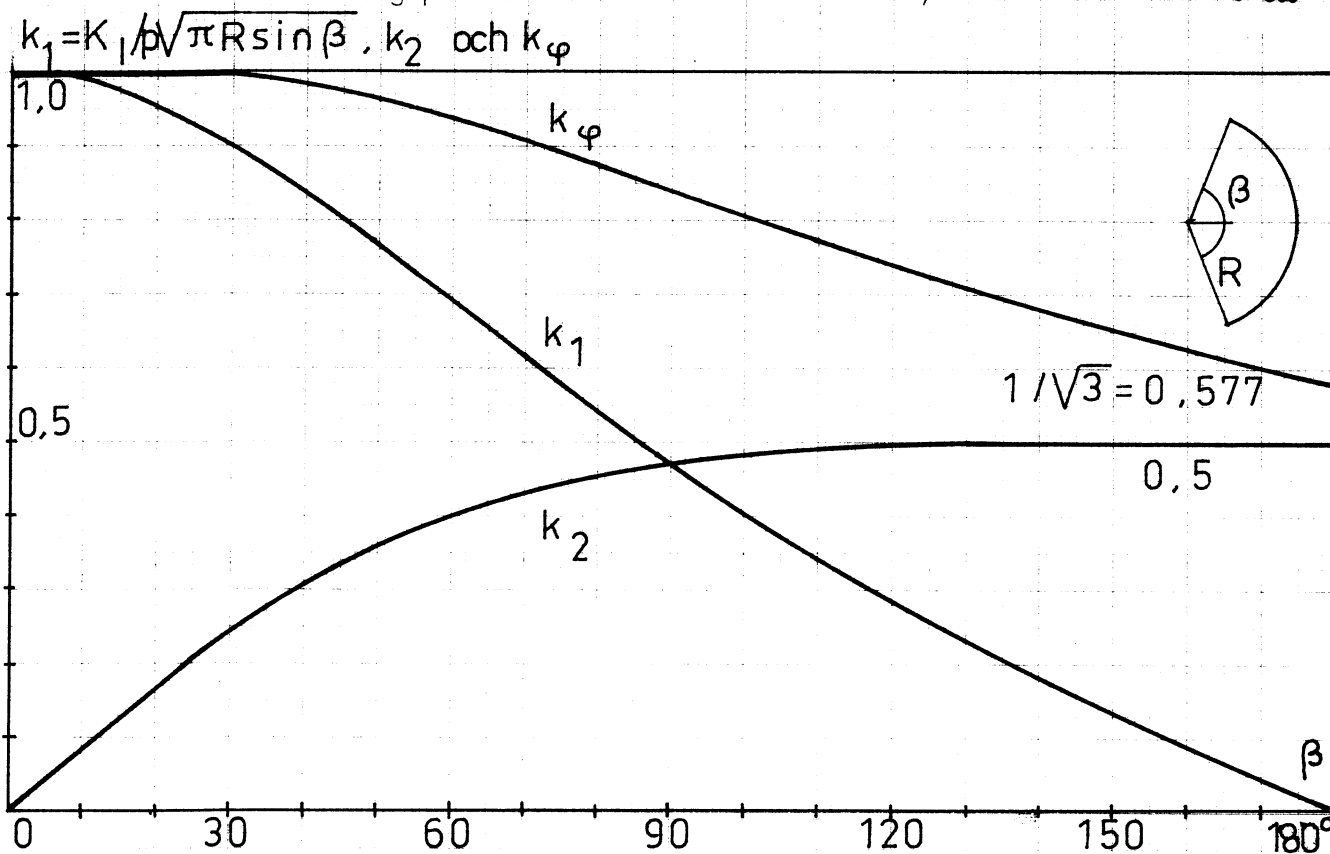


FIG 3

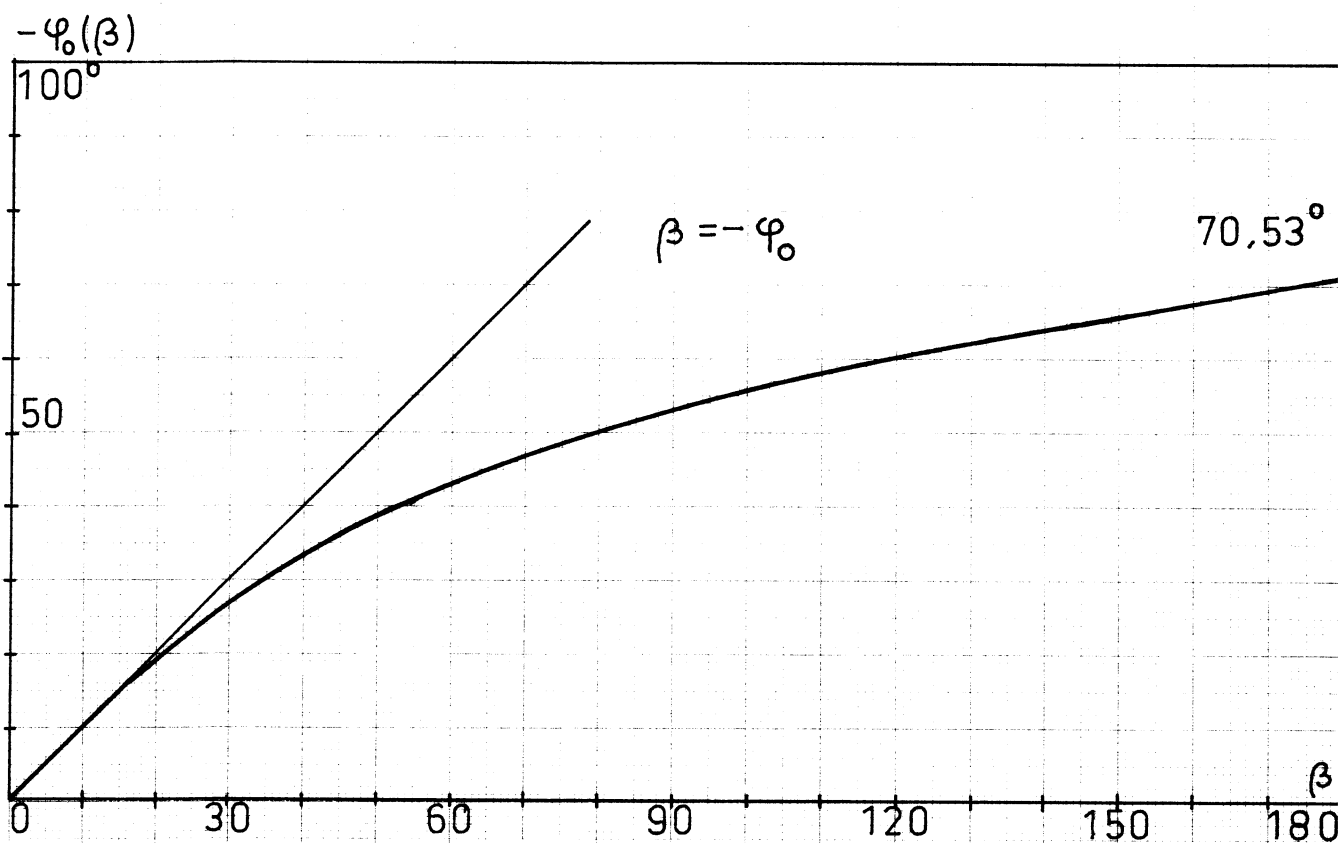


FIG 4

Spänningsintensitetsfaktorer (fig 5) och
trolig utbredningsriktning (fig 6) som
funktion av sektorvinkeln för en cirkel-
bågspricka under centralt verkande krafter

14.

Fig 5 och 6

Rapport DS 1972:7

F. Ou

$$k_1 = K_1 / (F / \sqrt{\pi R \sin \beta}), k_2 \text{ och } k_\varphi$$

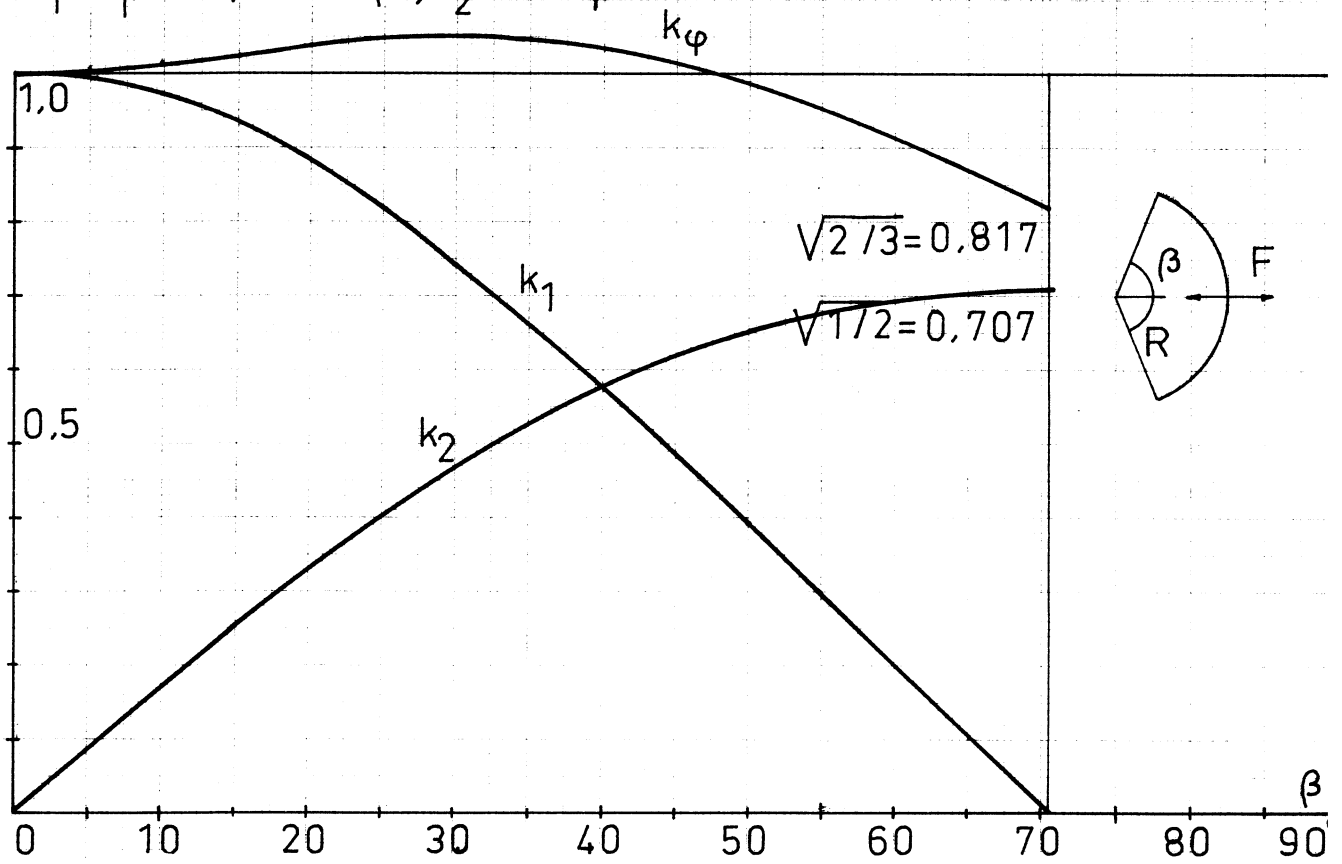


FIG 5

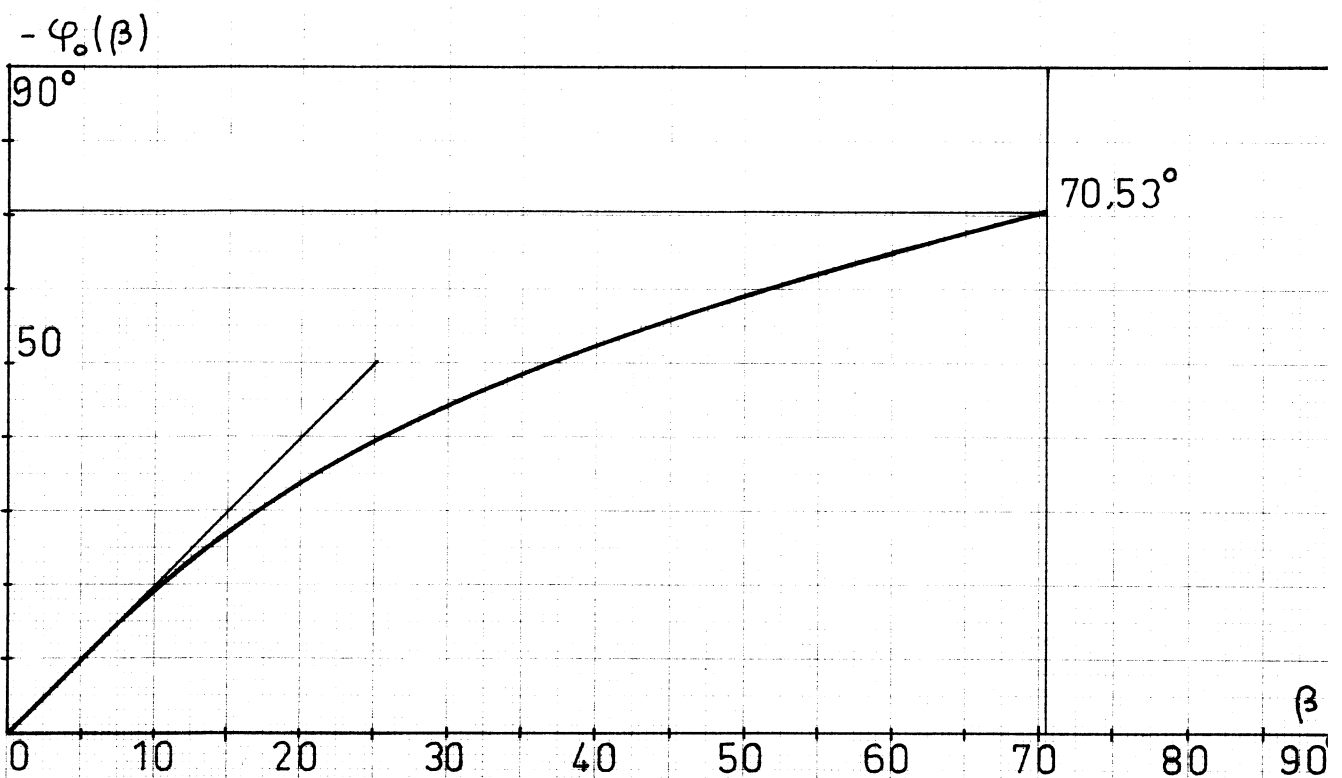


FIG 6

5. Diskussion av resultat

5.1. Om sprickslutningen

Uttrycken för förskjutningarna nära sprickspetsen, u_x i sprickspetsplanets riktning och v_y i tvärled ges av Rice [11] t.ex.

$$\begin{cases} u_x = \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [K_I \cos \varphi/2 (\mathcal{K} - 1 + 2\sin^2 \varphi/2) + K_{II} \sin \varphi/2 (\mathcal{K} + 1 + 2\cos^2 \varphi/2)] \\ v_y = \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [K_I \sin \varphi/2 (\mathcal{K} + 1 - 2\cos^2 \varphi/2) - K_{II} \cos \varphi/2 (\mathcal{K} - 1 - 2\sin^2 \varphi/2)] \end{cases} \quad (5.1)$$

där (r, φ) är polära koordinater som förut. För plant deformationstillstånd med $\mathcal{K} = 3-4\nu$ ger (5.1) förskjutningarna på sprickytan där $\varphi = \pi$

$$(u_x, v_y) = \frac{4(1-\nu^2)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (K_{II}, K_I) \quad (5.2)$$

Sprickspetsens form är parabolisk oavsett belastningsgeometrin och om $K_I < 0$ sluts sprickan. Randvillkoren förändras och därmed gäller inte räkningarna i avsnitt 3 längre. För K_{II} finns ingen liknande effekt.

För cirkelbågsprickan utsatt för inre övertryck finns ingen slutningstendens utom den att förskjutningen i tvärled är noll när sprickan täcker hela periferin, $\beta = \pi$ i fig. 3. När belastningen utgörs av centralt angripande krafter däremot ger (3.27) att spetsen inte längre öppnas när

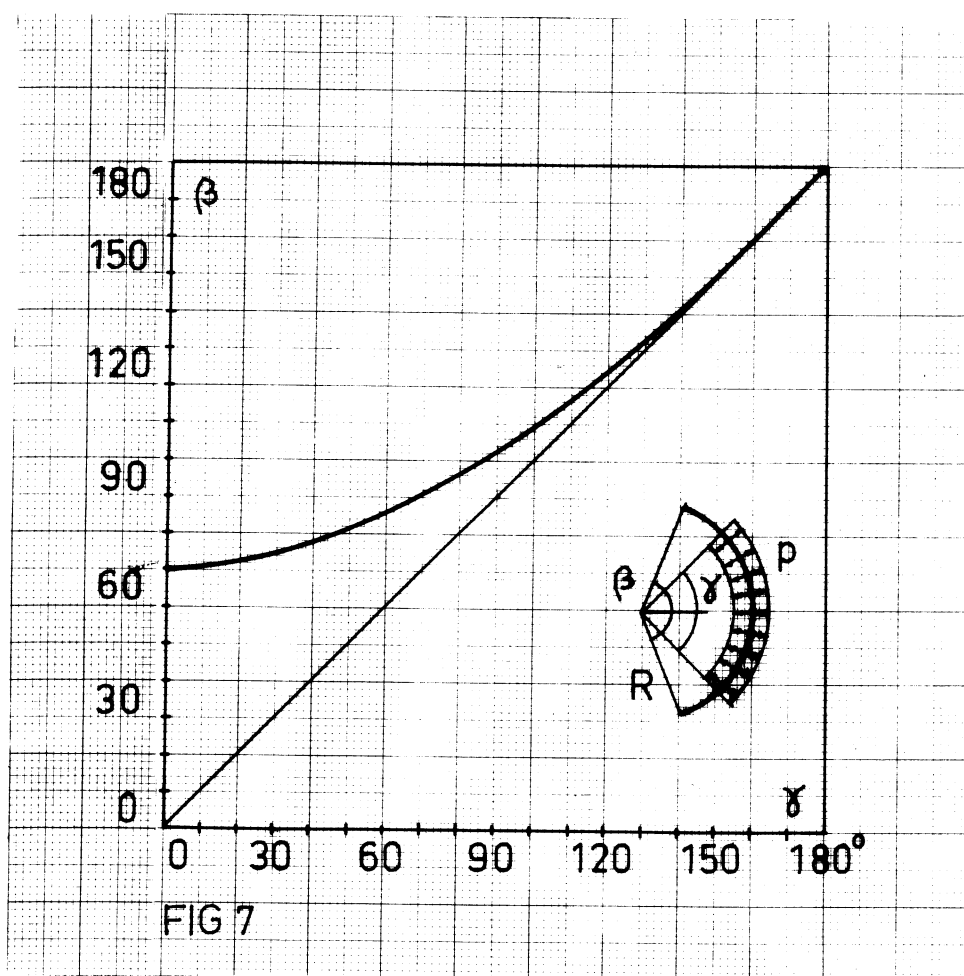
$$\begin{cases} 1 - 3 \sin^2 \beta/2 \leq 0 \\ \beta \geq 70.53^\circ \end{cases} \quad (5.3)$$

Detta värde sammanfaller med den största avvikelser från sprickspetsplanet som den troliga utbredningsriktningen enl. (3.33) kan nå.

För det partiella inre övertrycket ger (3.30) och (3.31) att sprickspetsen sluts när

$$\cos^2 \beta/2 \cdot \arctan \frac{\sin \gamma + \sqrt{(\cos \gamma - \cos \beta)(1 - \cos \gamma)}}{\cos \gamma - \cos \beta + \sqrt{(\cos \gamma - \cos \beta)(1 + \cos \gamma)}} - \sqrt{(\cos \gamma - \cos \beta)(1 - \cos \gamma)} \leq 0 \quad (5.4)$$

I fig 7 finns de värden på β när spetsen sluts inritade som funktion av belastningsvinkeln γ . Det framgår att värdet på β ändras mycket litet för $0 < \gamma < 30^\circ$ och att för stora värden på γ , säg $\gamma > 120^\circ$, gasen måste fylla ut sprickan nästan helt för att spetsen inte skall slutas.



Den vinkel vid vilken spetsarna på en cirkelbåg-spricka under partiellt inre övertryck sluts som funktion av belastningsvinkeln.

5.2. Jämförelse med den plana sprickan

Kurvorna i fig 3 visar mot den linjära brottmekanikens initieringsvillkor

$$K_I, K_{\varphi_0} \geq K_{Ic} \quad (5.5)$$

att det krävs ett större tryck p_c för att cirkelsprickans tillväxt skall initieras jämfört med den plana sprickan vare sig tillväxten sker i den mest troliga riktningen ($k_{\varphi} < 1$) eller på något sätt kan bringas fortsätta längs cirkelperiferin ($k_I < 1$). Se fig. 8.

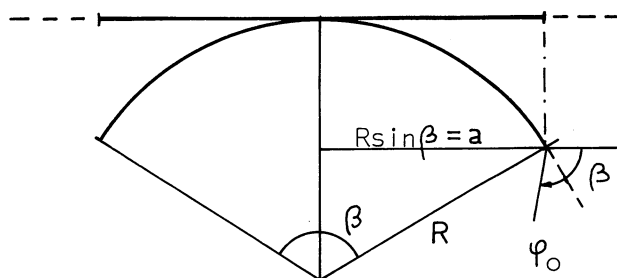


Fig. 8. Jämförelse med den plana sprickan

Fig. 5 däremot visar att för $\beta < 48^\circ$ krävs det mindre kraft F för initiering av cirkelbågsprickan i den mest troliga riktningen ($k_{\varphi} > 1$) än att initiera tillväxt för den plana sprickan båda utsatta för centralt verkande krafter. För tillväxt längs cirkelperiferin krävs däremot större kraft ($k_I < 1$).

Fig 4 och 6 visar att den plana sprickans tillväxt i sprickspetsplanets riktning är stabil i den meningen att: om en geometrisk avvikelse kan beskrivas med cirkelbågsprickan så strävar denna att plana ut i bägge belastningsfallen då $\varphi_0 < 0$. Sprickan är stabilare för centralt angripande krafter då $\varphi_0(\beta) < -\beta$ medan för inre övertryck gäller $\varphi_0(\beta) > -\beta$.

5.3. Jämförelse med vinkelsprickan och förhållandena vid pallsprängning

Man kan rimligen förvänta att resultaten för cirkelbågsprickan överensstämmer väl med den för vinkelsprickan när β är liten, se fig. 9.

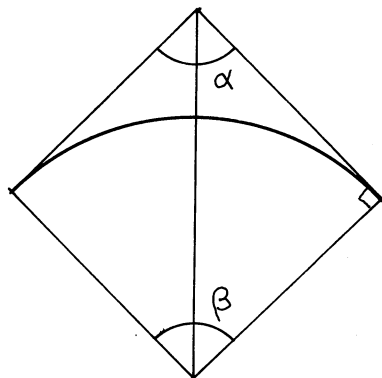


Fig. 9. Jämförelse med vinkelsprickan

Låt oss utnyttja denna analogi och övriga kunskaper om sprängningsförloppet för att dra några slutsatser om detta. Se fig. 10. Efter detonationen av en laddning i ett cylindriskt borrhål bildas ett större antal korta radiella sprickor varav ungefär fem når en större längd, se Persson, Lundborg och Johansson /12/. Dessa växer under inverkan av den tangentiella dragspänningen som utbildas ett stycke bakom stötvågsfronten. Informationen om att det finns en fri yta i närheten når sprickorna med den mot denna reflekterade stötvågens ankomst. Överläggningar av Field och Pedersen /13/ visar att sprickorna då borde ha en längd på ca 0.25-0.50 ggr försättningen och att den reflekterade stötvågen favoriserar tillväxten av de sprickor vilkas utbredningsriktning ligger närmast parallellt med vågfronten. Under den fortsatta tillväxten uppstår då en geometri som alltmer liknar vinkelsprickan men i närvaro av en fri yta.

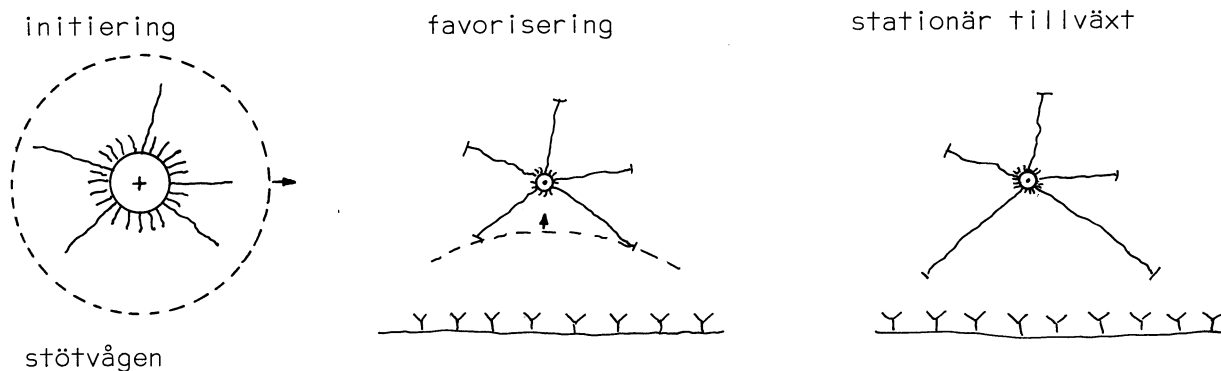


Fig. 10. Olika faser i ett pallsprängningsförlopp

Då det är troligt att gasen stannar mycket nära borrhålet under sprickutbredningsfasen, se Ouchterlony /14/, påverkas den troliga utbredningsriktningen av följande fyra faktorer där statistiska beräkningar förutsätts kunna användas och olika effekter superponeras:

1. Vinkelformen på sprickan medför en tendens för sprickan att plana ut som räkningarna visat, se avsnitt 4.2.
2. Gasen verkar ungefär som centralt angripande krafter och därmed kan det också finnas en minsta utslagsvinkel.
 $2\alpha_{\min} \approx 40^\circ$ för cirkelbågsprickan, se avsnitt 4.3.
3. Närvaron av de korta radiella sprickorna under den stationära tillväxten motverkar tendensen för sprickan att plana ut så länge dessa ej är små i St. Venants mening, i praktiken kanske $< 1/3$ av huvudsprickorna. Någon tendens att plana ut finns inte alls när alla sprickorna är lika långa vilket de är innan den stationära tillväxten, se Ouchterlony /15/.
4. Den fria ytan motverkar också vinkelsprickans tendens att plana ut, se Ouchterlony /8/. Då förhållandet mellan sprickspetsarnas avstånd till den fria ytan och halva avståndet mellan sprickspetsarna bör vara av storleksordningen ett eller mindre under den stationära tillväxten bör bidragen 3 och 4 kunna uppväga tendensen att plana ut pga. vinkelformen. Effekten av den fria ytan ökar ju närmare sprickspetsarna kommer denna medan de kortare radiella sprickornas inverkan minskar. Det är inte bekant hur den fria ytan påverkar $\alpha_{\min}$.

Avsikten är att i kommande rapporter dels behandla själva vinkelsprickan och undersöka i vad mån analogin mellan denna och cirkelbågsprickan är giltig för större värden på β , dels undersöka hur den fria ytan påverkar brottbenägenheten med hänsyn tagen till hur gasvolymen ändras.

6. REFERENSER

1. Muskhelishvili, N. I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity.-
Nordhoff, Groningen (1953), (1963).

2. Sih, G.C.,
Paris, P.C.,
Erdogan, F. Crack-Tip, Stress-Intensity Factors for Plane Extension and Plate Bending Problems.-
J. Appl. Mech., vol 29 s 306-312 (1962).

3. Persson, A. Plana tillstånd inom elastomekaniken.-
CTH inst. för hållf. publ. nr 17,
(1965).

4. Bowie, O.L. Rectangular Tensile Sheet with Symmetric Edge Cracks.-
J. Appl. Mech., vol 31 s 208-212 (1964).

5. Andersson, H. Stress Intensity Factors at the Tips of a Star-Shaped Contour in an Infinite Tensile Sheet.-
J. Mech. Phys. Solids, vol 17 s 405-417 (1969).

6. Barenblatt, G.I. Prikl. Mat. Mech., vol 26 nr 2 (1962).

7. Sih, G.C.,
Liebowitz, H. Mathematical Theories of Brittle Fracture.-
Fracture: An Advanced Treatise, vol 2 Mathematical Fundamentals, ed H. Liebowitz s 68-192 - Academic Press N.Y. (1968).

8. Ouchterlony, F. Spänningstillståndet kring en helt eller delvis gasfylld plan spricka som ligger längs en fri yta.-
Rapport DS 1971:22.

9. Jaeger, J.C.,
Cook, N.G.W. Fundamentals of Rock Mechanics.-
Kap 10.12., Methuen London (1969).

10. Ouchterlony, F. Diskussion om sprickutbredning för en plan spricka i ett sprött material under inverkan av ett inre gastryck.-
Rapport DS 1972:4.

11. Rice, J.R. Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture.-
Fracture: An Advanced Treatise, vol 2
Mathematical Fundamentals, ed
H. Liebowitz s 192-314 - Academic Press
N.Y. (1968).
12. Persson, P.A.,
Lundborg, N.,
Johansson, C.H. The Basic Mechanisms in Rock Blasting.-
Proc. Sec. Congr. Int. Soc. Rock.
Mechanics, Subject 5 no 3, Beograd
(1970).
13. Field, J.E.,
Ladegaard-Pedersen, A. The Importance of the Reflected Stress
Wave in Rock Blasting.-
Int. J. Rock. Mech. Min. Sci., vol 8
s. 213-226 (1971).
14. Ouchterlony, F. Beräkning av spricklängdens variation
med håldiametern vid konstant spräng-
ämnesmängd per meter.-
IVA rapport nr 38, s 115-129, Stockholm
(1971).
15. Ouchterlony, F. Brottmekanik och sprickor i berg.-
Rapport DS 1970:49.