

DISKUSSION OM SPRICKUTBREDNING FÖR EN
PLAN SPRICKA I ETT SPRÖTT MATERIAL UNDER
INVERKAN AV ETT INRE GASTRYCK.

Finn Ouchterlony

DS 1972:4

16.2.1972

STIFTELSEN
SVENSK DETONIKFORSKNING
SWEDISH DETONIC RESEARCH FOUNDATION

VINTERVIKEN — 117 48 STOCKHOLM
SWEDEN

DISKUSSION OM SPRICKUTBREDNING FÖR EN
PLAN SPRICKA I ETT SPRÖTT MATERIAL UNDER
INVERKAN AV ETT INRE GASTRYCK.

Finn Ouchterlony

DS 1972:4

16.2.1972

Sammanfattning

Rapporten innehåller en diskussion av några olika aspekter på sprickutbredning för en plan spricka i ett sprött material under inverkan av ett inre gastryck. Med utgångspunkt från litteraturen diskuteras skillnaden mellan två sprickmodeller, energibalansvillkoret för spricktillväxt och två initieringsvillkor samt några olika rörelse-ekvationer för sprickan. En jämförelse leder till att den rörelse-ekvation som grundar sig på en dynamisk lösning och ett lokalt energibalansvillkor bör vara den bästa, vilket gör att användningen av brottmekanikens initieringsvillkor för spricktillväxt bör kunna användas för att beräkna spricklängden.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1. Inledning

2. Teckenförklaring

3. Diskussion

3.1 Den linjära brottmekanikens och Barenblatts modeller

3.2 Energibalansvillkoret för spricktillväxt

3.3 Sprickans rörelseekvation ur energibalansvillkoret

3.4 Sprickans rörelseekvation ur Lagrangeformalismen

3.5 Diskussion om dynamiska lösningar

3.6 Sprickans rörelseekvation ur Brobergs lösning

3.7 Jämförelse mellan de olika rörelseekvationerna

4. Referenser

1. Inledning

Vid tidigare studier av sprickutbredningen kring ett borrhål, t.ex. /7/, /16/ och /31/ har Griffiths villkor för initiering av spricktillväxt på brottmekanikens skrivsätt använts för att bestämma när sprickutbredningen slutar. I /7/ användes både ett lokalt och ett globalt villkor vilka gav samma resultat. Avsikten med rapporten är att klarare belysa bakgrunden till de villkor för beräkning av spricklängden som använts.

Inledningsvis diskuteras skillnaden mellan den linjära brottmekanikens och Barenblatts modeller för en spricka då den sistnämnda ger en mer realistisk bild av tillståndet i sprickspetsen. Vidare diskuteras energibalansvillkoret för spricktillväxt och den likhet mellan det globala och det lokala initieringsvillkoret som detta leder till. Möjligheten att beräkna gasvolymen i en spricka om spänningsintensitetsfaktorn är känd noteras.

Huvuddelen av rapporten omfattar en presentation av olika möjligheter att erhålla sprickans rörelseekvation och en diskussion av dessa för att utröna vilken som bör ge den bästa uppskattningen av när sprickutbredningen slutar. De olika sätten är dels kvasistatiska och grundar sig då på resp. Lagrangeformalismen och som ett specialfall ett globalt energibalansvillkor, dels dynamiska och grundade på resp. ett globalt och ett lokalt energibalansvillkor. En jämförelse leder till att den rörelseekvation som härletts ur Brobergs lösning för en spricka som rör sig med en konstant hastighet och det lokala energibalansvillkoret bör vara bäst. Den leder till att omvändningen av brottmekanikens initieringsvillkor kan användas för beräkning av när spricktillväxten upphör - spricklängden vid sprängning t.ex. som i /31/.

2. Teckenförklaring σ = spänningar $[N/m^2]$ ϵ = töjningar (r, θ) = polära koordinater U_x = lokalt i sprickspetsen frigjord energi $[Nm/m]$ G_{lc} = brottseghet $[N/m]$ K_{lc} = brottseghet, alternativ formulering $[N/m^{3/2}]$ K_I = spänningsintensitetsfaktor $[N/m^{3/2}]$ E = elasticitetsmodul $[N/m^2]$ ν = Poissons tal $\bar{K}$ = kohesionsmodul $[N/m^{3/2}]$ a = halva spricklängden $[m]$ $\dot{a}$ = anger tidsderivata $[m/s]$ p = gastryck $[N/m^2]$ R = radiemått W = yttre arbete, alla energier per m skivtjocklek $[Nm/m]$ U = lagrad elastisk energi K = kinetisk energi F = förlustenergi V = sprickvolym eller gasvolym $[m^3/m]$ n = antalet sprickor i en symmetrisk figur $index_0$ = anger begynnelsevärden $\mathcal{A}$ = konstant i gaslag av Poissontyp λ = konstant som uttrycker belastningstyp y = dimensionslös spricklängd relaterad till begynnelsevärdet ρ = densitet $[kg/m^3]$ k = konstant i uttryck för kinetisk energi C_L = utbredningshast. för den longitudinella vågen
i en stav $[m/s]$ β = dimensionslöst förhållande mellan brottsegheten
och gradienten för den lokalt frigjorda elastiska
energin innan utbredningen börjat $index_I$ = anger gränsen för sprickutbredningen q_k = generaliserad koordinat i Lagrangeformalismen L = Lagrangefunktion $[Nm/m]$ S = aktionsintegral t = tid $[s]$ b, f, g, h = funktioner av η η = dimensionslöst förhållande mellan spricklängden och den
longitudinella vågens utbredningsväg

x = längdkoordinat i sprickled [m]

v = dimensionslös hastighet, normaliserad mot
skjuvvågens utbredningshastighet

β_1, β_2 = funktioner av v

R, H, P = funktioner av v

C_1 = utbredningshastigheten för den longitudinella vågen
i en tjock platta [m/s]

C_2 = skjuvvågens utbredningshastighet [m/s]

C_R = Rayleighvågens utbredningshastighet [m/s]

k_0 = dimensionslöst förhållande mellan C_2 och C_1

K, E = fullständiga elliptiska integraler av första och
andra slaget

u_y = sprickans tvärdeformation [m]

α = dimensionslöst tal i uttryck för den kinetiska energin

f_v, f_x = funktioner som uttrycker hastighetsberoende

SPRICKUTBREDNING FÖR EN PLAN SPRICKA I ETT SPRÖTT MATERIAL
UNDER INVERKAN AV ETT INRE GASTRYCK.

3. Diskussion

3.1. Den linjära brottmekanikens och Barenblatts modeller

Spännings- och töjningstillståndet kring en spricka i ett linjärt elastiskt material är singulärt i sprickspetsen. Både spänningar och töjningar kan där skrivas, $\sigma, \epsilon \propto r^{-1/2} f(\theta)$ där (r, θ) är polära koordinater kring denna. Den ursprungligen skarpa spetsen får i det belastade tillståndet parabolisk form. Detta är orimligt från hållfasthetsfysikalisk synpunkt och lösningen kan alltså inte gälla i närheten av spetsen vilket är besvärande då det är där som brottprocessen äger rum.

I den linjära brottmekaniken kringgår man denna svårighet genom att som Griffith anta att det krävs energi för att bilda nya ytor. Denna energi utgörs dels av ren ytenergi dels av plastiskt deformationsarbete och för att ändå kunna använda den singulära lösningen förutsätts den plastiska delen begränsad till ett litet område kring sprickspetsen. Studerar man energibalansen i sprickspetsen leder detta, se t.ex. Carlsson /1/, till att brott kan ske om ändringen av den lokalt frigjorda elastiska energin U_x överstiger brottsegheten G_{Ic} som uttrycker den energi som behövs för att bilda nya ytor.

$$-\frac{dU_x}{da} \geq G_{Ic} \quad (3.1)$$

Ovanstående uttryck gäller vid plant deformationstillstånd.

Detta villkor kan också uttryckas med spänningsintensitetsfaktorn K_I där

$$-\frac{dU_x}{da} = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \quad (3.2)$$

som ett kritiskt värde för K_I , K_{Ic} där

$$K_I \geq K_{Ic} \quad (3.3)$$

Barenblatt /2-3/ valde att införa en kohesionsspänningsfördelning vid sprickspetsen som för en spricka i jämvikt precis balanserar den singulära lösningens deformationsbidrag och gör spetsen skarp. Spänningarna i sprickspetsen blir ändliga. Genom att anta att storleken av det område vid sprickspetsen där kohesionsspänningarna verkar är oberoende av spricklängd och belastning leder de övriga antagandena till att en materialegenskap den s.k. kohesionsmodulen $\bar{K}$ införs. Sprickan kommer att utbreda

sig när spänningsintensitetsfaktorn K_I som är proportionell mot den pålagda lasten blir så stor att kohesionsspänningarna inte förmår kompensera singulariteten. Brottvillkoret lyder

$$K_I \geq \bar{K}\sqrt{\pi} \quad (3.4)$$

Ett liknande resonemang kan föras för en spricka som rör sig med konstant hastighet, $\bar{K}$ blir då beroende av hastigheten.

Broberg /4/ påpekar att om man i Griffithmodellen postulerat en autonom sprickspets som Barenblatt gjort i sin modell skulle man därur kunnat sluta sig till existensen av en ytenergi. Willis /5/ och Rice /6/ har visat att de bägge brottvillkoren är lika om än inte i strikt mening då kohesionsmodulen $\bar{K}$ också är förknippad med en ytenergi. Willis drar slutsatsen att det inte innebär någon större fördel att använda Barenblatts modell för att studera spricktillväxt. Fördelen med den är att den ger en mer realistisk bild av spänningstillståndet vid sprickspetsen.

Materialstorheterna står i relation till varandra genom

$$\bar{K}\sqrt{\pi} = K_{Ic} = \sqrt{\frac{EG_{Ic}}{1-\nu^2}} \quad (3.5)$$

där elasticitetsmodulen E och Poissons tal ν beskriver materialet i området utanför sprickspetsen.

Mot bakgrund av denna inledning skall energibalanskriteriet för spricktillväxt diskuteras närmare.

3.2. Energibalanskriteriet för spricktillväxt

I en föregående rapport /7/ där sprickutbredningen kring ett borrhål diskuterades användes dels ett lokalt energibalansvillkor dels ett globalt sådant för att bedöma om spricktillväxt var möjlig eller ej. De två villkoren var identiska för den plana sprickan i ett oändligt material. I det följande utvidgas diskussionen på bas av en artikel av Erdogan /8/.

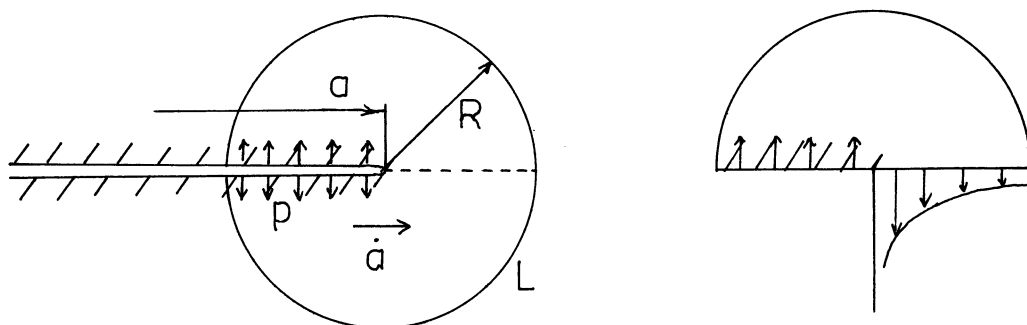


Fig. 1. Sprickspets till en spricka utsatt för inre övertryck.

Låt oss betrakta en sprickspets som utbreder sig med hastigheten $\dot{a}$ i sprickplanet, fig. 1. Erdogan framhåller att begränsningen av det område för vilket ett energibalansvillkor gäller är godtycklig så länge den innehåller sprickspetsen där den irreversibla energiomsättningen sker. För en spricka som växer med konstant hastighet lyder villkoret

$$\dot{W} = \dot{U} + \dot{K} + \dot{F} \quad (3.6)$$

Ändringen i de yttre krafternas arbete på L, $\dot{W}$ skall vara lika stor som summan av ändringarna i den elastiska energin $\dot{U}$, den kinetiska energin $\dot{K}$ och de irreversibla förlusterna $\dot{F}$.

Begränsningslinjen förutsätts röra sig med sprickspetsen, materialet antas vara rent elastiskt och förlusterna äga rum inom ett område

$\ll R$. Erdogan anger att då blir termer i (3.6) som beror av begränsningslinjens rörelse små.

Liksom för det lokala energivillkoret i /7/ kan man beräkna den vid sprickspetsen lokalt frigjorda elastiska energin U_x ur snittkrafternas relaxation. Jfr. t.ex Carlsson /1/ s 81 och Erdogan /8/

s 523. Att energi frigörs inser man av att krafterna uträttar ett arbete mot förskjutningarna. För halva området R i fig 1 gäller då energibalansvillkoret

$$\frac{1}{2} \dot{W} + \frac{1}{2} \dot{U}_x = \frac{1}{2} \dot{U} + \frac{1}{2} \dot{K} \quad (3.7)$$

En direkt jämförelse mellan (3.6) och (3.7) ger att för sprickor som växer med en konstant hastighet är ändringen i den lokalt frigjorda energin lika stor som ändringen av de irreversibla förlusterna

$$-\dot{U}_x = \dot{F} \quad (3.8)$$

vilket stämmer med t.ex. Cherepanovs formulering /9/. Erdogan kommenterar att (3.8) i strikt mening endast gäller idealt spröda material för vilka förluster enbart i form av ytenergi förekommer men att med samma rätt som Orowan och Irwin utvidgade Griffiths modell till att gälla för normalt spröda material i den linjära brottmekaniken gäller sambandet för den dynamiska spricktillväxten i dessa material.

I gränsen när $\dot{a} \rightarrow 0$ erhålles på brottmekanikens skrivsätt

$$\lim_{\dot{a} \rightarrow 0} \left(-\frac{\dot{U}_x}{\dot{a}} \right) = -\frac{dU_x}{da} = G_{Ic} \quad (3.9)$$

vilket är jämförbart med (3.1).

Ur (3.7) erhålles efter en likadan gränsövergång

$$\frac{dW}{da} - \frac{dU}{da} = -\frac{dU_x}{da} \quad (3.10)$$

Den kinetiska energins bidrag är försumbart i (3.10) p.g.a. antagandet om en konstant hastighet. Högerledet i (3.10) är oberoende av begränsningen L som godtyckligt kan väljas att omfatta hela sprickan, se fig 2 för en plan spricka.

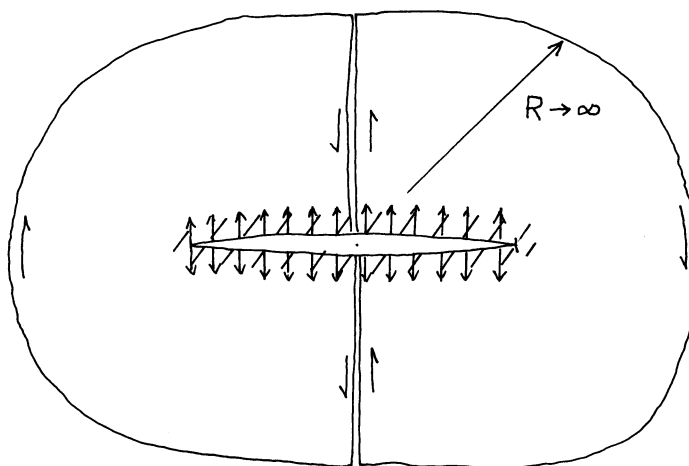


Fig. 2. Den globala konturen för den plana sprickan.

Om U nu betyder hela kroppens elastiska energi erhålles för ett spricksystem med n st likvärdiga spetsar när belastningen utgörs av ett inre övertryck där V är gasvolymen.

$$p \frac{dV}{da} - \frac{dU}{da} = -n \frac{dU}{da} \quad (3.11)$$

Detta uttryck visar allmänt likheten mellan det lokala och det globala energibalansvillkor för spricktillväxt som använts i /7/. Det kan väntas ge en god uppfattning om initiering av spricktillväxt från ett jämviktstillstånd. Däremot bör en uppskattning av när en växande spricka stannar vara behäftad med större fel då accelerations-termer försumrats och vågutbredningsfenomen inte alls är medtagna.

För att få underlag för en diskussion om detta skall rörelseekvationen för en plan spricka under inverkan av ett inre gastryck studeras.

Först bör i alla fall påpekas att (3.11) kan användas för att beräkna den elastiska energin i en kropp med sprickor om spänningsintensitetsfaktorererna är kända. Då

$$U = \frac{1}{2} pV \quad (3.12)$$

ger (3.2), (3.11) och (3.12)

$$U(a) - U(a_0) = n(1-\nu^2)/E \int_{a_0}^a K_I^2(a) da \quad (3.13)$$

som kan utnyttjas även när spricksystemet inte är fullt med gas, (3.12) ger sedan gasvolymen V om så önskas.

3.3 Sprickans rörelseekvation ur energibalanskriteriet

Det finns många artiklar som med utgångspunkt från ett energibalansvillkor och statiska lösningar för den elastiska energin behandlar en kropp med en spricka. Somliga diskuterar endast initiering av spricktillväxten såsom Griffith gjort medan andra också ställer upp en rörelseekvation för sprickan. Både klyvsprickor som studerats med balkteorin och sprickor i oändligt material har behandlats. Exempel på artiklar som behandlar initiering av sprickor i oändligt material är Bowies /10/ och Kutters /11/, Benbow och Roesters /12/ däremot tar upp klyvsprickor.

För att kunna ställa upp rörelseekvationen måste man ha ett uttryck för den kinetiska energin vilket för klyvsprickan tas från balkteorin. Mott /13/ var den förste som ställde upp ett sådant för den plana sprickan i ett oändligt material. Berry /14/ har studerat den plana sprickan och klyvsprickan, båda under inverkan av konstant kraft resp. konstant deformation.

I de följande skall vi ställa upp rörelseekvationen för en plan spricka under inverkan av ett variabelt inre övertryck. Fig. 3 definierar sprickgeometrin, plant deformationstillstånd antas råda. Låt oss först studera fallet när gasen fyller ut sprickan helt.

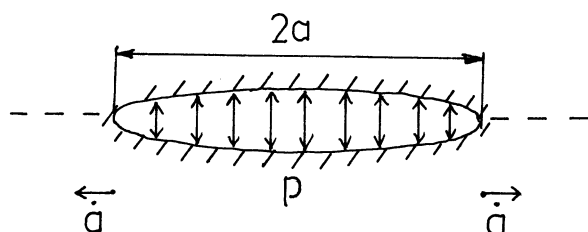


Fig. 3. En plan spricka som tillväxer p.g.a. inre övertryck.

De statiska uttrycken för de aktuella storheterna finns t.ex. i /7/ och gäller per m skivtjocklek. Sprickvolymen V ges av

$$V = \frac{2\pi(1-\nu^2)}{E} p a^2 \quad (3.14)$$

Om index κ anger begynnelsestillståndet kan den elastiska energin U ur (3.12) skrivas med (3.14)

$$U = \frac{1}{2} p_0 V_0 (p/p_0)^2 (a/a_0)^2 \quad (3.15)$$

Gasens tillstånd antas följa en gaslag av Poissontyp under sin expansion

$$p_0 V_0^\kappa = p V^\kappa \quad (3.16)$$

Denna och uttrycket för volymen i (3.14) ger alternativa formuleringar

$$\begin{cases} p/p_0 = (a/a_0)^{-2\kappa/(\kappa+1)} \\ V/V_0 = (a/a_0)^{2/(\kappa+1)} \end{cases} \quad (3.17)$$

För alla verkliga gaser är $\kappa > 1$ men (3.16) innehåller också som specialfall Berrys /14/ belastningsfall. Innebörden av olika κ -värden är:

- $\kappa \rightarrow \infty$ konstant volym eller konstant moment
- $\kappa > 1$ expansionen hos verkliga gaser
- $\kappa = 1$ isotherm expansion eller konstant sprickbredd
- $\kappa = 0$ konstant tryck

Ytterligare ett sätt att belysa innebörden av κ är genom det arbete gasen uträttar. Det utifrån tillförda arbetet mellan två tillstånd i tänkt jämvikt är

$$W - W_0 = \int_{V_0}^V p dV \quad (3.18)$$

Utnyttjas gaslagen erhålles

$$W - W_0 = \begin{cases} \frac{p_0 V_0}{\kappa - 1} [1 - (V_0/V)^\kappa] & \kappa \neq 1 \\ p_0 V_0 \ln(V/V_0) & \kappa = 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

och följaktligen innebär de olika κ -värdena:

- $\kappa \rightarrow \infty$ ingen energi tillförs som yttre arbete
- $\kappa > 1$ en begränsad energimängd tillförs
- $\kappa \leq 1$ obegränsad energi tillförs

Om spricklängden görs dimensionslös

$$y = a/a_o \quad (3.20)$$

och en konstant λ införs

$$\lambda(\lambda) = 2(\lambda - 1)/(\lambda + 1) \quad (3.21)$$

så kan den elastiska energin och det yttre arbetet skrivas, $\lambda \neq 1$

$$\begin{cases} U - U_o = \frac{1}{2} p_o V_o (y^{-\lambda} - 1) \\ W - W_o = \frac{p_o V_o}{\lambda - 1} (1 - y^{-\lambda}), \quad \lambda \neq 1 \end{cases} \quad (3.22)$$

Den elastiska energin U beror av λ såsom W . De irreversibla förlusterna blir

$$F - F_o = 2G_{lc} a_o (y - 1) \quad (3.23)$$

Med Motts /13/ uttryck för den kinetiska energin

$$K = (k \rho / 2E^2) p_o^2 a_o^2 \dot{a}^2 \quad (3.24)$$

där konstanten k utvärderats av Roberts och Wells /15/ vid plant spänningstillstånd och $\nu = 0.25$

$$k = 2\pi/(0.38)^2 \quad (3.25)$$

kan den kinetiska energin uttryckas

$$K = \frac{p_o V_o}{0.27} y^{-\lambda} (\dot{a}_o / C_L)^2 \quad (3.26)$$

där $C_L^2 = E/\rho$ är den longitudinella vågens hastighet i en stav. Energibalansvillkoret kan formuleras som i (3.6)

$$\dot{W} = \dot{U} + \dot{K} + \dot{F} \quad (3.6)$$

vilket ger rörelseekvationen

$$2y\ddot{y} - \lambda\dot{y}^2 = 0.27 (C_L/a_o)^2 [1 - \beta y^{\lambda+1}] \quad (3.27)$$

där β är en dimensionslös konstant som uttrycker förhållandet mellan arbetet att bilda ursprungsprickan och gasens begynnelseenergi

$$\beta = 2G_{lc} a_o / p_o V_o \quad (3.28)$$

Uttrycken (3.2) och (3.14) ger ännu en tolkning då $K_I = p\sqrt{\pi a}$ för den plana sprickan

$$\beta = G_{lc} / \left(- \frac{dU}{da} \right)_+ = 0 \quad (3.29)$$

Dvs. $\beta < 1$ är brottmekanikens villkor för initiering av spricktillväxt, jfr (3.1). Samma villkor ger (3.27) om accelerationen vid $t = 0$ beräknas. $y(0) = 1$ och $\dot{y}(0) = 0$.

$$\ddot{y}(0) = 0.135 (C_L/a_0)^2 (1-\beta) \quad (3.30)$$

Den enda lösning till rörelseekvationen som kan existera för en stationär spricka $\dot{y}, \ddot{y} = 0$ är

$$y_1 = \beta^{-1/(\lambda+1)}, \lambda > -1 \quad (3.31)$$

vilken är just det villkor som används i /7/ för att avgöra när spricktillväxten upphör. Jfr. (3.31) med /7/ ekv (18).

I stället för att integrera rörelseekvationen (3.27) vilket ger $\dot{y}(y)$ används energibalansvillkoret på integrerad form

$$\dot{W} - (U+K+F) = W_0 - (U_0 + K_0 + F_0) \quad (3.32)$$

Låt oss som begynnelsevillkor välja ett statiskt jämviktsläge där $\dot{y}(0) = 0$ och $\beta < 1$ om något sådant nu är fysikaliskt möjligt. Insättning av uttrycken för storheterna i (3.32) ger då $\dot{a} = \dot{y}a_0$

$$\dot{a} = \begin{cases} 0.52 C_L [(1/\lambda + \beta)y^\lambda - 1/\lambda - \beta y^{\lambda+1}]^{1/2}, \lambda \neq -1 \\ 0.52 C_L [\ln y - \beta(y-1)]^{1/2}, \lambda = -1 \end{cases} \quad (3.33)$$

Dessa uttryck är värda närmare diskussion mot innebörden av olika λ eller λ värden

a. $\lambda \leq -1, \lambda \leq 1/3$

En obegränsad energimängd tillförs som yttre arbete men i samma takt ökar kroppens elastiska och kinetiska energi. Balansen mellan de olika energierna medför att sprickans tillväxthastighet har en övre gräns som är oberoende av ytenergin när $\lambda < -1$. Denna blir då snart försumbar, däremot inte när $\lambda = -1$.

För ett konstant tryck p_0 t.ex. ger (3.33) då $\lambda = 0$ och $\lambda = -2$

$$\dot{a} = 0.38 C_L [(1-a_0/a)[1-(2\beta-1)a_0/a]]^{1/2} \quad (3.34)$$

Gränshastigheten blir i detta fall $\dot{a}_x = 0.38 C_L$, (3.33) ger allmänt

$$\dot{a}_x = \begin{cases} 0.52 C_L / |\lambda|^{1/2} & \lambda < -1 \\ 0.52 C_L (1-\beta)^{1/2} & \lambda = -1 \end{cases} \quad (3.35)$$

och det största värdet är $\dot{a}_x = 0.52 C_L$. För att gastrycket skall vara konstant när volymen ökar måste mer gas tillföras systemet.

b. $-1 < \lambda < 0, 1/3 < \mathcal{R} < 1$

Detta $\mathcal{R}$ -intervall svarar inte mot någon belastningsform, men även här uträttar gasen ett obegränsat expansionsarbete och balansen mellan energierna medför en övre gräns för tillväxthastigheten. Denna kan aldrig uppnås om inte $\beta = 0$ och sprickan stannar så småningom då tillförseltakten för expansionsarbetet avtar snabbare än gradienten för ytenergin. Gränshastigheten överstiger för små λ den longitudinella vågens hastighet C_L .

c. $\lambda = 0, \mathcal{R} = 1$

Den elastiska energin är konstant i det fall som svarar mot isoterm gasexpansion eller konstant sprickbredd. Gasen uträttar ett obegränsat expansionsarbete men sprickan stannar i alla fall när $\beta \neq 0$. (3.33) ger

$$\dot{a} = 0.52 C_L \left[\ln(a/a_0) - \beta(a/a_0 - 1) \right]^{1/2} \quad (3.36)$$

och här har sprickans tillväxthastighet ingen övre gräns.

d. $0 < \lambda < 2, \mathcal{R} > 1$

Det fall som svarar mot expansionen hos en verklig gas. Gasmängden är begränsad liksom expansionsarbetet och energibalansen innebär att sprickan slutar växa när tillförseln av energi i form expansionsarbete och elastisk energi inte räcker till för att täcka förlustenergin. Inte heller i detta fall har tillväxthastigheten en övre gräns, med (3.33)

$$\dot{a} = 0.52 C_L \left[1/\lambda [(a/a_0)^\lambda - 1] - \beta(a/a_0)^\lambda (a/a_0 - 1) \right]^{1/2} \quad (3.37)$$

Sprickan stannar när $\dot{a} = 0$ och om $\beta \ll 1$ som rimligen är fallet vid bergssprängning erhålles spricklängden approximativt ur

$$y_1 = a_1/a_0 \approx (\beta \lambda)^{-1} \quad (3.38)$$

Detta värde blir då avsevärt större än motsvarande för en stationär spricka (3.31).

Den adiabatiska expansionen hos en gas ger normalt värden på $1 < \mathcal{R} < 2$ men liksom en energitillförsel sänker $\mathcal{R}$ värdet (isoterm expansion) så höjer energi- och massförluster det effektiva $\mathcal{R}$ -värdet. Vid sprängning förekommer t.ex. värme-

förluster och utströmning ur ett borrhål i axiell led.

e. $\lambda = 2, \mathcal{R} \rightarrow \infty$

I gränsen när energiförlusterna hos gasen blir så stora att inget yttre arbete tillförs, vilket svarar mot konstant moment, ger (3.37)

$$\dot{a} = 0.38 C_L [(1+2\beta)(a/a_0)^2 - 1 - 2\beta(a/a_0)^3]^{1/2} \quad (3.39)$$

som i princip inte skiljer sig från (3.37)

I fig. 4 nedan visas två kurvor över $\dot{a}(a)$ dels en för konstant tryck dels en för en verklig gas med värden tagna ur /7/, $\mathcal{R} = 1.33$ och $\beta = 0.004$.

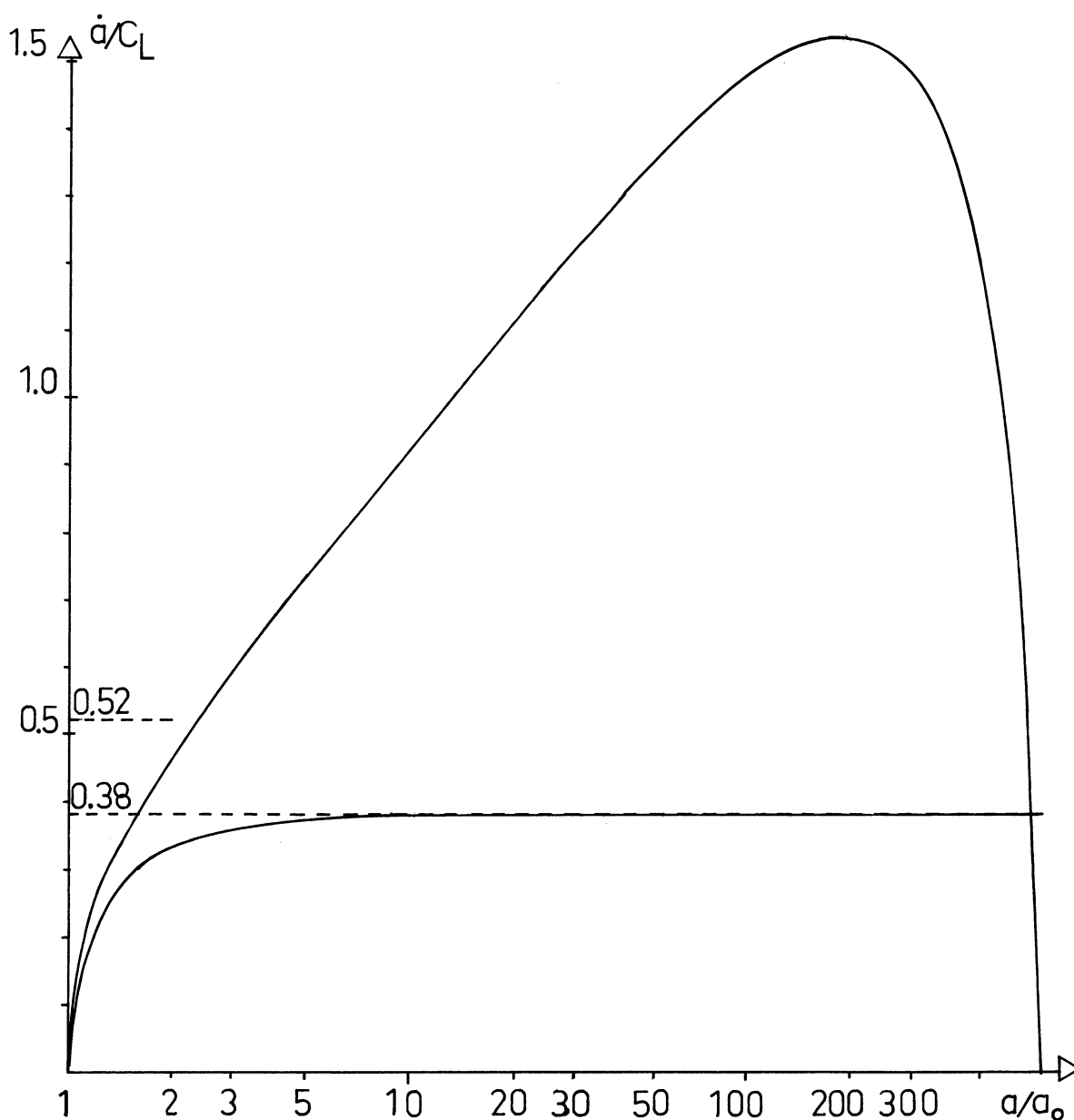


Fig. 4. Sprickans utbredningshastighet $\dot{a}$ som funktion av längden a dels för ett konstant tryck, nedre kurvan, dels för en verklig gas med $\mathcal{R} = 1.33$ och $\beta = 0.004$.

Av den förda diskussionen framgår svagheten i att använda statiska uttryck för spänningar och deformationer vilket ligger bakom Motts uttryck för den kinetiska energin. Den gränshastighet för spricktillväxten som erhålles grundar sig inte på vågfenomen utan är resultatet av balansen mellan de ingående energierna.

Man kan också anföra följande för ett dynamisk förlopp.

1. Vid $t = 0$ finns ingen (statisk) elastisk energi upplagrad i kroppen och den kan följaktligen inte vara energikälla i början av förloppet utan är då en sänka.
2. Man inser inte utan vidare att den kinetiska- och vågenergin som lagras i kroppen i ett oändligt material måste omsättas i form av ytenergi i sprickspetsen. Den kinetiska energin behöver inte vara noll när sprickan stannar.

Detta är förhållanden som bör påverka rörelseekvationen starkt när den tillgängliga energin är begränsad, dvs när $\mathcal{R} > 1$. För spröda material ökar brottsegheten dessutom med tillväxthastigheten.

Till sist skall en spricka där gasen inte följer med studeras

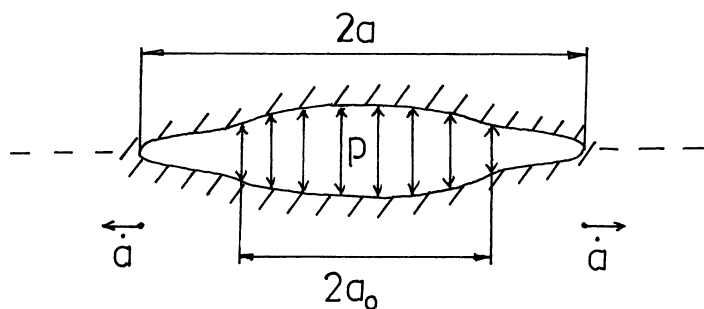


Fig. 5. En plan spricka till en del fylld med gas.

Geometrin framgår av fig. 5, vid tiden $t = 0$ antas gasen fylla ut sprickan helt. /16/ ger följande uttryck för gasvolymen

$$V = \frac{8(1-\nu^2)}{\pi E} p a_0^2 \left[(a/a_0)^2 \arcsin^2(a_0/a) + 2 \left[(a/a_0)^2 - 1 \right]^{1/2} \arcsin(a_0/a) - 2 \ln(a_0/a) \right] \quad (3.40)$$

som med (3.14) och (3.20) kan skrivas

$$V = (V_0/P_0)pf(y) \quad (3.41)$$

där

$$f(y) = 4/\pi^2 [y^2 \arcsin^2(1/y) + 2(y^2 - 1)^{1/2} \arcsin(1/y) + 2 \ln y] \quad (3.42)$$

Utnyttjas gaslagen (3.16) erhålles liksom (3.22)

$$\begin{cases} U - U_0 = \frac{1}{2} p_0 V_0 [f(y)^{-\lambda/2} - 1] \\ W - W_0 = \frac{p_0 V_0}{\lambda - 1} [1 - f(y)^{-\lambda/2}] \end{cases} \quad (3.43)$$

Förlusterna ges som förut av (3.23) och den kinetiska energin uttrycks med energibalansvillkoret (3.32)

$$K = p_0 V_0 \left[1/\lambda [1 - f(y)^{-\lambda/2}] - \beta(y-1) \right] \quad (3.44)$$

Om K antas ha samma form som Motts uttryck (3.24), $K \propto \dot{a}^2$ ger

(3.44) att sprickan stannar när $K = 0$, initiering av tillväxten sker om $\beta < 1$ som förut. För samma värden som använts i fig. 5, $\lambda = 1.33$ och $\beta = 0.004$ ger (3.44) ett värde på spricklängden som är 1/4 av det som (3.37) ger.

3.4 Sprickans rörelseekvation ur Lagrangeformalismen

Man kan också studera sprickans rörelse med Lagrangeformalismens metoder. Där införs s.k. generaliserade koordinater $q = \{q_k\}$ för att beskriva ett system. Impulslagen och uttryck för dels det arbete som yttre krafter uträttar dels det inre virtuella arbetet ger Lagranges ekvationer av andra slaget. Om systemet är konservativt, dvs. krafterna kan härledas ur potentialer som beror enbart av q och tiden t får dessa formen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots \quad (3.45)$$

där L är systemets Lagrangefunktion som i fallet med sprickan ges av

$$L(q; \dot{q}; t) = K(q; \dot{q}; t) + W(q; t) - U(q; t) - F(q; t) \quad (3.46)$$

Lagranges ekvationer kan också härledas direkt ur Hamiltons princip som säger att för den trajektor som systemet i verkligheten följer skall aktionsintegralen S ha ett minimum. Detta kan skrivas

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q; \dot{q}; t) dt = \min. \quad (3.47)$$

och (3.45) följer då direkt ur de s.k. Eulerska variationsekvationerna.

Särskilt kan man visa att om L inte beror explicit av tiden t så är Lagranges ekvationer jämförbara med energibalansvillkoret (3.6)

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \dot{W} - (\dot{K} + \dot{U} + \dot{F}) = 0 \quad (3.48)$$

Med utgångspunkt från Lagrangeformalismen finns det två möjligheter att göra dynamiska överläggningar för ett i princip statiskt system.

Man kan som Mott använda ett uttryck för den kinetiska energin, se (3.24) som innebär att materialet kring sprickan är stelt eller vilket är samma sak att ljudhastigheten i materialet är oändlig. Med den form som övriga energiuttryck för spricksystemet i 3.3 har inses att då leder energibalansvillkoret och Lagrangeformalismen till samma uttryck för sprickans rörelse. Dessutom kan man införa rörliga ränder genom att studera t.ex. en spricka i en remsa med ändlig bredd där bredden växer med tiden t .

Metoden med rörliga ränder och Lagrangeformalism har använts bl.a. av Steverding och Lehnigk /17-18/ och Steverding /19/ för att studera

hur sprickor påverkas av spänningspulser. Men inte heller denna metod tar upp problemets vågkaraktär, nämligen att ytorna i sprickspetsen inte utan vidare kan säras snabbare än Rayleighvågens hastighet i materialet. Steverding och Lehnig /20/ har också studerat en plan klyvsprickas rörelse-ekvation med utgångspunkt från impulsmomentlagen och som gränsfall tagit upp oändligt material. Konfigurationen är kvasistatisk liksom de här diskuterade. Den tar inte med rörliga ränder i tvärled och kan därför inte ge andra resultat än 3.3.

Låt oss studera en plan gasfylld spricka i ett cirkulärt område med fast inspänd rand. Cirkelytan representerar t.ex. området bakom en cirkulär stötvåg i det plana fallet och randen rör sig med den longitudinella vågens hastighet i materialet C_1 .

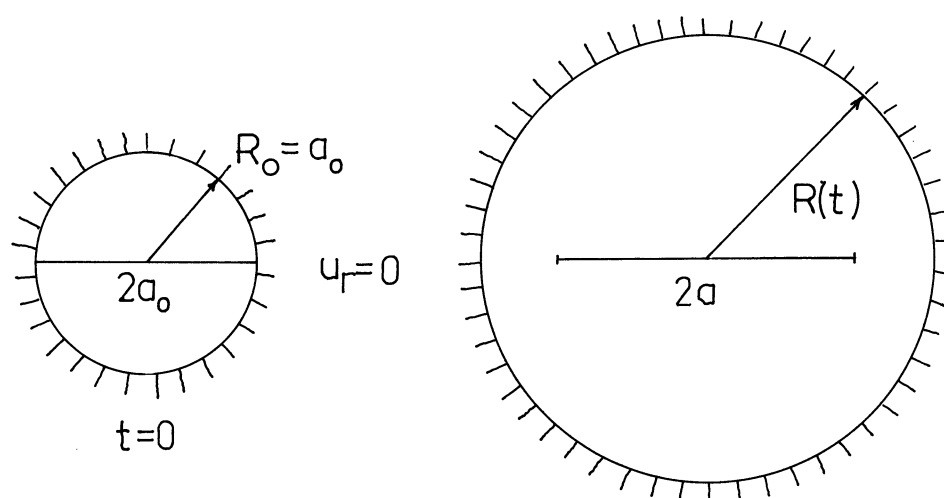


Fig. 6. Plan gasfylld spricka i ett cirkulärt område.

Spänningsintensitetsfaktorn K_I har rimligen följande form

$$K_I = p \sqrt{\pi a} \cdot \sqrt{f(a/R)} \quad (3.49)$$

där $f(0) = 1$ och $f(1) = 0$. När sprickspetsen är nära gränsytan torde $f(a/R) = 0$ ($1-a/R$). Räkningar av Hilton och Sih /21/ på ett laminerat material tyder på det. Uttryck (3.13) ger kroppens elastiska energi

$$\begin{cases} U = \frac{\pi (1-\nu^2) p^2 a^2}{E} \cdot g(a/R) \\ g(a/R) = 2a^{-2} \int_0^a af(a/R) da \end{cases} \quad (3.50)$$

och (3.12) gasvolymen om $\eta = a/R$, $\eta \in (0, 1]$

$$V = \frac{2\pi (1-\nu^2) p^2 a}{E} g(\eta) \quad (3.51)$$

Med begynnelsevärdet V_0 givet av (3.51) för $\eta = 1$ ger gaslagen (3.16) och (3.20)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V}{V_0} = y^{2/\lambda+1} [g(\eta)/g(1)]^{1/\lambda+1} \\ \frac{p}{p_0} = y^{-2\lambda/\lambda+1} [g(\eta)/g(1)]^{\lambda/\lambda+1} \end{array} \right. \quad (3.52)$$

så att för $\lambda \neq 1$ med $h(\eta) = g(\eta)/g(1)$

$$(W-U) - (W-U)_0 = \frac{p_0 V_0}{\lambda} [1 - y^{-\lambda} h(\eta)^{-\lambda/2}] \quad (3.53)$$

Innan sprickan börjat propagera, $\dot{a} = 0$ och $K = 0$ ger (3.45)

Griffithvillkoret för initiering av spricktillväxt

$$\frac{\partial (W-U)}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial a} \quad (3.54)$$

Med (3.53), (3.50) och (3.23) ger (3.54) initieringsvillkoret

$$y^{-(\lambda+1)} h(\eta)^{-(\lambda/2+1)} f(\eta)/g(1) = \beta \quad (3.55)$$

som inte är uppfyllt för $t = 0$ då $f(1) = 0$ och $g(1) \neq 0$.

Sprickan initieras inte med en gång utan först när R vuxit så att (3.55) uppfylls. Då $\beta \ll 1$ blir fördröjningen mycket liten.

Om uttrycket för den kinetiska energin antas ha samma form som i (3.26) med en faktor $k(\eta)$ som inte närmare studeras erhålles Lagranges rörelse-ekvation för sprickan.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \ddot{y} - \lambda \dot{y}^2 + (\eta \dot{y}^2 - 2\eta^2 C_L/a_0 \cdot \dot{y}) k'(\eta)/k(\eta) = \\ = 0.27(C_L/a_0)^2 [h(\eta)^{-(\lambda/2+1)} f(\eta)/g(1) - \beta y^{\lambda+1}] / k(\eta) \end{array} \right. \quad (3.56)$$

Uttrycket kan knappast integreras på sluten form. I gränsen när $R \gg a$, dvs $\eta \ll 1$ återfås (3.27). Då diskussionen i 3.3. visade att utbredningshastigheten inte har någon övre gräns när $\lambda \geq 0$ och $\beta = 0$ beräknas orten för $\dot{y}$ när $\ddot{y} = 0$ ur (3.56)

$$\dot{a} = \frac{\eta^2 k' C_L}{\eta k' - \lambda k} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{0.27 (\eta k' - \lambda k) b(\eta)}{\eta^4 k'^2}} \right] \quad (3.57)$$

där betydelsen av $b(\eta)$ framgår ur (3.56). När $(\eta k' - \lambda k) < 0$

saknar uttrycket mening då det medför $\dot{a} < 0$. Utbredningshastigheten har inget maximum och någon konstant hastighet för stora t är inte möjlig. För $(\eta k' - \lambda k) = 0$ ger (3.56) liknande resultat. När $(\eta k' - \lambda k) > 0$ erhålles ett värde på $\dot{a}$ som kan vara avsevärt större än den konstanta utbredningshastigheten ηC_L . Om $\lambda = 0$ kan den största hastigheten när $\eta \rightarrow 1$ vara två ggr detta värde. I vilket fall är värdena inte begränsade till den longitudinella vågens hastighet C_L och Lagrangeformalismen såsom den utnyttjats för att göra dynamiska överläggningar på ett statiskt system ger inget väsentligt nytt utöver vad energibalansvillkoret i 3.3 gav.

3.5 Diskussion om dynamiska lösningar

Utom i något undantagsfall gäller de lösningar av spännings-tillståndet kring en plan spricka som rör sig med belastningen i planet, mod.I, för konstant utbredningshastighet. För spröda material, dvs sådana där plastiska effekter försummas har bl.a. följande geometrier studerats:

- a. En spricka med konstant längd som rör sig längs x-axeln i ett oändligt material. Yoffe /22/.
- b. En halvoändlig spricka som rör sig längs x-axeln i ett oändligt material och vars spets vid tiden $t = 0$ befinner sig i $x = 0$. Craggs /23/.
- c. En spricka som rör sig längs x-axeln i ett oändligt material och som växer symmetriskt kring $x = 0$. Broberg /24/.

Belastningen utgörs i dessa fall av ett över sprickytan konstant tryck p eller vilket är samma sak en allsidig yttre dragspänning. Dessutom har följande problem studerats.

- d. En halvoändlig spricka i en remsa med oändlig bredd där randförskjutningarna i tvärled antas vara konstanta. Nilsson /25/.
- e. En halvoändlig spricka som vid tiden $t = 0$ börjar växa med en konstant hastighet under inverkan av en infallande plan longitudinell våg. Achenbach och Nüisner /26/.
- f. En symmetriskt växande spricka som i c, men där antingen systemets impuls eller dess energi är konstant. De antas tillförda momentant i origo vid tiden $t = 0$ och sprickranden obelastad. Afanasjev och Cherepanov /27/.

En sammanställning olika dynamiska lösningar som också täcker plastiska effekter har gjorts av Nilsson /28/.

Det gemensamma för lösningarna a-d är att gradienten för den i sprickspetsen lokalt frigjorda elastiska energin kan skrivas, jfr t.ex. Cherepanov /9/

$$-\frac{\dot{U}_x}{\dot{a}} = \frac{(1-\nu)^2}{E} K_I^2(v) \frac{v^2 \beta_I(v)}{4(1-\nu)R(v)} \quad (3.58)$$

där

$$\left\{ \begin{array}{l} R(v) = \beta_1(v) \beta_2(v) - (1 + \beta_2^2(v))^2/4 \\ \beta_1(v) = (1 - k_0^2 v^2)^{1/2} \\ \beta_2(v) = (1 - v^2)^{1/2} \\ v = \dot{a}/C_2, \quad k_0 = C_2/C_1 \end{array} \right. \quad (3.59)$$

och C_1 , C_2 betecknar den longitudinella resp. skjuvvågens utbredningshastighet i materialet. Uttryckets $R(v)$ nollställe svarar mot Rayleighvågens utbredningshastighet C_R . Man konstaterar vid en jämförelse med (3.2) och (3.9) att energigradienten $-\dot{U}_x/\dot{a}$ för en spricka som rör sig inte längre ges enbart av spänningsintensitetsfaktorn K_I . (3.58) innebär att sprickspetsens form också beror av utbredningshastigheten. Härav drar Willis /5/ slutsatsen att kohesionskrafternas fördelning i sprickspetsen beror av $\dot{a}$ och följaktligen att kohesionsmodulen också måste göra det. Med energibalansvillkoren (3.8) och (3.9) för en spricka som växer med konstant hastighet inses att (den kritiska) energigradienten är en mer fundamental storhet än både (den kritiska) spänningsintensitetsfaktorn och kohesionsmodulen.

Med (3.58) och resp. uttryck för $K_{I \text{ dyn}} = K_I(\dot{a})$ för geometrierna a-d erhålles

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I(\dot{a}) = K_I(0) = \text{konstant} \\ \lim_{\dot{a} \rightarrow C_R} (-\dot{U}_x/\dot{a}) = \end{array} \right. \quad (3.60 \text{ a,b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I(C_R) = 0 \\ \lim_{\dot{a} \rightarrow C_R} (-\dot{U}_x/\dot{a}) = 0 \end{array} \right. \quad (3.60 \text{ c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I(C_R) = 0 \\ -\dot{U}_x/\dot{a} = -\frac{dU_x}{da} = \text{konst.} \end{array} \right. \quad (3.60 \text{ d})$$

vilket innebär att för en spricka med konstant längd eller en halvoändlig spricka skulle ett allt mindre tryck behövas för spricktillväxten ju snabbare den sker. Annorlunda uttryckt, om en sprucken kropp har lagrat en mycket stor töjningsenergi vid spetsen så behövs nästan inget tryck för utbredningen. Se Rice /6/. Brobergs lösning är mer realistisk då den utgår från en kropp utan spricka och tillväxten liknar den hos naturliga sprickor. Även om man alltså kontinuerligt tillför energi vilket man måste göra för att hålla trycket konstant vid en ökande volym så har sprickans tillväxthastighet en övre gräns - Rayleighvågens hastighet C_R . Brobergs lösning har diskuterats bl.a. av Cotterell /29/, Kamei och Yokobori /30/ och Erdogan /8/. Nilssons lösning gäller för det fall att deformationen längs randen = 0 och torde vara värdefull vid experimentella studier av brottseghetens hastighetsberoende.

Brobergs lösning skall nu användas för den fortsatta diskussionen. För storheterna i sprickspetsen gäller, för $K_{I\text{dyn}}$

$$K_I(v)/K_I(0) = \frac{4R(v)}{\beta_1 H(v)} \leq 1 \quad (3.61)$$

där $R(v)$ ges av (3.59) och $H(v)$ av

$$\begin{aligned} H(v) = & - \left[4 + (1 + \beta_2^2)^2 / \beta_1^2 \right] \cdot E(\beta_1^2) + 8 E(\beta_2^2) \\ & + \left[(1 - \beta_2^2)^2 + (1 - \beta_1^2)(1 + \beta_2^2)^2 / \beta_1^2 \right] \cdot K(\beta_1^2) \\ & - 4 (1 - \beta_2^2) K(\beta_2^2) \end{aligned} \quad (3.62)$$

där K och E är fullständiga elliptiska integraler av första och andra slaget. $H(v) \neq 0$ för $v \in [0, 1]$. Med (3.59) och (3.60c) inses att $K_I(C_R/C_2) = 0$ och i gränsen här $v \ll 1$ gäller $K_I(v) = K_I(0)$.

För sprickans tvärdeformation gäller

$$u_y(v)/u_y(0) = \frac{v^2}{(1-v)H(v)} \leq 1 \quad (3.63)$$

och då sprickan fortfarande är elliptisk blir volymsberoendet likadant

$$V(v)/V(0) = \frac{v^2}{(1-v)H(v)} \leq 1 \quad (3.64)$$

Dessa uttryck är $\neq 0$ när $v = C_R/C_2$ men antar liksom (3.61) värdet 1 när $v \rightarrow 0$.

Ur (3.58) och (3.61) erhålles gradienten för den lokalt frigjorda elastiska energin i sprickspetsen U_x

$$-\frac{\dot{U}_x}{\dot{a}} / -\frac{dU_x}{da} = \frac{4v^2 R(v)}{(1-\nu) \beta_1 H^2(v)} \leq 1 \quad (3.65)$$

där de statiska värdena

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1(0) = p \sqrt{\pi a} \\ -\frac{dU_x}{da} = \frac{\pi(1-\nu^2)p^2 a}{E} \end{array} \right. \quad (3.66)$$

utnyttjats. Erdogan /8/ har beräknat ett uttryck för gradienten för det tillförda arbetet i sprickspetsen W

$$\frac{\dot{W}}{\dot{a}} / \frac{dW}{da} = \frac{4v^2 P(v)}{(1-\nu) \beta_1 H^2(v)} \leq 1 \quad (3.67)$$

där det statiska värdet dW/da är lika stort som $-dU_x/da$ ur (3.66) och $P(v)$ ges av

$$P(v) = 0.5 R(v) + \pi^{-1} \beta_1 \beta_2 (\beta_2^{-2} - 1) \operatorname{atan}(\beta_2) - 0.25 \pi^{-1} (1 + \beta_2^2)^2 (\beta_1^{-2} - 1) \operatorname{atan}(\beta_1) \quad (3.68)$$

Liksom $K_1(C_R/C_2) = 0$ blir $-\dot{U}_x/\dot{a} = 0$ när $v = C_R/C_2$, $\dot{W}/\dot{a}$ däremot $\neq 0$. I gränsen när $v \rightarrow 0$ blir båda uttrycken (3.65) och (3.67) = 1. En jämförelse ger att $\dot{W}/\dot{a} > -\dot{U}_x/\dot{a}$ för alla $v \in [0, C_R/C_2]$

Med substitutionen

$$\left\{ \begin{array}{l} a = vC_2^+ \\ \frac{dW}{da} = \frac{\pi(1-\nu^2)p^2 C_2^+}{E} \cdot v = A \cdot v \end{array} \right. \quad (3.69)$$

åskådliggörs energigradienterna som funktion av v i fig. 7 för $\nu = 0.25$ på formen

$$\frac{\dot{U}_x}{\dot{a}}/A, \quad \frac{\dot{W}}{\dot{a}}/A = f(v) \quad (3.70)$$

och det framgår att ju snabbare en spricka växer desto mindre blir energigradienten $-\dot{U}_x/\dot{a}$ relativt motsvarande statiska värde. Skillnaden mellan $\dot{W}/\dot{a}$ och $-\dot{U}_x/\dot{a}$ utgörs enl. (3.7) av gradienterna för de kinetiska resp. lagrade elastiska energierna $\dot{K}/\dot{a}$ och $\dot{U}/\dot{a}$.

Erdogan /8/ har visat att för en modus III spricka under samma betingelser gäller $\dot{U} = \dot{K}$. Om detta antas gälla även för modus I, Brobergs lösning kan (3.7), (3.65) och (3.67) ge en uppskattning av $\dot{K}$ för $v \ll 1$ om $R(v)$, $P(v)$ och $H(v)$ serieutvecklas

$$\frac{\dot{K}}{\dot{a}} = - \frac{dU_x}{da} \cdot \left\{ \frac{(1-\nu) [(5-3k_o^4) - 4(1-k_o^4)/\pi]}{8} v^2 + O(v^4) \right\} \quad (3.71)$$

Då $\dot{a} = \text{konst.}$ gäller att $\dot{K}/\dot{a} = \partial K / \partial a$ varför den kinetiska energin för en sprickspets blir

$$K \approx (\alpha \mathcal{G} / 2E^2) p^2 a^2 \dot{a}^2 \quad (3.72)$$

där

$$\alpha = 2\pi(1-\nu^2)^2 \cdot [(5-3k_o^4) - 4(1-k_o^4)/\pi] / 8 \quad (3.73)$$

skriven som (3.24). Insättning av $\nu = 0.25$ och

$$k_o^2 = (1-2\nu)/(1+\nu) \quad (3.74)$$

ger

$$\alpha = 2\pi / 2.574 \quad (3.75)$$

En jämförelse med (3.24) visar att Motts uttryck för den kinetiska energin är avsevärt större än första termen i serieutvecklingen av $\dot{K}/\dot{a}$. (3.25) ger den numeriska konstanten för en sprickspets om den divideras med 2, $\alpha \approx 2\pi / 0.29$. Inte ens om $\dot{U}/\dot{a}$ tas med blir överensstämmelsen särskilt god. Jfr. Cherepanov /9/.

Inom int. $v \in [0, C_R/C_2]$ kan $-\dot{U}_x/\dot{a}$ approximeras av

$$-\frac{\dot{U}_x}{\dot{a}} / -\frac{dU_x}{da} = 1.055 [1 - \nu C_2/C_R] \quad (3.76)$$

med en avvikelse från (3.65) som är mindre än 0.01 inom hela int.

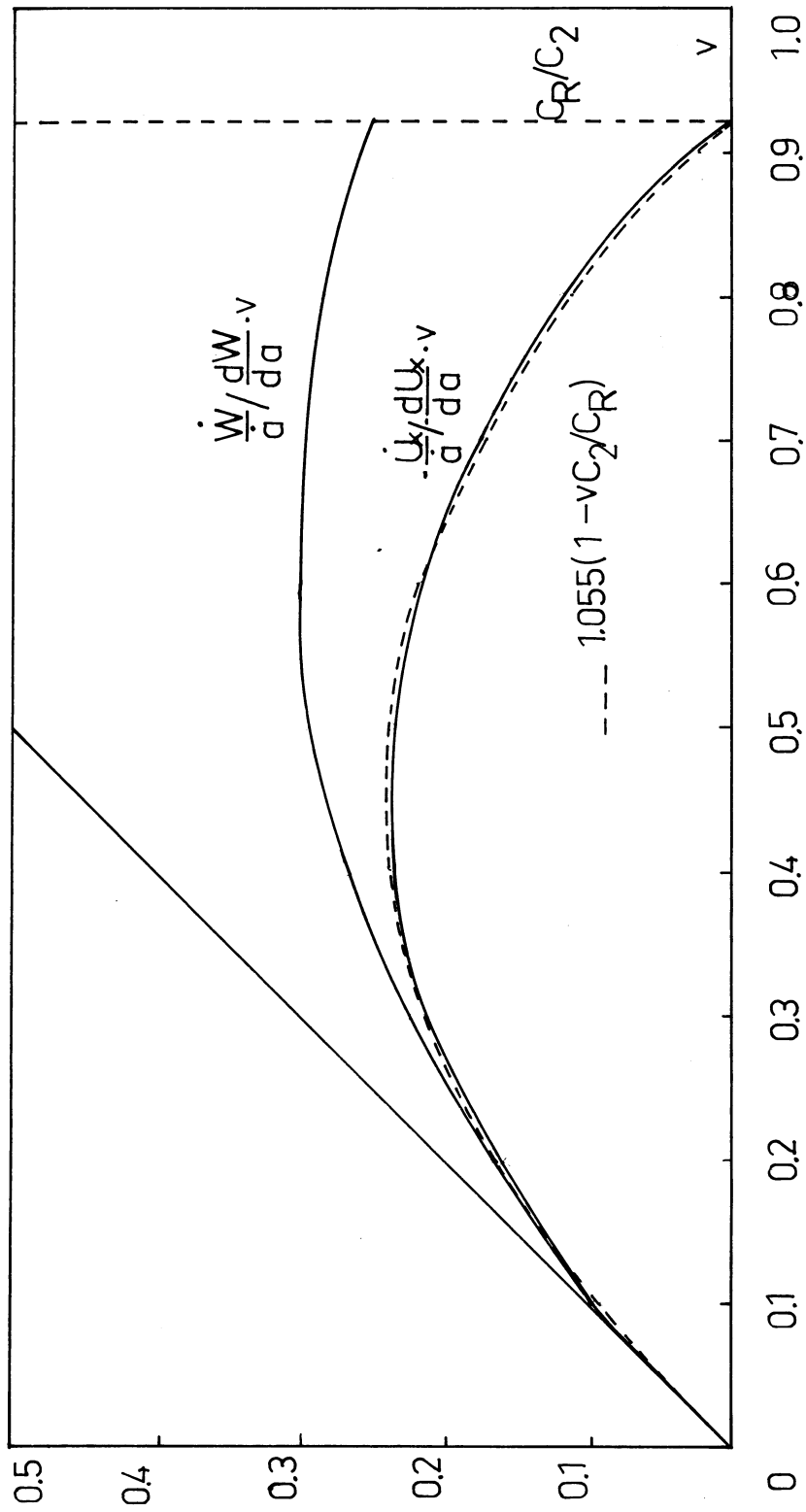


Fig. 7. Gradienterna för det tillförda arbetet i sprickspetsen $\dot{W}$ och den lokalt frigjorda elastiska energin $\dot{U}_x$ för en plan spricka som funktion av den dimensionslösa hastigheten v heldragna i figuren. Den streckade kurvan är en approximation.

3.6 Sprickans rörelseekvation ur Brobergs lösning

Det finns två sätt att beräkna sprickans rörelseekvation ur Brobergs lösning och energibalans ekvationen. Vägen över Lagrangeformalismen är inte möjlig då systemet inte längre är konservativt.

För det första kan man utnyttja approximativa uttryck liknande Motts för den kinetiska energin K och den elastiska energin U såsom (3.72) för att med uttrycken för gasarbetet W (3.19) och förlusterna F (3.23) samt energibalansvillkoret (3.32) ge rörelseekvationen som liknar (3.33) när $\lambda \neq 1$ och $y \geq 1$

$$\frac{1}{\lambda-1} [f_v(\dot{y})^{-(\lambda-1)} - 1] + 0.15 f_v(\dot{y})^{-2} \left(\frac{\dot{y} a_0}{C_L} \right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda-1} + \beta \right) y^\lambda - \frac{1}{\lambda-1} - \beta y^{\lambda+1} \quad (3.77)$$

Här uttrycker $f_v(\dot{y})$ volymens hastighetsberoende i (3.64) och med det valda uttrycket för U finns ingen elastisk energi upplagrad i kroppen vid $t = 0$. Gränsen för sprickutbredningen ges approximativt när $\beta \ll 1$ av

$$y_1 = a_1/a_0 \approx [\beta(\lambda-1)]^{-1} \quad (3.78)$$

vilket är mindre än motsvarande värde i (3.38). Det uppstår däremot en tvetydighet när man skall avgöra om utbredningshastigheten $\dot{y}$ har någon övre gräns när $\beta = 0$ då $f_v(\dot{y})$ endast är definierad över int. $\dot{y} a_0 \in [0, C_2]$. $f_v(\dot{y}) > 0$ och man kan alltid hitta ett gränsvärde y_x för vilket gäller att när $y > y_x$ finns det inget $\dot{y} \leq C_2/a_0$ som satisfierar (3.77).

Om man väljer det andra sättet försvinner detta problem.

Då används energibalansvillkoret på formen (3.8) i stället vilket innebär balans mellan frigjord och förbrukad energi i sprickspetsen under hela utbredningstiden. Räkningar ger för $y \geq 1$

$$y^{-(\lambda+1)} f_x(\dot{y}) f_v(\dot{y})^{-(\lambda+1)} = \beta \quad (3.79)$$

där $f_x(\dot{y})$ uttrycker hastighetsberoendet hos gradienten för den lokalt frigjorda elastiska energin $-\dot{U}_x/\dot{a}$ ur (3.65) eller (3.76). $y(\dot{y})$ ur (3.79) finns inritat i fig. 8, som $\dot{a}/C_1(a/a_0)$ med

$\lambda = 1.33$ och $\beta = 0.004$. Det bör observeras att värdet på β beror av a_0 , se (3.28).

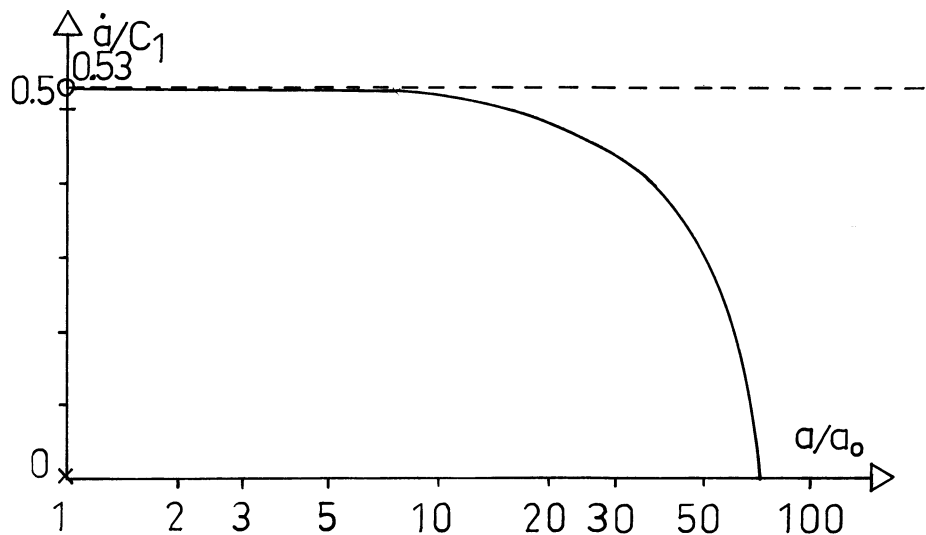


Fig. 8. Sprickans utbredningshastighet $\dot{a}$ som funktion av spricklängden för en plan spricka baserad på det ideala energibalansvillkoret.

Uttrycket gäller inte i initieringsskedet då $y = 1$ och $\dot{y} = 0$ inte är någon lösning. Då $f_x(C_R/a_0) = 0$ och $f_v(C_R/a_0) = 0$ inses för mycket spröda material, $\beta \ll 1$ att $\dot{y} \approx C_R/a_0$ när $y = 1$ och sprickan måste accelerera snabbt. Energibalansvillkoret (3.8) och därmed (3.81) gäller bara när accelerationen kan försummas. Gränsen för sprickutbredningen ges av

$$y_1 = -1/(\lambda + 1), \quad \lambda > -1 \quad (3.80)$$

då $f_x(0) = f_v(0) = 1$. Det är samma uttryck som (3.31), den stationära lösningen till sprickans rörelseekvation i 3.3. (3.80) gäller för $\lambda > -1$ eller $\mathcal{R} > 1/3$ så att sprickan stannar inte om gastrycket är konstant, $\mathcal{R} = 0$ eller $\lambda = -2$ utan tillväxthastigheten närmar sig alltmer Rayleighvågens hastighet i materialet. För övriga belastningsfall som konstant sprickbredd, isotherm gasexpansion och expansion med eller utan värmeförluster kommer sprickan att stanna. Värdet på spricklängden ur (3.80) är avsevärt mindre än det som den kvasistationära modellen i 3.3 ger, (3.38) och (3.78).

ger, (3.38) och (3.78).

Men (3.65) och energibalansvillkoret (3.8) ger också en alternativ formulering av (3.79) som innebär att sprickan växer så länge som

$$-\frac{dU_x}{da} \geq G_{Ic} \quad (3.81)$$

vilket ger samma gräns för sprickutbredningen. Uttrycket blir inte längre enbart ett brott eller initieringsvillkor som (3.1). Det är också det villkor för gränsen för en sprickas utbredning som använts i /7/ och /31/ bl.a. för att bestämma försättningen vid pallsprängning.

Sprickans rörelseekvation i (3.79) medför att oberoende av belastningens form, om energi inte tillförs direkt i sprickspetsen, gäller att Rayleighvågens hastighet i materialet är en övre gräns för sprickutbredningshastigheten. I praktiken ligger uppmätta gränshastigheter inom ett intervall $0.5 C_R < \dot{a} < 0.9 C_R$, se t.ex. Field /32/ och för bergarten norit har Bieniawski /33/ mätt $0.68 C_R$. Broberg /34/ har förklarat detta genom att tolka Rayleighvågens hastighet i det belastade materialet kring sprickspetsen som gränshastighet.

Eftersom energibalansvillkoret (3.8) inte är begränsat till en plan gasfylld spricka kan man med (3.81) och (3.2) bestämma gränsen för sprickutbredningen - spricklängden - för ett annat belastningsfall så snart spänningsintensitetsfaktorn och gasvolymen som funktion av spricklängden är kända.

3.7 Jämförelse mellan de olika rörelseekvationerna

Överläggningarna i 3.3 och 3.4 visar att varken energibalansvillkoret eller Lagrangeformalismen tillsammans med Motts uttryck för den kinetiska energin ger en övre gräns för sprickutbredningshastigheten som kan hänföras till någon dynamisk egenskap hos materialet. För de belastningsfall där en övre gräns finns beror den uteslutande på en balans mellan de ingående energierna eller en rörlig rand. Inte heller en utveckling av den elastiska energin på samma form som Motts uttryck för den kinetiska ger någon väsentlig förändring, se 3.6. Innebörden av detta och den rörliga randen i 3.4 är att det inte finns någon elastisk energi upplagrad i kroppen från början.

Sprickans rörelseekvation ur Brobergs lösning, (3.79) och (3.81) ger däremot Rayleighvågens utbredningshastighet i materialet som en övre gräns för sprickans utbredningshastighet. Till skillnad mot de övriga rörelseekvationerna grundar den sig enbart på förhållandena i sprickspetsen. Den ger också ett väsentligt lägre värde på spricklängden men då den ger en fysikaliskt riktigare bild av förloppet torde uttrycket (3.81) ge värden på spricklängden som bättre överensstämmer med praktiska resultat.

Slutsatsen stöds indirekt av Glennie och Willis /35/ räkningar för en rivspricka, mod.III som växer med varierande hastighet och där det plastiska deformationsarbetet är lokalt begränsat. De uttrycker gradienten för den i sprickspetsen lokalt frigjorda energin liksom i (3.58) enbart som funktion av sprickans utbredningshastighet och alltså oberoende av accelerationen. Energibalansvillkoret (3.8) ger sedan en rörelseekvation lik (3.79). Användandet av rörelseekvationen (3.79) för en plan spricka i mod I är en parallell som inte motsäger deras förväntan om att resultaten kvantitativt skall gälla också för detta fall.

Uttrycket (3.81) har använts i /7/ och /31/ och det visar ett betydligt starkare beroende av hur gasen är fördelad än motsvarande kvasistatiska.

4. REFERENSER

1. Carlsson, I.,
Larsson, S.L. Brottmekaniken dess grunder och tillämpningar.-
KTH inst. för hållf.; publ. nr 158 (1968).
2. Barenblatt, G.I. Adv. Appl. Mech., vol 7 s. 55-129 (1962).
3. Barenblatt, G.I. Prof. Barenblatt's Guest Lectures.-
KTH inst. för hållf.; publ. nr 149 (1964).
4. Broberg, K.B. Critical Review of some Theories in
Fracture Mechanics.-
Int. J. Frac. Mech., vol 4 s 11-18(1968)
5. Willis, J.R. A Comparison of the Fracture Criteria
of Griffith and Barenblatt.-
J. Mech. Phys. Solids, vol 15 s 151-162
(1967).
6. Rice, J.R. Mathematical Analysis in the Mechanics
of Fracture:-
Fracture: An Advanced Treatise, vol 2
Mathematical Fundamentals ed. H. Liebowitz
s 191-311 - Academic Press, N.Y.
7. Ouchterlony, F. Uppskattning av sprickutbredning kring
ett borrhål.-
Rapport DS 1970:49.
8. Erdogan, F. Crack Propagation Theories.-
Fracture vol 2 s. 497-590, se ref. 6.
9. Cherepanov, G.P. On Crack Propagation in Solids.-
Int. J. Solids Structures, vol 5
s 863-871 (1969).
10. Bowie, O.L. Analysis of an Infinite Plate Containing
Radial Cracks Originating of the Boundary
of an Internal Circular Hole.-
J. Math. Phys., vol 25 s 60-71 (1956).
11. Kutter, H.K. Stress Analysis of a Pressurized Circular
Hole with Radial Cracks in an Infinite
Elastic Plate.-
Int. J. Frac. Mech., vol 6 s 233-247 (1970)

12. Benbow, J.J.,
Roesler, F.C. Experiments on Controlled Fractures.-
Proc. Phys. Soc. B 70 s 201-207 (1957).
13. Mott, N.F. Fracture of Metals, Theoretical Considerations.-
Engineering, vol 165 s 15-18 (1948).
14. Berry, J.P. Some Kinetic Considerations of the Griffith Criterion for Fracture.-
J. Mech. Phys. Solids, vol 8 s 194-216 (1960).
15. Roberts, D.K.
Wells, A.A. The Velocity of Brittle Fracture.-
Engineering, vol 178 s 820-21 (1954).
16. Ouchterlony, F. Betydelsen av gasens fördelning i en plan spricka.-
Rapport DS 1970:50.
17. Steverding, B.,
Lehnigk, S.H. Response of Cracks to Impact.-
J. Appl. Phys., vol 41 nr 5 s 2096-99 (1970).
18. Steverding, B.
Lehnigk, S.H. Collision of Stress Pulses with Obstacles and Dynamics of Fracture.-
J. Appl. Phys., vol 42 nr 8 s 3231-38 (1971).
19. Steverding, B. Equation of Motion for an Impulsively Driven Crack.-
-ZAMM; vol 51 s 409-10 (1971).
20. Steverding, B.,
Lehnigk, S.H. The Propagation Law of Cleavage Fracture.-
Int. J. Frach. Mech., vol 6 nr 3 s 223-232 (1970).
21. Hilton, P.D.,
Sih, G.C. A Laminate Composite with a Crack Normal to the Interfaces.-
Int. J. Solids Structures, vol 7 s 913-930 (1971).
22. Yoffe, E.H. The Moving Griffith Crack.-
Phil. Mag., vol 42 s 739-750 (1951).
23. Craggs, J.W. On the Propagation of a Crack in an Elastic Brittle Material.-
J. Mech. Phys. Solids, vol 8 s 66-75 (1960).

24. Broberg, K.B. The Propagation of a Brittle Crack.-
Arkiv för Fysik, band 18 nr 10 s 159-192
(1960).

25. Nilsson, F. Dynamic Stress Intensity Factors for
Finite Strip Problems.-
KTH inst. för hållf. (1971).

26. Achenbach, J.D., Fracture Generated by a Dilatational Wave.-
Nuismer, R. Int. J. Frac. Mech., vol 7 nr 1 s 77-88
(1971).

27. Afanasév, E.F., A Self-Similar Problem of the Dynamic
Cherepanov, G.P. Theory of Elasticity for a Crack with a
Point Source.-
Soviet Physics-Doklady, vol 15 nr 2
s 185-87 (1970).

28. Nilsson, F. Teoretiska aspekter på snabb sprickut-
bredning.-
KTH inst. för hållf., publ. nr 167 (1970).

29. Cotterell, B. On the Nature of Moving Cracks.-
J. Appl. Mech., vol 31 s 12-16 (1964).

30. Kamei, A., On the Stress Distribution ahead of a
Yokobori, T. Propagating Elastic Brittle Crack.-
Rep. Res. Inst. Str. Frac. Mat. Tohoku
Univ. vol 3 nr 2 s 103-113 (1967).

31. Ouchterlony, F. Beräkning av spricklängdens variation med
håldiametern vid konstant sprängämnes-
mängd per meter.-
Bergmekaniskt diskussionsmöte 1971,
IVA rapport nr 38 s 115-129.

32. Field, J.F. Brittle Fracture, It's Study and Appli-
cation.-
Contemp, Phys., vol 12 nr 1 s 1-31 (1971).

33. Bieniawski, Z.T. Fracture Dynamics of Rock.-
Int. J. Frac. Mech., vol 4 nr 4 s 415-430
(1968).

34. Broberg, K.B. On the Speed of a Brittle Crack.-
J. Appl. Mech., vol 31 nr 3 s 546-47
(1964).

35. Glennie, E.B. An Examination of the Effects of some
Willis, J.R. Idealized Models of Fracture on Accelera-
ting Cracks.-
J. Mech. Phys. Solids, vol 19 s 11-30
(1971).