ANALYS AV SPÄNNINGSTILLSTÅNDET KRING NÅGRA OLIKA GEOMETRIER MED RADIELLT RIKTADE SPRICKOR I ETT OÄNDLIGT PLANT MEDIUM UNDER INVERKAN AV EXPANSIONSKRAFTER

Finn Ouchterlony

DS 1972:11 6.8.1972

STIFTELSEN
SVENSK DETONIKFORSKNING
SWEDISH DETONIC RESEARCH FOUNDATION
BOX 32058 – 12611 STOCKHOLM
SWEDEN

Bl. nr B 408. 1.000. 3. 78. NORA BOKTRYCKERI 71535

ANALYS AV SPÄNNINGSTILLSTÅNDET KRING NÅGRA OLIKA GEOMETRIER MED RADIELLT RIKTADE SPRICKOR I ETT OÄNDLIGT PLANT MEDIUM UNDER INVERKAN AV EXPANSIONSKRAFTER

Finn Ouchterlony

DS 1972:11 6.8.1972

Sammanfattning

Sönderbrytning av spröda material genom inre expansionskrafter såsom exempelvis vid bergsprängning sker genom radiella sprickors tillväxt. I syfte att närmare kunna belysa sådana förlopp görs i denna rapport en analys av spänningstillståndet kring några olika geometrier med radiellt riktade sprickor i ett oändligt plant medium. Brottmekaniskt intressanta storheter som spänningsintensitetsfaktorer, trolig tillväxtriktning för sprickan samt sprickvolym beräknas.

Resultaten som presenteras i kurvor och tabeller visar hur antalet sprickor, förhållandet mellan olika sprickors längd, sprickläng relativt borrhålets storlek och gasens inträngning i spricksystemet påverkar dessa storheter.

En viktig del av resultaten är en mekanism som oberoende av expansionskrafternas utbredning i ett spricksystem förklarar varför endast ett fåtal sprickor tillväxer även om ett stort antal initieras, t.ex. kring randen av ett hål. I denna mekanism ingår att spetsarna på de kortare sprickorna sluts om de är tillräckligt korta. Spricksluting uppträder också för vinkelsprickan.

149 s.

Innehållsförteckning

1. Inledning 1

2. Teckenförklaring 5

2.1 Matematiska symboler, allmänt 5
2.2 Fysikaliska symboler 6
2.3 Matematiska symboler, den komplexa metoden 7
2.4 Geometriska symboler 8

3. Analys av spänningstillståndet 10

3.1 Om Muskhelishvilis teknik 10
3.2 Avbildningsfunktioner för några geometrier med radiellt riktade sprickor 13
3.3 Polynomapproximationer för avbildningsfunktionerna 24
3.4 Bestämning av de komplexa spänningsfunktionerna 36
3.5 Bestämning av lastintegralerna 43
3.6 Diskussion av lösningens form 53
3.7 Uttryck för sökta storheter 55
3.8 Några enkla geometrier som referensfall 61
3.9 Explicita dimensionslösa uttryck 66

4. Numerisk beräkning och resultat 71

4.1 Inledning 71
4.2 Stjärnsprickan med lika långa armar under utbrett inre övertryck 80
4.3 Det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor under utbrett inre övertryck 84
4.4 Stjärnsprickan med lika långa armar och centralt angripande krafter 91
4.5 Stjärnsprickan med armar av alternerande längd under utbrett inre övertryck 94
4.6 Det cirkulära hålet med radiella sprickor av alternerande längd under utbrett inre övertryck 104
4.7 Stjärnsprickan med armar av alternerande längd och centralt angripande krafter 119
4.8 Det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor under inre övertryck på enbart hålranden 126
4.9 Vinkelsprickan under utbrett inre övertryck 138
4.10 Vinkelsprickan med centralt angripande krafter 143

5. Referenser 146

1. Inledning

Denna rapport innehåller en analys av spänningstillståndet kring några olika geometrier med radiellt riktade sprickor i ett oändligt plant medium under varierande belastning. Den utgör en uppföljning av tidigare rapporter, Ouchterlony /13/, /16-17/ och /24/, där idealiserade förhållanden vid sönderbrytning av spröda material genom sprickors tillväxt under inre expansionskrafter diskuteras. Speciellt avses bergsprängning och då särskilt pallsprängning med fri botten där förhållandena efter stötvågens passage antas kunna beskrivas genom ett i det närmaste statiskt spänningsfält. Jfr. Kutter /3/. Några av de geometrier som studeras torde även vara av intresse vid studium av t.ex. hydraulisk tryckning av borrhål i berg och sprickors tillväxt i tjockväggiga cylindriska kärl av sprött material. Gemensamt för rapporterna är den brottmekaniska infallsvinkeln. Resultaten i denna rapport utgörs av spänningsintensitetsfaktorer, trolig tillväxtriktning och sprickvolym presenterade i tabeller och kurvor med jämförande kommentarer.

Analysen följer huvudsakligen Muskhelishvilis /1/ och Persson /2/ arbeten om den komplexa metodens användning vid plana tillstånd inom elastomekaniken. Den skiljer sig på en väsentlig punkt, nämligen att de studerade konturerna har hörn och spetsar. Hos de nämnda arbetena förekommer den plana sprickan som ett gränsfall för det elliptiska hålet, Muskhelishvili har också studerat den plana sprickan och cirkelbågsprickan med teorin för sektionsvis holomorfa funktioner.

För att den komplexa metoden skall ge en lösning på sluten form måste avbildningsfunktionen antingen vara ett polynom eller en rationell funktion vilket utesluter konturer med hörn men inte dem med spetsar. Spetsarna medför i alla fall den komplikationen att den randvillkorsekvation som Cauchyintegreras för att ge lösningen blir singulär på randen. Detta problem har lösts av Bowie /7/, /8/ och Kutter /3/-/4/ bl.a. De approximerar den ursprungliga konturen med bibehållande av karaktären i sprickspetsarna genom att serieutveckla avbildningsfunktionen på polynomform. Singulariteten i randvillkorsekvationen hävs genom en multiplikation med avbildningsfunktionens derivata. Andersson /6/ har angripit den ursprungliga konturen med sina hörn. Hans räkningar är förhållandevis enkla men deras begränsade giltighet, se Andersson /26/ och som satts ifråga av Knauss och Palaniswamy /25/, gör dem oanvändbara i detta arbete.

Arbetet utgör i flera avseenden en fortsättning på Bowies /7/ Kutters /3/-/4/. Dels löses den singulära randvillkorsekvationen direkt för den av de komplexa spänningsfunktionerna som behövs. Det har den fördelen att lösningens form blir exakt den samma som Muskhelishvilis och Perssons för konturer utan spetsar. Den andra spänningsfunktionen kan lösas ut på samma

sätt. Dels studeras utöver ett utbrett inre övertryck den generellare belastningen tryck över en del av randen och gränsfallet centralt angripande krafter. Bowie har studerat allsidig yttre dragning vilket är samma sak som ett utbrett inre övertryck och enaxlig dragning. Gemensamt för alla här studerade belastningar är de expansionskrafter, dvs är balanserade och verkar enbart på den inre konturen. Den matematiska formelapparaten är sådan att när väl koefficienterna i avbildningsfunktionens approximationspolynom är kända erhålles lösningen direkt för den aktuella belastningen.

Vidare har utöver stjärnsprickan med lika långar armar och det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor som Bowie /7/ och Kutter /3/-/4/ studerat i denna rapport behandlats motsvarande geometrier med sprickor av alternerande längd samt vinkelsprickan. Som utgångspunkt för avbildningsfunktionens approximationspolynom tas här funktionens derivata varigenom det viktigaste kravet för att konturen skall bibehålla sin karaktär i spetsarna automatiskt uppfylls. Koefficienterna i avbildningspolynomets derivata ges för fyra av de fem geometrierna av mycket enkla uttryck vilka är explicita funktioner av storheter som beskriver geometrin. I två av fallen ges beroendet direkt av ortogonala polynomsystem.

Den komplexa metoden är flexibel jämfört med t.ex. de transformmetoder som använts för stjärnsprickan med lika långa armar under ett utbrett inre övertryck av Westmann /11/, Williams /12/, Rooke och Sneddon /20/ samt Stallybrass /21/. Den tillåter även analys av geometrier där sprickorna inte är radiella, där sprickorna är krökta som hos Ouchterlony /17/ och analys av ändliga områden med sprickor som hos Bowie /8/. Formlerna i detta arbete kan användas för en analys av andra geometrier med radiella sprickor under expansionskrafter, t.ex. för ett studium av om en förgrening av en plan spricka är fördelaktig ur energisynpunkt. Med en enkel komplettering gäller även formlerna för enaxlig yttre dragning. Förgreningen av en plan spricka utsatt för yttre dragning vinkelrätt mot sprickan har studerats av Andersson /6/ och tillväxtriktningen för en plan spricka under en enaxlig yttre dragning som bildar en godtycklig vinkel mot sprickplanet har studerats av Knauss och Palaniswamy /25/ vilka använt ett energikriterium för brott.

Analysen resulterar numeriskt i lösandet av ett ekvationssystem där de okända storheterna utgörs av koefficienterna till serierepresentationen av den sökta komplexa spänningsfunktionen. Ekvationssystemet skrivs på matrisform. Koefficientmatrisen framför den sökta koefficientvektorn bestäms helt av geometrin genom avbildningsfunktionen medan den kända delen,

lastintegralen, bestäms av belastningen och hur den är fördelad över sprickranden. Noggrannheten i de numeriska resultaten begränsas av att den använda datorns kapacitet inte medger användning av större matriser än ca 30x30. Detta är i de flesta fall fullt tillräckligt vilket en jämförelse med redan studerade geometrier också visar.

Beräkningen av sprick- eller gasvolymen görs dels direkt genom en integrering av randförskjutningarna dels omvägen över den elastiska energin och därmed spänningsintensitetsfaktorerna. Det sista sättet är bara möjligt när en tänkt tillväxt sker geometriskt likformigt, dvs för sprickor utan begynnelsevolym som stjärnsprickan och vinkelsprickan. Då den approximerade konturen bevarar karaktären hos spänningstillståndet i sprickspetsarna men inte geometrin i stort kan de två volymvärdena vid en jämförelse användas som ett mått på hur väl verkiig och approximerad kontur överensstämmer.

Resultaten redovisas på dimensionslös form, de har dividerats med motsvarande uttryck för den plana sprickan utsatt för samma belastning. Härigenom försvinner beroendet av gastryck, elasticitetsmodul och konturens absoluta storlek medan inverkan av relationer som entydigt karakteriserar konturen bevaras såsom vinkeln mellan två sprickor eller antalet sprickor och dimensionslösa längdförhållanden. Detta sätt att redovisa värden har symmetrifördelar, men gör dem inte alltid direkt jämförbara. I kommentarerna utnyttjas också två konturer, nämligen hypocykloidsprickan som liknar stjärnsprickan och cirkelbågsprickan som liknar vinkelsprickan, för en jämförelse. Värdena på spänningsintensitetsfaktorerna för stjärnsprickan med lika långa armar under utbrett inre övertryck återges med förbluffande noggrannhet av hypocykloidsprickans slutna uttryck $K_I/p\sqrt{\pi a} = 2\sqrt{n-1}/n$. Avvikelsen är mindre än 4%o!

I kommentarerna diskuteras också den sprickslutningseffekt som uppträder för de olika geometrierna och den obalans ur tillväxtsynpunkt som finns för stjärnsprickan och det cirkulära hålet med radiella sprickor. Här finns en möjlig förklaring till varför endast ett litet antal sprickor blir särskilt långa vid bergsprängning när ett stort antal initieras på borrhålsranden, se Persson, Lundborg och Johansson /24/.

Den sprickslutningseffekt som uppträder för vinkelsprickan uppträder också för cirkelbågsprickan och den sistnämnda har diskuterats av Ouchterlony /17/ i samband med sprickutbredningen vid pallsprängning. Medan detta för cirkelbågsprickan resulterade i en minsta utslagsvinkel på ca 40° ger vinkelsprickan ca 50°. Övriga värden visar en lika god överensstämmelse över hela vinkelintervallet vid centralt angripande krafter och därför bör

analogin mellan vinkelsprickan och cirkelbågsprickan vara tillåten som den utnyttjats i /17/ för att diskutera sprickutbredningsriktningen vid pallsprängning.

2. Teckenförklaring

2.1. Matematiska symboler, allmänt

(x,y)	= rektangulära koordinater och oberoende variabler
z	= $x + iy$: komplex representation av det fysiska planet
i	= imaginär enhet
Re, Im	= real-resp. imaginärdelar av en komplex storhet
ζ	= komplex variabel i bildplanet
(r,φ)	= polära koordinater i det fysiska planet
S	= randkurva i det fysiska planet
s	= komplex koordinat längs denna
(r,θ)	= polära koordinater i bildplanet
Γ	= enhetscirkeln i bildplanet
σ	= komplex koordinat längs denna
$f(z)$	= funktionsbeteckning
$f'(z), f''(z)$	= betecknar differentiering m.a.p. z
a, A	= konstant beteckning
j, k	= utgör ofta index
$\{a_k : k \geq 0\}$	= serie av konstanter
$\{a_k\}, \mathfrak{a}$	= alternativa sätt att beteckna serier
$\mathfrak{a}$	= vektorbeteckning
$\{A\}_{RxK}$	= matrisbeteckning med angivande av antal rader och kolumner
$\{E\}$	= enhetsmatris
Δ	= ∇^2 : Laplaceoperatorn
D.E.	= differentialekvation
R.V.	= randvillkor
$C_k^{(\alpha)}(x)$	= Cegenbauerpolynom av k:te graden i x
$P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$	= Jacobipolynom av k:te graden
$P_k(x)$	= Legendrepolynom av k:te graden

2.2. Fysikaliska symboler

(σ, τ) = spänningar $[N/m^2]$

(u_x, v_y) = deformationer $[m]$

G = $E/2(1+\nu)$: skjuvmodulen $[N/m^2]$

E = elasticitetsmodulen $[N/m^2]$

ν = Poissons tal $[0]$ (dimensionslös)

$\varkappa$ = materialkonstant som beror av ν $[0]$

p = gastryck $[N/m^2]$

F = kraftresultant $[N/m]$

$\bar{K}$ = $K_I + iK_{II}$: komplex spänningsintensitets-faktor där

(K_I, K_{II}) = utgör spänningsintensitetsfaktorer för belastningsfall modus I resp. II. $[N/m^{3/2}]$

φ_o = trolig utbredningsriktning för sprickan

V = gasvolym $[m^3/m]$

k_1, k_2 = dimensionslösa spänningsintensitetsfaktorer

v = dimensionslös gasvolym

P.D. = plant deformationstillstånd

P.S. = plant spänningstillstånd

2.3. Matematiska symboler, den komplexa metoden

ϕ	=	Airys spänningsfunktion
$f(z), g(z)$	=	komplexa spänningsfunktioner
$\{a_k\}, \{b_k\}$	=	koefficienter i deras serierepresentationer
$H(s)$	=	$F_1(s)+iF_2(s)$: randlastfunktion
k	=	konstant som beror av R.V.
(X_n, Y_n)	=	randspänningskomposanter
(X, Y)	=	deras resultanter
$w(\zeta)$	=	komplex avbildningsfunktion
$\{c_k\}$	=	koefficienter i dess serierepresentation
A	=	proportionalitetskonstant för konturen
$\{d_k\}, \{D_k\}$	=	koefficienter i serieutvecklingar
$h(\zeta), i(\zeta)$	=	komplexa funktioner
$\text{index}_{+,-}$	=	anger område där funktionerna ovan är holomorfa
$P(\zeta)$	=	polynom vars nollställen ligger på enhetscirkeln Γ
$D_o(\zeta)$	=	principaldelen i en Laurentutveckling
$A_o(\zeta)$	=	lastberoende funktion eller lastintegral
$\mathbf{A}$	=	lastintegralens koefficientvektor eller lastvektor
$\mathbf{B}$	=	modifierad lastvektor
$\mathbf{a}$	=	koefficientvektor till $f(z)$
$\{D\}$	=	koefficientmatris
index_o	=	betecknar den del av funktionerna f,g och w som är holomorfa i området $\lvert\zeta\rvert > 1$
index_N	=	betecknar storheter knutna till en approximerad kontur

2.4. Geometriska symboler

2.4.1 Allmänt

$w(\zeta)$ = komplex avbildningsfunktion

$w_N(\zeta)$ = polynomapproximation av denna

N = antalet rötter hos approximationen, räknat utan multiplicitet, eller approximationens gradtal

$\{c_k\}$ = koefficienter i avbildningsfunktionens serierepresentation

A = geometrisk proportionalitetskonstant

Q = dimensionslös numerisk konstant som bestämmer geometrins karaktär i sprickspetsarna

ϕ_k = sprickspetsens vinkel relativt den reella axeln i det fysiska planet

σ_k = sprickspetsarnas läge på Γ

σ_j = sprickrötternas läge på Γ

2.4.2. Stjärnsprickan med lika långa armar

a = sprickläng den [m]

n = antalet sprickor

2.4.3. Stjärnsprickan med armar av alternerande längd

δ = längförhållandet mellan armarna [0]

n = 2 m : antalet armar

Δ = storhet i avbildningsfunktionen som bestämmer längdförhållandet δ

2.4.4. Cirkulärt hål med lika långa radiella sprickor

R = hålradien [m]

μ = förhållandet mellan sprickspetsens avstånd från hålcentrum och hålradien [0]

ϵ = storhet i $w(\zeta)$ som bestämmer längdförhållandet μ

θ_o = vinkelstorhet som är bestämd av ϵ

2.4.5. Cirkulärt hål med radiella sprickor av alternerande längd

μ, λ = förhållanden mellan sprickspetsarnas avstånd från hålcentrum och hålradien [0]

γ_1, γ_2 = storheter i $w(\zeta)$ som bestämmer längdförhållandena μ och λ

θ_1, θ_2 = vinkelstorheter som beror av γ_1 och γ_2

$h(x)$ = hjälpfunktion

2.4.6. Vinkelsprickan

α = halva sprickvinkeln

q = $1-2\alpha/\pi$: storhet i $w(\zeta)$ som bestämmer α

φ_o = vinkelstorhet som beror av q

3. Analys av spänningstillståndet kring några olika geometrier med radiellt riktade sprickor.

3.1. Om Muskhelishvilis teknik

En mycket vanlig metod vid analys av spänningstillståndet i en plan kropp är att använda Airys spänningsfunktion varvid jämviktsekvationerna i planet automatiskt uppfylls. I rektangulära koordinater (x,y) ges funktionen $\phi(x,y)$ av

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \tag{3.1}$$

För ett linjärt elastiskt material resulterar insättning i kompatibitetsekvationerna i den biharmoniska differentialekvationen (D.E.)

$$\Delta\Delta\phi = 0 \tag{3.2}$$

Genom en övergång till komplexa variabler kan Airys spänningsfunktion uttryckas i två godtyckliga analytiska spänningsfunktioner f och g, vars form bestäms av randvillkoren (R.V.). Med

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \tag{3.3}$$

erhålles

$$\phi(x,y) = \mathrm{Re}\left\{\bar{z}f(z) + \int_0^z g(z')dz'\right\} \tag{3.4}$$

Dessa funktioner bestämmer entydigt spänningstillståndet i kroppen och förskjutningarna så när som på stelkroppsrörelser. Uttrycken för spänningar och förskjutningar blir

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}\left\{f'(z)\right\} \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\cdot\left[\bar{z}f''(z) + g'(z)\right] \\ 2G(u_x + iv_y) = \varkappa f(z) - z\overline{f'(z)} - \overline{g(z)} \end{cases} \tag{3.5}$$

Spänningen i tvärled antar olika värden beroende på om plant spänningstillstånd (P.S) eller plant deformationstillstånd (P.D.) antas råda i kroppen.

Teorin för analytiska funktioner är en välutvecklad gren av matematiken och den komplexa metoden som utvecklats bl.a. av Muskhelishvili /1/ medför att ett stort antal viktiga plana problem kan lösas. För att utnyttja teorin för analytiska funktioner används ofta metoden med konform avbildning så att i stället för den verkliga geometrin en enklare form studeras, vanligen cirkulär. Det transformerade R.V. i bildplanet kan då lösas direkt med potensserieansatser eller genom att R.V.-ekvationen Cauchyintegreras. Den komplexa metodens grunder och tillämpningar redovisas bl.a. av Persson /2/.

De fundamentala randvärdesproblemen får liknande form.
På randen S där s är en komplex randkoordinat gäller

$$kf(z) + z\overline{f'(z)} + \overline{g(z)} = H(s) \text{ på } S \tag{3.6}$$

och när belastningen är given på randen, problem I, gäller med randspänningskomposanterna X_n och Y_n

$$\begin{cases} k = 1 \\ H(s) = F_1(s)+iF_2(s)+c = i\int_S (X_n+iY_n)ds+c \end{cases} \tag{3.7}$$

där värdet på konstanten c t.ex. väljs så att förskjutningarna saknar stelkroppskomponenter. När förskjutningarna är givna på randen, problem II, gäller med förskjutningarna $G_1(s)$ och $G_2(s)$

$$\begin{cases} k = -\varkappa \\ H(s) = -2G(G_1(s)+iG_2(s)) \end{cases} \tag{3.8}$$

Om en ny komplex variabel ζ införs för att beskriva bildplanet kan den konforma avbildningen uttryckas med en funktion $w(\zeta)$ som är analytisk i det avbildade området i ζ-planet.

$$z = w(\zeta) \tag{3.9}$$

Med bibehållna beteckningar såsom

$$f(z) = f[w(\zeta)] = f(\zeta) \tag{3.10}$$

kan de grundläggande sambanden transformeras. Uttrycket (3.6) blir med den komplexa randkoordinaten σ, $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$

$$kf(\sigma) + w(\sigma)\overline{f'(\sigma)}/\overline{w'(\sigma)} + \overline{g(\sigma)} = H(\sigma) \text{ på } \Gamma \tag{3.11}$$

Härur kan $f(\zeta)$ och $g(\zeta)$ lösas på sluten form genom Cauchyintegrering

om $w(\zeta)$ är en rationell funktion. Detta är av stort intresse då många områden med komplicerade konturer har avbildningsfunktioner som med god noggrannhet kan approximeras med polynom.

Vid avbildning av ett oändligt område begränsat av en kontur på området utanför enhetscirkeln Γ med fast oändlighetspunkt måste avbildningsfunktionens serierepresentation vara

$$w(\zeta) = A\zeta + w_o(\zeta), \quad |\zeta| \geq 1 \tag{3.12}$$

Formen för $f(\zeta)$ och $g(\zeta)$ ges av

$$\begin{cases} f(\zeta) = -\dfrac{X + iY}{2\pi(1+\varkappa)} \ln\zeta + B_1 A\zeta + f_o(\zeta) \\ \\ g(\zeta) = \varkappa \dfrac{X - iY}{2\pi(1+\varkappa)} \ln\zeta + B_2 A\zeta + g_o(\zeta) \end{cases} \tag{3.13}$$

Här är w_o, f_o och g_o funktioner som är holomorfa för $|\zeta| > 1$.
X och Y är randlastens resultanter och B_1 och B_2 beror av spänningarna på mycket stort avstånd. När belastningen utgörs av expansionskrafter, dvs. är balanserad och angriper enbart på den inre konturen försvinner de två första termerna i (3.13) och $f(\zeta)$ och $g(\zeta)$ blir holomorfa för $|\zeta| > 1$

$$\begin{cases} f(\zeta) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k \zeta^{-k} \\ \\ g(\zeta) = \sum_{k=o}^{\infty} b_k \zeta^{-k} \end{cases} \tag{3.14}$$

Konstanternas a_k och b_k värden beror på avbildningsfunktionen och belastningen på randen. Analysen följer väsentligen Muskhelishvili /1/ och Persson /2/. Nästa del är en presentation av avbildningsfunktionerna.

3.2. Avbildningsfunktioner för några geometrier med radiellt riktade sprickor

Följande sprickgeometrier skall studeras:

1. Stjärnsprickan med n lika långa och rotationssymmetriskt utplacerade armar.
2. En stjärnspricka som ovan men med 2 m armar av alternerande längd.
3. Ett cirkulärt hål med n lika långa och rotationssymmetriskt utplacerade radiella sprickor.
4. Ett cirkulärt hål som ovan med 2 m radiella sprickor av alternerande längd.
5. En vinkelspricka där vinkeln mellan armarna varierar.

Alla dessa skall avbildas på enhetscirkeln Γ så att området utanför resp. geometri avbildas konformt på området utanför enhetscirkeln $|\zeta| > 1$. Villkoret för detta är att $w'(\zeta) \neq 0$ och begränsad då $|\zeta| > 1$. Geometrierna har både spetsar och hörn och i dessa punkter är avbildningen inte konform. Se fig.

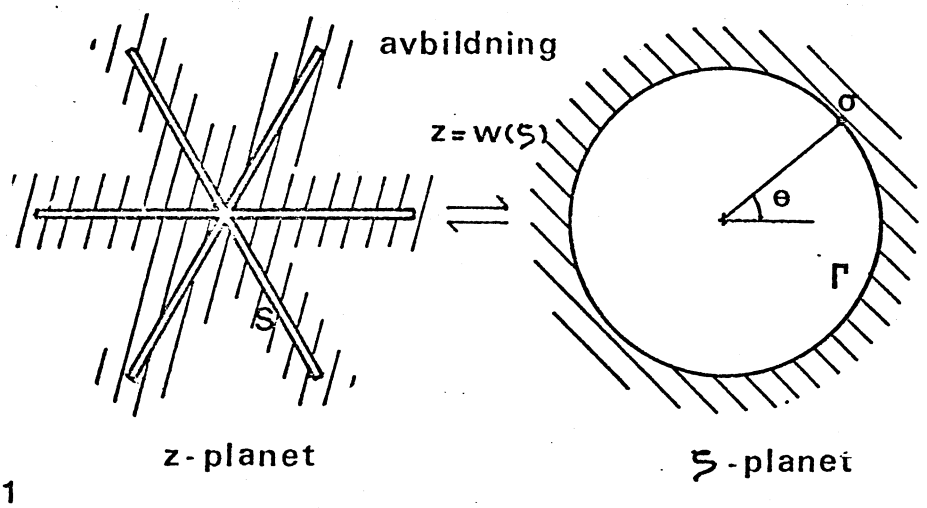
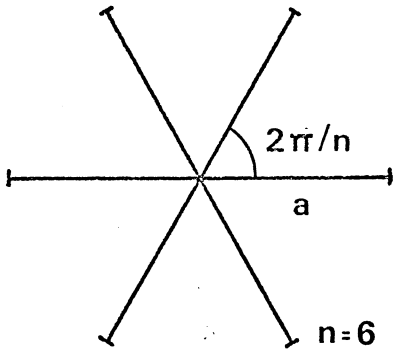


fig 3.1

Avbildningsfunktionerna för dessa geometrier presenteras utan närmare studium med referenser till tidigare författare när så är möjligt. För de fortsatta räkningarna krävs sprickspetsarnas lägen på Γ vilka ges av $w'(\zeta) = 0$ och andra derivatans w'' värde i dessa punkter

3.2.1. Stjärnsprickan med lika långa armar.

Denna geometri har studerats bl.a. av Kutter /3/-/4/, den utgör ett specialfall av geometrier hos Darwin /5/ och Andersson /6/.



n st armar, $n \geq 2$
rotvinkel $2\pi/n$
spricklängd a

fig 3.2 z-plan

Avbildningsfunktionen ges av

$$w(\zeta) = A\zeta\,(1+\zeta^{-n})^{2/n} \qquad (3.15)$$

De punkter σ_k på Γ som svarar mot sprickspetsarna ges av $w'(\zeta) = 0$. Avbildningsfunktionens derivata är

$$w'(\zeta) = A\,\frac{1-\zeta^{-n}}{(1+\zeta^{-n})^{1-2/n}} \qquad (3.16)$$

Sprickspetsarnas läge ges av

$$\begin{cases} \zeta^n = 1 \\ \sigma_k = e^{i2\pi(k-1)/n} \quad ,k = 1,\ldots,n \end{cases} \qquad (3.17)$$

De punkter på Γ som svarar mot sprickrötterna är förgreningspunkter för $w(\zeta)$ vilket medför att den komplexa metoden inte direkt kan tillämpas. Avbildningsfunktionen måste approximeras med ett polynom eller en rationell funktion för att metoden skall ge en lösning på sluten form.

Andra derivatan av $w(\zeta)$ ges av

$$w''(\zeta) = A\,\frac{2}{\zeta}\cdot\frac{(n-1)+\zeta^{-n}}{(1+\zeta^{-n})^{2-2/n}} \qquad (3.18)$$

Värdet på konstanten A bestäms av spricklängden a.

$$A = a\, 2^{-2/n} \tag{3.19}$$

Andra derivatans värde i sprickspetsarna

$$w''(\sigma_k) = \frac{an}{2} \cdot \sigma_k^{-1} = \frac{An}{\sigma_k 2^{1-2/n}} \tag{3.20}$$

Som specialfall för n = 2 erhålles den plana sprickan.

3.2.2. Stjärnsprickan med armar av alternerande längd.

Som stjärnsprickan med lika långa armar utgör den ett specialfall av geometrier som Darwin /5/ och Andersson /6/ visar. Den har ett jämnt antal n = 2 m sprickarmar av alternerande längd. När förhållandet $\delta = 1$ återfås den förra geometrin.

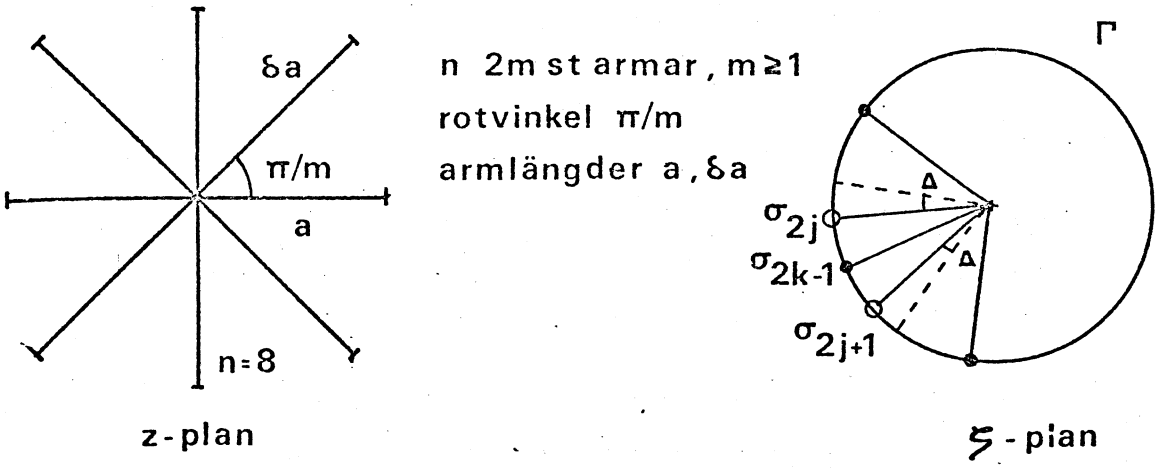


fig 3.3

Avbildningsfunktionens utseende ges av

$$w(\zeta) = A\zeta(1-2\sin\frac{n\Delta}{2}\,\zeta^{-n/2} + \zeta^{-n})^{2/n} \qquad (3.21)$$

eller

$$w(\zeta) = A\zeta(1-2\sin m\Delta\,\zeta^{-m} + \zeta^{-2m})^{1/m} \qquad (3.22)$$

derivatan $w'(\zeta)$ i sin tur ges av

$$w'(\zeta) = A\,\frac{1-\zeta^{-2m}}{(1-2\sin m\Delta\,\zeta^{-m} + \zeta^{-2m})^{1-1/m}} \qquad (3.23)$$

Sprickspetsarnas läge på Γ, σ_k, erhålles som förut

$$\begin{cases} \zeta^{2m} = 1 \\ \sigma_k = e^{i\pi(k-1)/m}\,, \quad k = 1, \ldots, 2m \end{cases} \qquad (3.24)$$

Sprickrötternas lägen däremot ges av

$$\zeta^m = \sin m\Delta \pm i\cos m\Delta = e^{\pm i(\pi/2 - m\Delta)} \qquad (3.25)$$

Dessa är förgreningspunkter till avbildningsfunktionen.

Uttrycket (3.25) kan skrivas

$$\sigma_j = e^{i\left[\pi(2j-1)/2m + (-1)^j\Delta\right]} \qquad (3.26)$$

ANALYS AV SPÄNNINGSTILLSTÅNDET KRING NÅGRA OLIKA GEOMETRIER MED RADIELLT RIKTADE SPRICKOR I ETT OÄNDLIGT PLANT MEDIUM UNDER INVERKAN AV EXPANSIONSKRAFTER

Finn Ouchterlony

DS 1972:11 6.8.1972

Sammanfattning

Sönderbrytning av spröda material genom inre expansionskrafter såsom exempelvis vid bergsprängning sker genom radiella sprickors tillväxt. I syfte att närmare kunna belysa sådana förlopp görs i denna rapport en analys av spänningstillståndet kring några olika geometrier med radiellt riktade sprickor i ett oändligt plant medium. Brottmekaniskt intressanta storheter som spänningsintensitetsfaktorer, trolig tillväxtriktning för sprickan samt sprickvolym beräknas.

Resultaten som presenteras i kurvor och tabeller visar hur antalet sprickor, förhållandet mellan olika sprickors längd, sprickläng relativt borrhålets storlek och gasens inträngning i spricksystemet påverkar dessa storheter.

En viktig del av resultaten är en mekanism som oberoende av expansionskrafternas utbredning i ett spricksystem förklarar varför endast ett fåtal sprickor tillväxer även om ett stort antal initieras, t.ex. kring randen av ett hål. I denna mekanism ingår att spetsarna på de kortare sprickorna sluts om de är tillräckligt korta. Spricksluting uppträder också för vinkelsprickan.

Innehållsförteckning

1. Inledning 1

2. Teckenförklaring 5

2.1 Matematiska symboler, allmänt 5
2.2 Fysikaliska symboler 6
2.3 Matematiska symboler, den komplexa metoden 7
2.4 Geometriska symboler 8

3. Analys av spänningstillståndet 10

3.1 Om Muskhelishvilis teknik 10
3.2 Avbildningsfunktioner för några geometrier med radiellt riktade sprickor 13
3.3 Polynomapproximationer för avbildningsfunktionerna 24
3.4 Bestämning av de komplexa spänningsfunktionerna 36
3.5 Bestämning av lastintegralerna 43
3.6 Diskussion av lösningens form 53
3.7 Uttryck för sökta storheter 55
3.8 Några enkla geometrier som referensfall 61
3.9 Explicita dimensionslösa uttryck 66

4. Numerisk beräkning och resultat 71

4.1 Inledning 71
4.2 Stjärnsprickan med lika långa armar under utbrett inre övertryck 80
4.3 Det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor under utbrett inre övertryck 84
4.4 Stjärnsprickan med lika långa armar och centralt angripande krafter 91
4.5 Stjärnsprickan med armar av alternerande längd under utbrett inre övertryck 94
4.6 Det cirkulära hålet med radiella sprickor av alternerande längd under utbrett inre övertryck 104
4.7 Stjärnsprickan med armar av alternerande längd och centralt angripande krafter 119
4.8 Det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor under inre övertryck på enbart hålranden 126
4.9 Vinkelsprickan under utbrett inre övertryck 138
4.10 Vinkelsprickan med centralt angripande krafter 143

5. Referenser 146

1. Inledning

Denna rapport innehåller en analys av spänningstillståndet kring några olika geometrier med radiellt riktade sprickor i ett oändligt plant medium under varierande belastning. Den utgör en uppföljning av tidigare rapporter, Ouchterlony /13/, /16-17/ och /24/, där idealiserade förhållanden vid sönderbrytning av spröda material genom sprickors tillväxt under inre expansionskrafter diskuteras. Speciellt avses bergsprängning och då särskilt pallsprängning med fri botten där förhållandena efter stötvågens passage antas kunna beskrivas genom ett i det närmaste statiskt spänningsfält. Jfr. Kutter /3/. Några av de geometrier som studeras torde även vara av intresse vid studium av t.ex. hydraulisk tryckning av borrhål i berg och sprickors tillväxt i tjockväggiga cylindriska kärl av sprött material. Gemensamt för rapporterna är den brottmekaniska infallsvinkeln. Resultaten i denna rapport utgörs av spänningsintensitetsfaktorer, trolig tillväxtriktning och sprickvolym presenterade i tabeller och kurvor med jämförande kommentarer.

Analysen följer huvudsakligen Muskhelishvilis /1/ och Persson /2/ arbeten om den komplexa metodens användning vid plana tillstånd inom elastomekaniken. Den skiljer sig på en väsentlig punkt, nämligen att de studerade konturerna har hörn och spetsar. Hos de nämnda arbetena förekommer den plana sprickan som ett gränsfall för det elliptiska hålet, Muskhelishvili har också studerat den plana sprickan och cirkelbågsprickan med teorin för sektionsvis holomorfa funktioner.

För att den komplexa metoden skall ge en lösning på sluten form måste avbildningsfunktionen antingen vara ett polynom eller en rationell funktion vilket utesluter konturer med hörn men inte dem med spetsar. Spetsarna medför i alla fall den komplikationen att den randvillkorsekvation som Cauchyintegreras för att ge lösningen blir singulär på randen. Detta problem har lösts av Bowie /7/, /8/ och Kutter /3/-/4/ bl.a. De approximerar den ursprungliga konturen med bibehållande av karaktären i sprickspetsarna genom att serieutveckla avbildningsfunktionen på polynomform. Singulariteten i randvillkorsekvationen hävs genom en multiplikation med avbildningsfunktionens derivata. Andersson /6/ har angripit den ursprungliga konturen med sina hörn. Hans räkningar är förhållandevis enkla men deras begränsade giltighet, se Andersson /26/ och som satts ifråga av Knauss och Palaniswamy /25/, gör dem oanvändbara i detta arbete.

Arbetet utgör i flera avseenden en fortsättning på Bowies /7/ Kutters /3/-/4/. Dels löses den singulära randvillkorsekvationen direkt för den av de komplexa spänningsfunktionerna som behövs. Det har den fördelen att lösningens form blir exakt den samma som Muskhelishvilis och Perssons för konturer utan spetsar. Den andra spänningsfunktionen kan lösas ut på samma

sätt. Dels studeras utöver ett utbrett inre övertryck den generellare belastningen tryck över en del av randen och gränsfallet centralt angripande krafter. Bowie har studerat allsidig yttre dragning vilket är samma sak som ett utbrett inre övertryck och enaxlig dragning. Gemensamt för alla här studerade belastningar är de expansionskrafter, dvs är balanserade och verkar enbart på den inre konturen. Den matematiska formelapparaten är sådan att när väl koefficienterna i avbildningsfunktionens approximationspolynom är kända erhålles lösningen direkt för den aktuella belastningen.

Vidare har utöver stjärnsprickan med lika långar armar och det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor som Bowie /7/ och Kutter /3/-/4/ studerat i denna rapport behandlais motsvarande geometrier med sprickor av alternerande längd samt vinkelsprickan. Som utgångspunkt för avbildningsfunktionens approximationspolynom tas här funktionens derivata varigenom det viktigaste kravet för att konturen skall bibehålla sin karaktär i spetsarna automatiskt uppfylls. Koefficienterna i avbildningspolynomets derivata ges för fyra av de fem geometrierna av mycket enkla uttryck vilka är explicita funktioner av storheter som beskriver geometrin. I två av fallen ges beroendet direkt av ortogonala polynomsystem.

Den komplexa metoden är flexibel jämfört med t.ex. de transformmetoder som använts för stjärnsprickan med lika långa armar under ett utbrett inre övertryck av Westmann /11/, Williams /12/, Rooke och Sneddon /20/ samt Stallybrass /21/. Den tillåter även analys av geometrier där sprickorna inte är radiella, där sprickorna är krökta som hos Ouchterlony /17/ och analys av ändliga områden med sprickor som hos Bowie /8/. Formlerna i detta arbete kan användas för en analys av andra geometrier med radiella sprickor under expansionskrafter, t.ex. för ett studium av om en förgrening av en plan spricka är fördelaktig ur energisynpunkt. Med en enkel komplettering gäller även formlerna för enaxlig yttre dragning. Förgreningen av en plan spricka utsatt för yttre dragning vinkelrätt mot sprickan har studerats av Andersson /6/ och tillväxtriktningen för en plan spricka under en enaxlig yttre dragning som bildar en godtycklig vinkel mot sprickplanet har studerats av Knauss och Palaniswamy /25/ vilka använt ett energikriterium för brott.

Analysen resulterar numeriskt i lösandet av ett ekvationssystem där de okända storheterna utgörs av koefficienterna till serierepresentationen av den sökta komplexa spänningsfunktionen. Ekvationssystemet skrivs på matrisform. Koefficientmatrisen framför den sökta koefficientvektorn bestäms helt av geometrin genom avbildningsfunktionen medan den kända delen,

lastintegralen, bestäms av belastningen och hur den är fördelad över sprickranden. Noggrannheten i de numeriska resultaten begränsas av att den använda datorns kapacitet inte medger användning av större matriser än ca 30x30. Detta är i de flesta fall fullt tillräckligt vilket en jämförelse med redan studerade geometrier också visar.

Beräkningen av sprick- eller gasvolymen görs dels direkt genom en integrering av randförskjutningarna dels omvägen över den elastiska energin och därmed spänningsintensitetsfaktorerna. Det sista sättet är bara möjligt när en tänkt tillväxt sker geometriskt likformigt, dvs för sprickor utan begynnelsevolym som stjärnsprickan och vinkelsprickan. Då den approximerade konturen bevarar karaktären hos spänningstillståndet i sprickspetsarna men inte geometrin i stort kan de två volymvärdena vid en jämförelse användas som ett mått på hur väl verklig och approximerad kontur överensstämmer.

Resultaten redovisas på dimensionslös form, de har dividerats med motsvarande uttryck för den plana sprickan utsatt för samma belastning. Härigenom försvinner beroendet av gastryck, elasticitetsmodul och konturens absoluta storlek medan inverkan av relationer som entydigt karakteriserar konturen bevaras såsom vinkeln mellan två sprickor eller antalet sprickor och dimensionslösa längdförhållanden. Detta sätt att redovisa värden har symmetrifördelar, men gör dem inte alltid direkt jämförbara. I kommentarerna utnyttjas också två konturer, nämligen hypocykloidsprickan som liknar stjärnsprickan och cirkelbågsprickan som liknar vinkelsprickan, för en jämförelse. Värdena på spänningsintensitetsfaktorerna för stjärnsprickan med lika långa armar under utbrett inre övertryck återges med förbluffande noggrannhet av hypocykloidsprickans slutna uttryck $K_I/p\sqrt{\pi a} = 2\sqrt{n-1}/n$. Avvikelsen är mindre än 4%o!

I kommentarerna diskuteras också den sprickslutningseffekt som uppträder för de olika geometrierna och den obalans ur tillväxtsynpunkt som finns för stjärnsprickan och det cirkulära hålet med radiella sprickor. Här finns en möjlig förklaring till varför endast ett litet antal sprickor blir särskilt långa vid bergsprängning när ett stort antal initieras på borrhålsranden, se Persson, Lundborg och Johansson /24/.

Den sprickslutningseffekt som uppträder för vinkelsprickan uppträder också för cirkelbågsprickan och den sistnämnda har diskuterats av Ouchterlony /17/ i samband med sprickutbredningen vid pallsprängning. Medan detta för cirkelbågsprickan resulterade i en minsta utslagsvinkel på ca 40° ger vinkelsprickan ca 50°. Övriga värden visar en lika god överensstämmelse över hela vinkelintervallet vid centralt angripande krafter och därför bör

analogin mellan vinkelsprickan och cirkelbågsprickan vara tillåten som den utnyttjats i /17/ för att diskutera sprickutbredningsriktningen vid pallsprängning.

2. Teckenförklaring

2.1. Matematiska symboler, allmänt

(x,y)	= rektangulära koordinater och oberoende variabler
z	= $x + iy$: komplex representation av det fysiska planet
i	= imaginär enhet
Re, Im	= real-resp. imaginärdelar av en komplex storhet
ζ	= komplex variabel i bildplanet
(r,φ)	= polära koordinater i det fysiska planet
S	= randkurva i det fysiska planet
s	= komplex koordinat längs denna
(r,θ)	= polära koordinater i bildplanet
Γ	= enhetscirkeln i bildplanet
σ	= komplex koordinat längs denna
$f(z)$	= funktionsbeteckning
$f'(z), f''(z)$	= betecknar differentiering m.a.p. z
a, A	= konstant beteckning
j, k	= utgör ofta index
$\{a_k : k \geq 0\}$	= serie av konstanter
$\{a_k\}, \mathfrak{a}$	= alternativa sätt att beteckna serier
$\mathfrak{a}$	= vektorbeteckning
$\{A\}_{R \times K}$	= matrisbeteckning med angivande av antal rader och kolumner
$\{E\}$	= enhetsmatris
Δ	= ∇^2 : Laplaceoperatorn
$D.E.$	= differentialekvation
$R.V.$	= randvillkor
$C_k^{(\alpha)}(x)$	= Gegenbauerpolynom av k:te graden i x
$P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$	= Jacobipolynom av k:te graden
$P_k(x)$	= Legendrepolynom av k:te graden

2.2. Fysikaliska symboler

(σ, τ)	=	spänningar $[N/m^2]$
(u_x, v_y)	=	deformationer $[m]$
G	=	$E/2(1+\nu)$: skjuvmodulen $[N/m^2]$
E	=	elasticitetsmodulen $[N/m^2]$
ν	=	Poissons tal $[0]$ (dimensionslös)
$\varkappa$	=	materialkonstant som beror av ν $[0]$
p	=	gastryck $[N/m^2]$
F	=	kraftresultant $[N/m]$
$\bar{K}$	=	$K_I + iK_{II}$: komplex spänningsintensitets-faktor där
(K_I, K_{II})	=	utgör spänningsintensitetsfaktorer för belastningsfall modus I resp. II. $[N/m^{3/2}]$
φ_o	=	trolig utbredningsriktning för sprickan
V	=	gasvolym $[m^3/m]$
k_1, k_2	=	dimensionslösa spänningsintensitetsfaktorer
v	=	dimensionslös gasvolym
P.D.	=	plant deformationstillstånd
P.S.	=	plant spänningstillstånd

2.3. Matematiska symboler, den komplexa metoden

ϕ	=	Airys spänningsfunktion
$f(z), g(z)$	=	komplexa spänningsfunktioner
$\{a_k\}, \{b_k\}$	=	koefficienter i deras serierepresentationer
$H(s)$	=	$F_1(s)+iF_2(s)$: randlastfunktion
k	=	konstant som beror av R.V.
(X_n, Y_n)	=	randspänningskomposanter
(X, Y)	=	deras resultanter
$w(\zeta)$	=	komplex avbildningsfunktion
$\{c_k\}$	=	koefficienter i dess serierepresentation
A	=	proportionalitetskonstant för konturen
$\{a_k\}, \{D_k\}$	=	koefficienter i serieutvecklingar
$h(\zeta), i(\zeta)$	=	komplexa funktioner
$\text{index}_{+,-}$	=	anger område där funktionerna ovan är holomorfa
$P(\zeta)$	=	polynom vars nollställen ligger på enhetscirkeln Γ
$D_o(\zeta)$	=	principaldelen i en Laurentutveckling
$A_o(\zeta)$	=	lastberoende funktion eller lastintegral
$\mathbf{A}$	=	lastintegralens koefficientvektor eller lastvektor
$\mathbf{B}$	=	modifierad lastvektor
$\mathbf{a}$	=	koefficientvektor till $f(z)$
$\{D\}$	=	koefficientmatris
index_o	=	betecknar den del av funktionerna f,g och w som är holomorfa i området $\lvert\zeta\rvert > 1$
index_N	=	betecknar storheter knutna till en approximerad kontur

2.4. Geometriska symboler

2.4.1 Allmänt

$w(\zeta)$ = komplex avbildningsfunktion

$w_N(\zeta)$ = polynomapproximation av denna

N = antalet rötter hos approximationen, räknat utan multiplicitet, eller approximationens gradtal

$\{c_k\}$ = koefficienter i avbildningsfunktionens serierepresentation

A = geometrisk proportionalitetskonstant

Q = dimensionslös numerisk konstant som bestämmer geometrins karaktär i sprickspetsarna

ϕ_k = sprickspetsens vinkel relativt den reella axeln i det fysiska planet

σ_k = sprickspetsarnas läge på Γ

σ_j = sprickrötternas läge på Γ

2.4.2. Stjärnsprickan med lika långa armar

a = sprickl ängden [m]

n = antalet sprickor

2.4.3. Stjärnsprickan med armar av alternerande längd

δ = längförhållandet mellan armarna [0]

n = 2 m : antalet armar

Δ = storhet i avbildningsfunktionen som bestämmer längdförhållandet δ

2.4.4. Cirkulärt hål med lika långa radiella sprickor

R = hålradien [m]

μ = förhållandet mellan sprickspetsens avstånd från hålcentrum och hålradien [0]

ϵ = storhet i $w(\zeta)$ som bestämmer längdförhållandet μ

θ_o = vinkelstorhet som är bestämd av ϵ

2.4.5. Cirkulärt hål med radiella sprickor av alternerande längd

μ, λ = förhållanden mellan sprickspetsarnas avstånd från hålcentrum och hålradien [0]

γ_1, γ_2 = storheter i $w(\zeta)$ som bestämmer längdförhållandena μ och λ

θ_1, θ_2 = vinkelstorheter som beror av γ_1 och γ_2

$h(x)$ = hjälpfunktion

2.4.6. Vinkelsprickan

α = halva sprickvinkeln

q = $1-2\alpha/\pi$: storhet i $w(\zeta)$ som bestämmer α

φ_o = vinkelstorhet som beror av q

3. Analys av spänningstillståndet kring några olika geometrier med radiellt riktade sprickor.

3.1. Om Muskhelishvilis teknik

En mycket vanlig metod vid analys av spänningstillståndet i en plan kropp är att använda Airys spänningsfunktion varvid jämviktsekvationerna i planet automatiskt uppfylls. I rektangulära koordinater (x,y) ges funktionen $\phi(x,y)$ av

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \tag{3.1}$$

För ett linjärt elastiskt material resulterar insättning i kompatibitetsekvationerna i den biharmoniska differentialekvationen (D.E.)

$$\Delta\Delta\phi = 0 \tag{3.2}$$

Genom en övergång till komplexa variabler kan Airys spänningsfunktion uttryckas i två godtyckliga analytiska spänningsfunktioner f och g, vars form bestäms av randvillkoren (R.V.). Med

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \tag{3.3}$$

erhålles

$$\phi(x,y) = \mathrm{Re}\left\{\bar{z}f(z) + \int_0^z g(z')dz'\right\} \tag{3.4}$$

Dessa funktioner bestämmer entydigt spänningstillståndet i kroppen och förskjutningarna så när som på stelkroppsrörelser. Uttrycken för spänningar och förskjutningar blir

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}\left\{f'(z)\right\} \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\cdot\left[\bar{z}f''(z) + g'(z)\right] \\ 2G(u_x + iv_y) = \varkappa f(z) - z\overline{f'(z)} - \overline{g(z)} \end{cases} \tag{3.5}$$

Spänningen i tvärled antar olika värden beroende på om plant spänningstillstånd (P.S) eller plant deformationstillstånd (P.D.) antas råda i kroppen.

Teorin för analytiska funktioner är en välutvecklad gren av matematiken och den komplexa metoden som utvecklats bl.a. av Muskhelishvili /1/ medför att ett stort antal viktiga plana problem kan lösas. För att utnyttja teorin för analytiska funktioner används ofta metoden med konform avbildning så att i stället för den verkliga geometrin en enklare form studeras, vanligen cirkulär. Det transformerade R.V. i bildplanet kan då lösas direkt med potensserieansatser eller genom att R.V.-ekvationen Cauchyintegreras. Den komplexa metodens grunder och tillämpningar redovisas bl.a. av Persson /2/.

De fundamentala randvärdesproblemen får liknande form.
På randen S där s är en komplex randkoordinat gäller

$$k f(z) + z\overline{f'(z)} + \overline{g(z)} = H(s) \text{ på } S \tag{3.6}$$

och när belastningen är given på randen, problem I, gäller med randspänningskomposanterna X_n och Y_n

$$\begin{cases} k = 1 \\ H(s) = F_1(s)+iF_2(s)+c = i\int_S (X_n+iY_n)ds+c \end{cases} \tag{3.7}$$

där värdet på konstanten c t.ex. väljs så att förskjutningarna saknar stelkroppskomponenter. När förskjutningarna är givna på randen, problem II, gäller med förskjutningarna $G_1(s)$ och $G_2(s)$

$$\begin{cases} k = -\varkappa \\ H(s) = -2G(G_1(s)+iG_2(s)) \end{cases} \tag{3.8}$$

Om en ny komplex variabel ζ införs för att beskriva bildplanet kan den konforma avbildningen uttryckas med en funktion $w(\zeta)$ som är analytisk i det avbildade området i ζ-planet.

$$z = w(\zeta) \tag{3.9}$$

Med bibehållna beteckningar såsom

$$f(z) = f[w(\zeta)] = t(\zeta) \tag{3.10}$$

kan de grundläggande sambanden transformeras. Uttrycket (3.6) blir med den komplexa randkoordinaten σ, $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$

$$k f(\sigma) + w(\sigma)\overline{f'(\sigma)}/\overline{w'(\sigma)} + \overline{g(\sigma)} = H(\sigma) \text{ på } \Gamma \tag{3.11}$$

Härur kan $f(\zeta)$ och $g(\zeta)$ lösas på sluten form genom Cauchyintegrering

om $w(\zeta)$ är en rationell funktion. Detta är av stort intresse då många områden med komplicerade konturer har avbildningsfunktioner som med god noggrannhet kan approximeras med polynom.

Vid avbildning av ett oändligt område begränsat av en kontur på området utanför enhetscirkeln Γ med fast oändlighetspunkt måste avbildningsfunktionens serierepresentation vara

$$w(\zeta) = A\zeta + w_o(\zeta), \quad |\zeta| \geq 1 \tag{3.12}$$

Formen för $f(\zeta)$ och $g(\zeta)$ ges av

$$\begin{cases} f(\zeta) = -\dfrac{X + iY}{2\pi(1+\varkappa)} \ln\zeta + B_1 A\zeta + f_o(\zeta) \\ \\ g(\zeta) = \varkappa \dfrac{X - iY}{2\pi(1+\varkappa)} \ln\zeta + B_2 A\zeta + g_o(\zeta) \end{cases} \tag{3.13}$$

Här är w_o, f_o och g_o funktioner som är holomorfa för $|\zeta| > 1$.
X och Y är randlastens resultanter och B_1 och B_2 beror av spänningarna på mycket stort avstånd. När belastningen utgörs av expansionskrafter, dvs. är balanserad och angriper enbart på den inre konturen försvinner de två första termerna i (3.13) och $f(\zeta)$ och $g(\zeta)$ blir holomorfa för $|\zeta| > 1$

$$\begin{cases} f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^{-k} \\ \\ g(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^{-k} \end{cases} \tag{3.14}$$

Konstanternas a_k och b_k värden beror på avbildningsfunktionen och belastningen på randen. Analysen följer väsentligen Muskhelishvili /1/ och Persson /2/. Nästa del är en presentation av avbildningsfunktionerna.

3.2. Avbildningsfunktioner för några geometrier med radiellt riktade sprickor

Följande sprickgeometrier skall studeras:

1. Stjärnsprickan med n lika långa och rotationssymmetriskt utplacerade armar.
2. En stjärnspricka som ovan men med 2 m armar av alternerande längd.
3. Ett cirkulärt hål med n lika långa och rotationssymmetriskt utplacerade radiella sprickor.
4. Ett cirkulärt hål som ovan med 2 m radiella sprickor av alternerande längd.
5. En vinkelspricka där vinkeln mellan armarna varierar.

Alla dessa skall avbildas på enhetscirkeln Γ så att området utanför resp. geometri avbildas konformt på området utanför enhetscirkeln $|\zeta| > 1$. Villkoret för detta är att $w'(\zeta) \neq 0$ och begränsad då $|\zeta| > 1$. Geometrierna har både spetsar och hörn och i dessa punkter är avbildningen inte konform. Se fig.

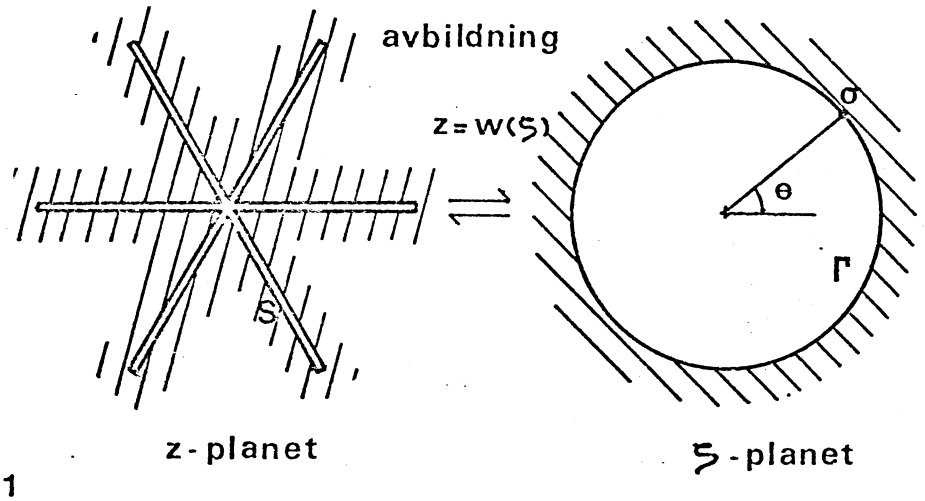
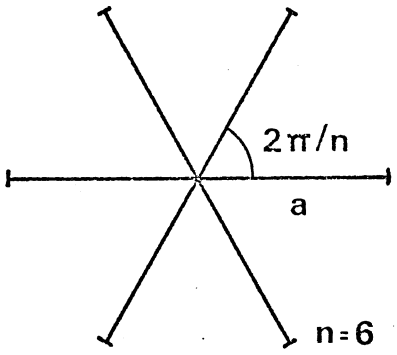


fig 3.1

Avbildningsfunktionerna för dessa geometrier presenteras utan närmare studium med referenser till tidigare författare när så är möjligt. För de fortsatta räkningarna krävs sprickspetsarnas lägen på Γ vilka ges av $w'(\zeta) = 0$ och andra derivatans w'' värde i dessa punkter

3.2.1. Stjärnsprickan med lika långa armar.

Denna geometri har studerats bl.a. av Kutter /3/-/4/, den utgör ett specialfall av geometrier hos Darwin /5/ och Andersson /6/.



n st armar, $n \geq 2$
rotvinkel $2\pi/n$
spricklängd a

fig 3.2 z-plan

Avbildningsfunktionen ges av

$$w(\zeta) = A\,\zeta\,(1+\zeta^{-n})^{2/n} \tag{3.15}$$

De punkter σ_k på Γ' som svarar mot sprickspetsarna ges av $w'(\zeta) = 0$. Avbildningsfunktionens derivata är

$$w'(\zeta) = A\,\frac{1-\zeta^{-n}}{(1+\zeta^{-n})^{1-2/n}} \tag{3.16}$$

Sprickspetsarnas läge ges av

$$\begin{cases} \zeta^n = 1 \\ \sigma_k = e^{i2\pi(k-1)/n} \quad ,k = 1,\ldots,n \end{cases} \tag{3.17}$$

De punkter på Γ' som svarar mot sprickrötterna är förgreningspunkter för $w(\zeta)$ vilket medför att den komplexa metoden inte direkt kan tillämpas. Avbildningsfunktionen måste approximeras med ett polynom eller en rationell funktion för att metoden skall ge en lösning på sluten form.

Andra derivatan av $w(\zeta)$ ges av

$$w''(\zeta) = A\,\frac{2}{\zeta}\cdot\frac{(n-1)+\zeta^{-n}}{(1+\zeta^{-n})^{2-2/n}} \tag{3.18}$$

Värdet på konstanten A bestäms av spricklängden a.

$$A = a\, 2^{-2/n} \tag{3.19}$$

Andra derivatans värde i sprickspetsarna

$$w''(\sigma_k) = \frac{an}{2} \cdot \sigma_k^{-1} = \frac{An}{\sigma_k 2^{1-2/n}} \tag{3.20}$$

Som specialfall för n = 2 erhålles den plana sprickan.

3.2.2. Stjärnsprickan med armar av alternerande längd.

Som stjärnsprickan med lika långa armar utgör den ett specialfall av geometrier som Darwin /5/ och Andersson /6/ visar. Den har ett jämnt antal n = 2 m sprickarmar av alternerande längd. När förhållandet $\delta = 1$ återfås den förra geometrin.

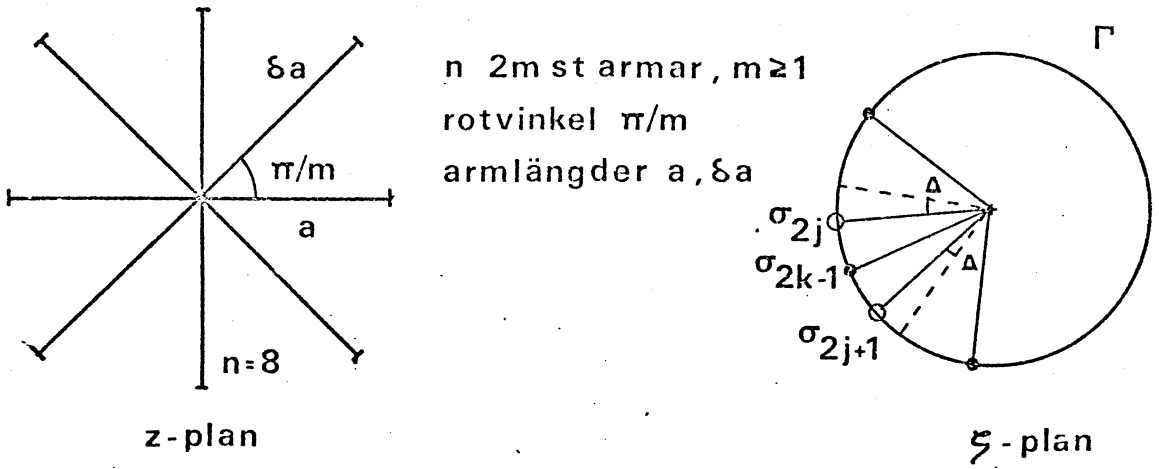


fig 3.3

Avbildningsfunktionens utseende ges av

$$w(\zeta) = A\zeta(1-2\sin\frac{n\Delta}{2}\,\zeta^{-n/2} + \zeta^{-n})^{2/n} \qquad (3.21)$$

eller

$$w(\zeta) = A\zeta(1-2\sin m\Delta\,\zeta^{-m} + \zeta^{-2m})^{1/m} \qquad (3.22)$$

derivatan $w'(\zeta)$ i sin tur ges av

$$w'(\zeta) = A\,\frac{1-\zeta^{-2m}}{(1-2\sin m\Delta\,\zeta^{-m} + \zeta^{-2m})^{1-1/m}} \qquad (3.23)$$

Sprickspetsarnas läge på Γ, σ_k, erhålles som förut

$$\begin{cases} \zeta^{2m} = 1 \\ \sigma_k = e^{i\pi(k-1)/m}\,, \quad k = 1, \ldots, 2m \end{cases} \qquad (3.24)$$

Sprickrötternas lägen däremot ges av

$$\zeta^m = \sin m\Delta \pm i\cos m\Delta = e^{\pm i(\pi/2 - m\Delta)} \qquad (3.25)$$

Dessa är förgreningspunkter till avbildningsfunktionen.
Uttrycket (3.25) kan skrivas

$$\sigma_j = e^{i\left[\pi(2j-1)/2m + (-1)^j\Delta\right]} \qquad (3.26)$$

Runt varannan sprickspets på Γ ligger ett par sprickrötter förskjutna vinkeln Δ mot spetsen jämfört med läget om sprickorna varit lika långa, Δ bestämmer alltså längdförhållandet δ . Insättning i (3.22) av (3.24) ger Δ och A

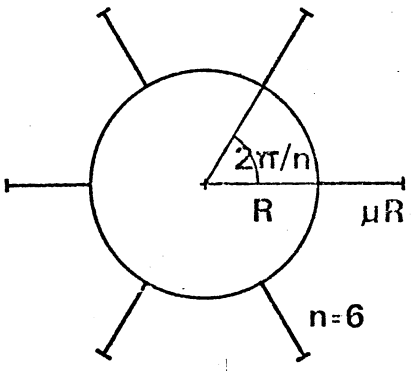
$$\begin{cases} \Delta = \frac{1}{m} \arcsin\left(\frac{\delta^m - 1}{\delta^m + 1}\right) \\ \\ \delta \in [0, \infty) \Rightarrow \Delta \in [-\pi/2m, \pi/2m) \\ \\ A = a 2^{-1/m} \left(\frac{\delta^m + 1}{2}\right)^{1/m} \end{cases} \tag{3.27}$$

Andra derivatans w" värde i sprickspetsarna ges av

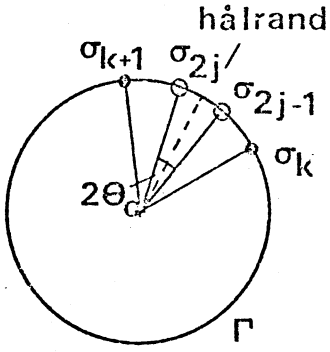
$$\begin{cases} w''(\sigma_k) = A \frac{2m}{\zeta} \left. \frac{\zeta^{-2m}}{(1 - 2\sin m\Delta\, \zeta^{-m} + \zeta^{-2m})^{1-1/m}} \right|_{\zeta = \sigma_k} \\ \\ w''(\sigma_{2k-1}) = \frac{am}{\sigma_{2k-1}} \frac{\delta^m + 1}{2} = \frac{Am}{\sigma_{2k-1}} 2^{1/m} \left(\frac{\delta^m + 1}{2}\right)^{1-1/m} \\ \\ w''(\sigma_{2k}) = \frac{\delta am}{\sigma_{2k}} \frac{\delta^m + 1}{2\delta^m} = \frac{Am}{\sigma_{2k}} 2^{1/m} \left(\frac{\delta^m + 1}{2\delta^m}\right)^{1-1/m} \end{cases} \tag{3.28}$$

som specialfall för m = 1 erhålles den plana sprickan.

3.2.3. Cirkulärt hål med lika långa radiella sprickor.
Avbildningsfunktionen för denna kontur ges av Bowie /7/ och Kutter /3/-/4/ på två alternativa formuleringar.



n st armar, n≥1
sprickvinkel 2π/n
hålradie R
spetsavstånd μR



z-plan ζ-plan

fig 3.4

De är

$$w(\zeta) = R\left[\frac{1+\zeta^{-n}+\sqrt{1+2\epsilon\zeta^{-n}+\zeta^{-2n}}}{1+\zeta^{-n}-\sqrt{1+2\epsilon\zeta^{-n}+\zeta^{-2n}}}\right]^{1/n} \tag{3.29}$$

$$w(\zeta) = \frac{R\zeta}{\sqrt[n]{2(1-\epsilon)}}\left[1+\zeta^{-n}+\sqrt{1+2\epsilon\zeta^{-n}+\zeta^{-2n}}\right]^{2/n} \tag{3.30}$$

Uttryckets derivata kan på kompaktast möjliga form skrivas

$$w'(\zeta) = \frac{w(\zeta)}{\zeta}\cdot\frac{1-\zeta^{-n}}{\sqrt{1+2\epsilon\zeta^{-n}+\zeta^{-2n}}} \tag{3.31}$$

Sprickspetsarnas läge på Γ ges av

$$\begin{cases} \zeta^n = 1 \\ \sigma_k = e^{i2\pi(k-1)/n}\,, \quad k = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{3.32}$$

Sprickrötternas lägen ges av förgreningspunkterna till $w(\zeta)$, dvs. rotuttryckets nollställen

$$\begin{cases} \zeta^n = -\epsilon \pm i\sqrt{1-\epsilon^2} = -e^{\mp in\theta_o} \\ \theta_o = \frac{1}{n}\arccos\epsilon \end{cases} \tag{3.33}$$

(3.33) kan också uttryckas

$$\begin{cases} \sigma_{2j-1} = e^{i\left[\pi(2j-1) - n\theta_o\right]/n} \\ \\ \sigma_{2j} = e^{i\left[\pi(2j-1) + n\theta_o\right]/n} \quad j = 1,\ldots,n \end{cases} \tag{3.34}$$

Med (3.33) inses att sprickrötternas läge på Γ' varierar med ϵ eller att ϵ är ett mått på sprickornas längd. Då sprickspetsens avstånd från hålets centrum är μR erhålles, se även fig.3.6.

$$\begin{cases} \epsilon = -1 + 2\left[(\mu^n-1)/(\mu^n+1)\right]^2 \\ \\ \mu \in [1,\infty) \Rightarrow \epsilon \in [-1,1) \end{cases} \tag{3.35}$$

$\epsilon \approx 1$ svarar så mot mycket långa sprickor och $\epsilon = -1$ mot inga alls. Nollstället för $\epsilon(\mu)$ ges av

$$\mu^n = 3 + 2\sqrt{2} \tag{3.36}$$

Andra derivatans w" värde i sprickspetsen ges av

$$\begin{cases} w''(\sigma_k) = \dfrac{w(\zeta)}{\zeta^2} \dfrac{n\zeta^{-n}}{\sqrt{1+2\epsilon\zeta^{-n}+\zeta^{-2n}}} \Bigg|_{\zeta=\sigma_k} \\ \\ w''(\sigma_k) = \dfrac{\mu R n}{2\sigma_k}\left(\dfrac{\mu^n+1}{\mu^n-1}\right) \end{cases} \tag{3.37}$$

3.2.4. Cirkulärt hål med radiella sprickor av alternerande längd.

Avbildningsfunktionen för föregående geometri kan generaliseras till att gälla för olika långa sprickor enl. fig.

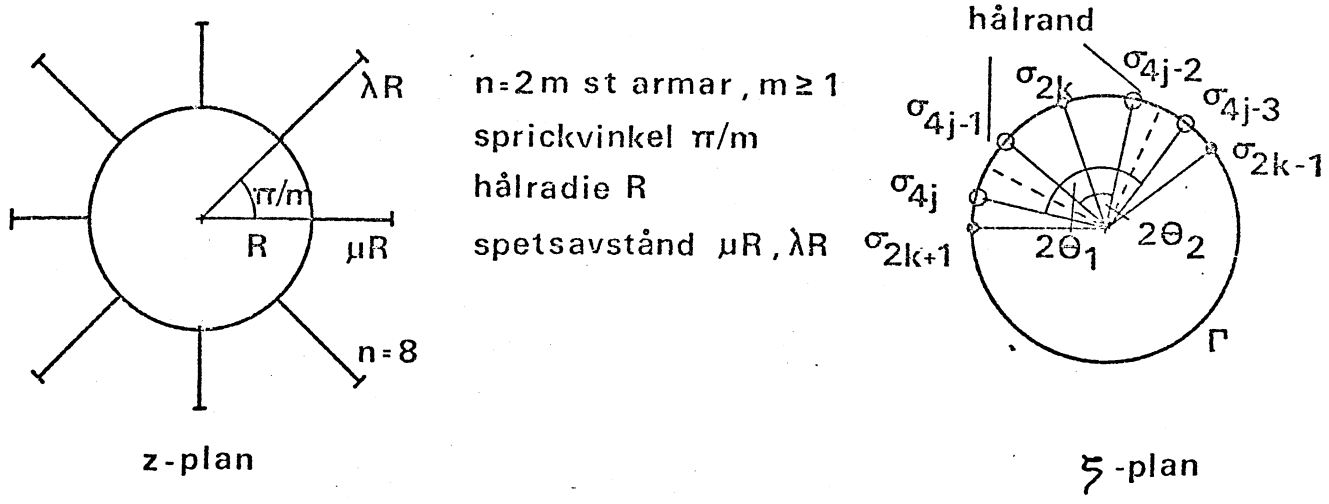


fig 3.5

De olika formerna för $w(\zeta)$ blir liksom (3.29) och (3.30)

$$w(\zeta) = R\left[\frac{1+(\gamma_1+\gamma_2)\zeta^{-m}+\zeta^{-2m}+\sqrt{(1+2\gamma_1\zeta^{-m}+\zeta^{-2m})(1+2\gamma_2\zeta^{-m}+\zeta^{-2m})}}{1+(\gamma_1+\gamma_2)\zeta^{-m}+\zeta^{-2m}-\sqrt{(1+2\gamma_1\zeta^{-m}+\zeta^{-2m})(1+2\gamma_2\zeta^{-m}+\zeta^{-2m})}}\right]^{1/2m} \tag{3.38}$$

och

$$w(\zeta) = \frac{R\zeta}{\sqrt[m]{\gamma_2-\gamma_1}}\left[1+(\gamma_1+\gamma_2)\zeta^{-m}+\zeta^{-2m}+\sqrt{(1+2\gamma_1\zeta^{-m}+\zeta^{-2m})(1+2\gamma_2\zeta^{-m}+\zeta^{-2m})}\right]^{1/m} \tag{3.39}$$

Uttryckens derivata på kompakt form

$$w'(\zeta) = \frac{w(\zeta)}{\zeta}\,\frac{1-\zeta^{-2m}}{\sqrt{(1+2\gamma_1\zeta^{-m}+\zeta^{-2m})(1+2\gamma_2\zeta^{-m}+\zeta^{-2m})}} \tag{3.40}$$

ger åter spetsarnas läge på Γ

$$\begin{cases} \zeta^{2m} = 1 \\ \sigma_k = e^{i\pi(k-1)/m}, \quad k = 1, \ldots, 2m \end{cases} \tag{3.41}$$

Sprickrötternas lägen ges av förgreningspunkterna till $w(\zeta)$

$$\begin{cases} \zeta^m = -\gamma_{1,2} \pm i\sqrt{1-\gamma_{1,2}^2} = -e^{\mp i m\theta_{1,2}} \\ \theta_{1,2} = \frac{1}{m}\arccos\gamma_{1,2} \end{cases} \tag{3.42}$$

Annorlunda uttryckt

$$\begin{cases} \sigma_{4j-3} = e^{i\left[\pi(2j-1)-\theta_1\right]/m} \\ \sigma_{4j-2} = e^{i\left[\pi(2j-1)-\theta_2\right]/m} \\ \sigma_{4j-1} = e^{i\left[\pi(2j-1)+\theta_2\right]/m} \\ \sigma_{4j} = e^{i\left[\pi(2j-1)+\theta_1\right]/m} \end{cases} \quad , j = 1, \ldots, m \qquad (3.43)$$

Liksom förut inses att γ_1 och γ_2 är mått på sprickornas längd. Om nya beteckningar införs

$$\begin{cases} \gamma = (\gamma_2 - \gamma_1)/2 \\ \Delta = (\gamma_2 + \gamma_1)/2 \end{cases} \qquad (3.43)$$

kan dessa uttryckas i μ och λ

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{4}{h(\mu)+h(\lambda)} \\ \Delta = \dfrac{h(\mu)-h(\lambda)}{h(\mu)+h(\lambda)} \\ \text{där } h(x) = x^m + x^{-m} = 2\cosh(m \cdot \ln x) \\ \mu, \lambda \in [1, \infty) \Rightarrow \gamma \in (0,1] \ , \Delta \in (-1,1) \end{cases} \qquad (3.44)$$

Uttrycken för γ_1 och γ_2 ger $\gamma_2 \in (-1,1]$ och $\gamma_1 \in [-1,1)$. Särskilt gäller

1. Om sprickorna är lika långa, dvs $\mu = \lambda \Rightarrow \Delta = 0$ oberoende av värdet på γ. För $n = 2m$ och
$$\gamma = \sqrt{\frac{1-\epsilon}{2}} \qquad (3.45)$$
kommer (3.38) och (3.39) att bli identiska med (3.29) och (3.30).
2. $\mu > \lambda$ om $\Delta > 0$ och vice versa oberoende av γ
3. $\mu \gg \lambda$ när $\Delta \approx 1$ och $\gamma \approx 0$
4. $\mu \ll \lambda$ när $\Delta \approx -1$ och $\gamma \approx 0$
5. $\mu = \lambda \gg 1$ när $\Delta = 0$ och $\gamma \approx 0$
då återfås stjärnsprickan med lika långa armar
6. $\mu \neq \lambda \gg 1$ när $\Delta \neq 0$ och $\gamma \approx 0$.
då återfås stjärnsprickan med olika långa armar

7. $\mu = \lambda = 1$ när $\Delta = 0$ och $\gamma = 1$
   då erhålls $w(\zeta) = R\zeta$ som avbildar en cirkel med radien R på enhetscirkeln.

Storheten γ är alltså ett mått på summan av sprickornas längd och Δ på skillnaden. ϵ ur (3.35) och γ ur (3.45) finns inritade i fig. 3.6

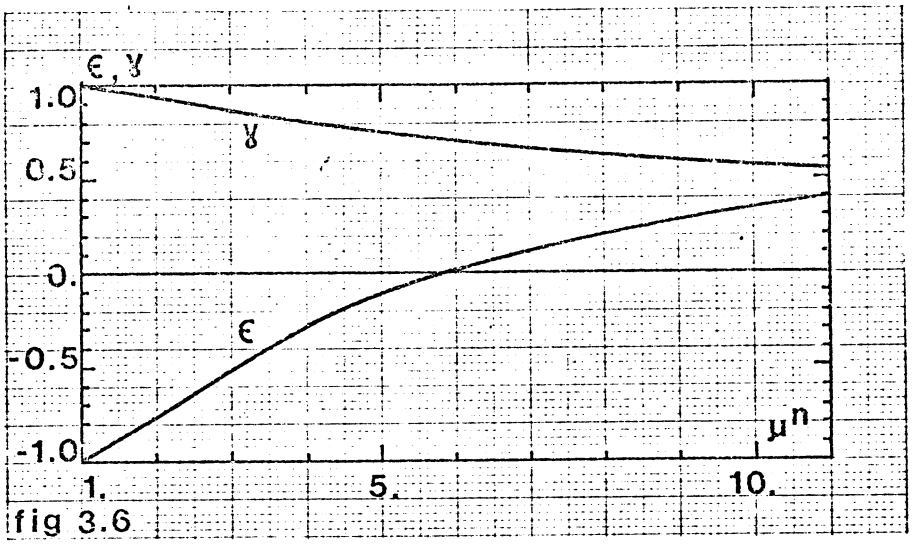


fig 3.6

Andra derivatans värde i sprickspetsarna ges av

$$\begin{cases} w''(\sigma_k) = \dfrac{w(\zeta)}{\zeta^2} \dfrac{2m\zeta^{-2m}}{\sqrt{(1+2\gamma_1\zeta^{-m}+\zeta^{-2m})(1+2\gamma_2\zeta^{-m}+\zeta^{-2m})}}\Bigg|_{\zeta=\sigma_k} \\ w''(\sigma_{2k-1}) = \dfrac{\mu Rm}{\sigma_{2k-1}} \cdot \dfrac{h(\mu)+h(\lambda)}{2(\mu^m-\mu^{-m})} \\ w''(\sigma_{2k}) = \dfrac{\lambda Rm}{\sigma_{2k}} \cdot \dfrac{h(\mu)+h(\lambda)}{2(\lambda^m-\lambda^{-m})} \end{cases} \qquad (3.46)$$

Om $\mu = \lambda$, n = 2 m och med γ ur (3.45) återfås (3.37) ur (3.46)

3.2.5. Vinkelsprickan.

Avbildningsfunktionen finns bl.a. hos Darwin /5/ m.fl. Den kan erhållas direkt ur Schwarz-Christoffelintegralen.

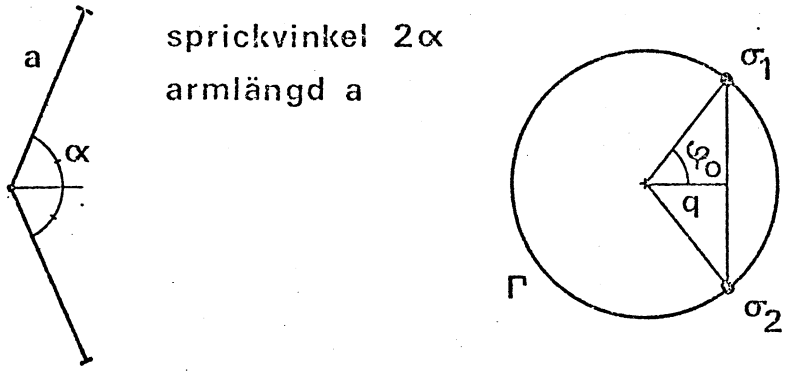


fig 3.7

Den kan skrivas

$$\begin{cases} w(\zeta) = A\,\zeta\,(1-\zeta^{-2})\left(\dfrac{1+\zeta^{-1}}{1-\zeta^{-1}}\right)^{q} \\ \\ \text{där } q = 1 - 2\alpha/\pi\,,\ \alpha \in (0,\pi) \Rightarrow q \in (-1,1) \end{cases} \tag{3.47}$$

Dess derivata

$$w'(\zeta) = A\,(1 - 2q\zeta^{-1} + \zeta^{-2})\left(\frac{1+\zeta^{-1}}{1-\zeta^{-1}}\right)^{q} \tag{3.48}$$

Sprickspetsarnas läge på Γ ges av

$$\sigma_{1,2} = q \pm i\sqrt{1-q^2} = e^{\pm i\arccos q} = e^{\pm i\varphi_o} \tag{3.49}$$

Sprickrötternas läge ges av $\zeta = \pm 1$ och konstanten A av

$$A = \frac{a}{2}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{q/2} \Big/ \sqrt{1-q^2} \tag{3.50}$$

När $\alpha = \pi/2$ blir $q = 0$ och den plana sprickan återfås.

Värdet på $w''(\zeta)$ i sprickspetsarna ges av

$$\begin{cases} w''(\sigma_{1,2}) = 2A\zeta^{-2}(q-\zeta^{-1})\left(\dfrac{1+\zeta^{-1}}{1-\zeta^{-1}}\right)^{q}\Bigg|_{\zeta=\sigma_{1,2}} \\ \\ w''(\sigma_{1,2}) = \dfrac{ae^{\pm i\alpha}}{\sigma_{1,2}^{\,2}} \end{cases} \tag{3.51}$$

3.3. Polynomapproximationer för avbildningsfunktionerna

Eftersom alla avbildningsfunktioner i avsnitt 3.2 har förgreningspunkter på enhetscirkeln måste de approximeras med lämpliga rationella funktioner eller polynom för att den komplexa metoden skall kunna användas och ge en lösning på sluten form. Det enklaste sättet är att serieutveckla $w(\zeta)$ och att avbryta utvecklingen efter lämpligt antal termer. Den så bildade avbildningsfunktionen $w_N(\zeta)$ approximerar den ursprungliga konturen med en annan som saknar spetsar, dvs $w_N' \neq 0$ när $\zeta \in \Gamma$. För att bevara spetskaraktären i geometrin krävde Bowie /7/ att $w_N' = 0$ för de punkter σ_k på Γ som svarar mot spetsarna. Senare har bl.a. Bowie /8/ och Kutter /3/ - /4/ dessutom krävt att $w_N''(\sigma_k) = w''(\sigma_k)$ så att den approximerade konturen i möjligaste mån ansluter till den ursprungliga i närheten av sprickspetsarna. Detta kan möjligen ibland ytterligare förbättras genom lämpligt val av N.

Serieformen för avbildningsfunktionerna måste vara

$$w(\zeta) = A\zeta \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^{-k} \quad , \quad |\zeta| \geq 1 \tag{3.52}$$

om den skall konvergera på och utanför enhetscirkeln. Polynomapproximationen $w_N(\zeta)$ blir

$$w_N(\zeta) = A\zeta \sum_{k=0}^{N} c_k \zeta^{-k} \quad , \quad |\zeta| \geq 1 \tag{3.53}$$

Om origo inte förflyttas blir $c_1 = 0$ och A kan väljas så att $c_0 = 1$. Detta gäller för alla studerade geometrier. Vidare kravet att

$$\begin{cases} w_N'(\sigma_k) = 0 \\ w_N''(\sigma_k) = w''(\sigma_k) \end{cases} \tag{3.54}$$

som kan uppfyllas genom lämpligt val av de sista koefficienterna vilket Bowie /8/ och Kutter /3/-/4/ gjort. Första delen av (3.54) blir automatiskt uppfylld om i stället för $w(\zeta)$ derivatan $w'(\zeta)$ serieutvecklas vilket här tas som utgångspunkt. Formen blir

$$\begin{cases} w'(\zeta) = A \prod_{k=1}^{n} (1 - \sigma_k/\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} c_k' \zeta^{-k} \quad , \quad |\zeta| > 1 \\ \sigma_k \triangleq \text{sprickspetsarnas läge på } \Gamma \end{cases} \tag{3.55}$$

För de olika geometrierna erhålles skilda former p.g.a. symmetriegenskaperna. Med förändrad innebörd av koefficienterna $\{c_k\}$ skrivs (3.53) för de rotationssymmetriska konturerna

$$w_N(\zeta) = A\zeta \sum_{k=o}^{N} c_k \zeta^{-kn} \text{ resp. } \zeta^{-km}, \quad |\zeta| \geq 1 \qquad (3.53)$$

Det är ingen skillnad mellan att å ena sidan serieutveckla avbildningsfunktionen $w(\zeta)$ och att å den andra serieutveckla dess derivata $w'(\zeta)$ som i (3.55) i och med villkoret (3.54). Sambandet mellan koefficienterna $\{c_k\}$ och $\{c_k'\}$ erhålles genom direkt integrering term för term. För att avbildningen skall vara konform fordras att $w_N'(\zeta) \neq 0$ för $|\zeta| > 1$ dvs att rötterna till polynomapproximationsdelen i (3.55) ligger i $|\zeta| < 1$.

3.3.1. Stjärnsprickan med lika långa armar.

Symmetriegenskaperna medför att polynomapproximationen för (3.55) blir något annorlunda

$$w_N'(\zeta) = A(1-\zeta^{-n}) \sum_{k=0}^{N-1} c_k' \zeta^{-kn} \tag{3.56}$$

Med Pochhammers symbol

$$\begin{cases} (a)_n = \prod_{k=1}^{n} (a+k-1) \\ (a)_0 = 1 \end{cases} \tag{3.57}$$

kan (3.16) utnyttjas till att ge

$$c_k' = (-1)^k \frac{(1-2/n)_k}{k!}, \quad k = 0,\ldots,N-2 \tag{3.58}$$

Värdet på c_{N-1}' bestäms av andra delen av (3.54) och derivering av (3.56), med

$$w_N''(\sigma_k) = AQ/\sigma_k \tag{3.59}$$

som ger

$$c_{N-1}' = Q/n - \sum_{k=0}^{N-2} c_k' \tag{3.60}$$

Sambanden mellan $\{c_k\}$ och $\{c_k'\}$ erhålles ur (3.53) och (3.56)

$$\begin{cases} c_j = (c_{j-1}' - c_j')/(jn-1), \quad j = 2,\ldots,N-1 \\ c_0 = c_0' = 1 \\ c_1 = \begin{cases} (c_0' - c_1')/(n-1), & n > 1 \\ 0, & n = 1 \end{cases} \\ c_N = c_{N-1}'/(Nn-1) \end{cases} \tag{3.61}$$

Speciellt för stjärnsprickan ges Q av (3.20)

$$Q/n = 2^{2/n-1} \tag{3.62}$$

Genom att välja N så att c_{N-2}' och c_{N-1}' blir så små som möjligt görs approximationen bättre. Ur (3.15) framgår att $w(\zeta)$ för $n = 2$ redan är ett polynom och serieutveckling är inte nödvändig.

3.3.2. Stjärnsprickan med armar av alternerande längd.

Symmetriegenskaperna ger som förut $w_N'(\zeta)$, $m \geq 2$

$$w_N'(\zeta) = A\,(1-\zeta^{-2m}) \sum_{k=o}^{N-2} c_k'\,\zeta^{-km} \tag{3.63}$$

Med den genererande funktionen för Gegenbauer- eller Ultrasfäriska polynomen $\{C_k^{(\alpha)}(x)\}$, Abramowitz och Stegun /9/ 22.9.3

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1-2xz+z^2)^{\alpha}} = \displaystyle\sum_{k=o}^{\infty} C_k^{(\alpha)}(x)\, z^k, \quad |z|<1 \\ \\ \text{där } \alpha > -1/2, \quad \alpha \neq 0 \end{cases} \tag{3.64}$$

ger (3.23) direkt med (3.27)

$$\begin{cases} c_k' = C_k^{(1-1/m)}((\delta^m - 1)/(\delta^m + 1)), \quad k = 0,\ldots,N-4 \\ \\ m \neq 1 \end{cases} \tag{3.65}$$

Värdena på c_{N-3}' och c_{N-2}' bestäms liksom förut av (3.54), med

$$\begin{cases} w_N''(\sigma_{2k-1}) = AQ_1/\sigma_{2k-1} \\ \\ w_N''(\sigma_{2k}) = AQ_2/\sigma_{2k} \end{cases} \tag{3.66}$$

erhålles

$$\begin{cases} c_{jämn}' = (Q_1+Q_2)/4m - \displaystyle\sum_{\substack{k=o \\ \text{jämna } k}}^{N-4} c_k' \\ \\ c_{udda}' = (Q_1-Q_2)/4m - \displaystyle\sum_{\substack{k=o \\ \text{udda } k}}^{N-4} c_k' \\ \\ \text{index för } c' = N-3 \text{ och } N-2 \end{cases} \tag{3.67}$$

och sambanden mellan $\{c_k\}$ och $\{c_k'\}$

$$\begin{cases} c_j = (c_{j-2}' - c_j')/(jm-1), \quad j = 2,\ldots,N-2 \\ c_o = c_o' = 1 \\ c_1 = \begin{cases} -c_1'/(m-1), & m > 1 \\ 0, & m = 1 \end{cases} \\ c_{N-1} = c_{N-3}'/((N-1)m-1) \\ c_N = \overline{c_{N-2}}'/(Nm-1) \end{cases} \tag{3.68}$$

Speciellt för denna geometri erhålles

$$\begin{cases} Q_1 = m\, 2^{1/m} \cdot \left[\dfrac{\delta^{m+1}}{2}\right]^{1-1/m} \\ Q_2 = m\, 2^{1/m} \cdot \left[\dfrac{\delta^{m+1}}{2\delta^m}\right]^{1-1/m} \end{cases} \tag{3.69}$$

Ur (3.21) och (3.22) framgår att när $m = 1$, dvs för den plana sprickan, är $w(\zeta)$ på polynomform och någon utveckling inte nödvändig.

Genom att välja N så att c_k' , $k = N-2,\ldots,N-5$ blir så små som möjligt görs approximationen bättre.

3.3.3. Cirkulärt hål med lika långa radiella sprickor.

Polynomapproximationen får i detta fall samma form som (3.55)

$$w_N'(\zeta) = A(1-\zeta^{-n}) \sum_{k=0}^{N-1} c_k' \zeta^{-kn} \tag{3.56}$$

Med den genererande funktionen till Jacobipolynomen $\{P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\}$, Abramowitz och Stegun /9/ 22.9.1

$$\begin{cases} \dfrac{(1-z+s(z))^{-\alpha}(1+z+s(z))^{-\beta}}{s(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(\alpha+\beta)} P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\, z^k \\ \text{där } s(z) = \sqrt{1-2xz+z^2}\ |z|<1 \text{ och } \alpha, \beta > -1 \end{cases} \tag{3.70}$$

samt (3.30) och (3.31)

$$w'(\zeta) = \frac{R}{\sqrt[n]{2(1-\epsilon)}}(1-\zeta^{-n}) \frac{\left[1+\zeta^{-n}+\sqrt{1+2\epsilon\zeta^{-n}+\zeta^{-2n}}\right]^{2/n}}{\sqrt{1+2\epsilon\zeta^{-n}+\zeta^{-2n}}} \tag{3.71}$$

erhålles

$$\begin{cases} c_k' = P_k^{(0,-2/n)}(-\epsilon),\ k = 0,\ldots,N-2 \\ n > 2 \end{cases} \tag{3.72}$$

och

$$A = R \sqrt[n]{\frac{2}{1-\epsilon}} = R\, 2^{-2/n} (\mu^n+1)^{2/n}/\mu,\ n \geq 1 \tag{3.73}$$

Koefficienten c_{N-1}' bestäms med (3.59) och (3.60) där

$$Q/n = 2^{2/n-1}\mu^2(\mu^n+1)^{1-2/n}/(\mu^n-1),\ n \geq 1 \tag{3.74}$$

som specialfall uppträder n = 1 och n = 2, för det senare gäller

$$w'(\zeta) = A(1-\zeta^{-2})\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1+\zeta^{-2}}{\sqrt{1+2\epsilon\zeta^{-2}+\zeta^{-4}}}\right] \tag{3.75}$$

Med den genererande funktionen för Legendrepolynom /9/, 22.9.12

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(-\epsilon)z^k \ , \ |z|<1 \ , |\epsilon|<1 \tag{3.76}$$

erhålles

$$\begin{cases} c_k' = \frac{1}{2}\left[P_{k-1}(-\epsilon) + P_k(-\epsilon)\right] \ , \ k = 1,\ldots,N-2 \\ \\ c_o' = 1 \ , \ n = 2 \end{cases} \tag{3.77}$$

Värdet på Q bestäms av (3.74) och (3.60) ger c_{N-1}'. För n = 1 erhålles

$$w'(\zeta) = A(1-\zeta^{-1})\left[\frac{1}{2}(1+\zeta^{-1}) + \frac{1}{2}\,\frac{1+(\epsilon+1)\zeta^{-1}+\zeta^{-2}}{\sqrt{1+2\epsilon\zeta^{-1}+\zeta^{-2}}}\right] \tag{3.78}$$

vilket ger

$$\begin{cases} c_k' = \frac{1}{2}\left[P_{k-2}(-\epsilon) + (\epsilon+1)P_{k-1}(-\epsilon) + P_k(-\epsilon)\right], \ k=2,\ldots,N-2 \\ \\ c_1' = 1 \\ \\ c_o' = 1 \ , \ n = 1 \end{cases} \tag{3.79}$$

Liksom för n = 2 ger (3.74) Q och (3.60) c_{N-1}'. Sambanden mellan $\{c_k\}$ och $\{c_k'\}$ ges av (3.61). N väljs som i 3.3.1.

3.3.4. Cirkulärt hål med radiella sprickor av alternerande längd.

Polynomapproximationen får i detta fall samma form som (3.63)

$$w_N'(\zeta) = A\,(1-\zeta^{-2m}) \sum_{k=o}^{N-2} c_k' \zeta^{-km} \tag{3.63}$$

Uttrycken (3.39) och (3.40) kan kombineras till

$$\begin{cases} w'(\zeta) = R\,\gamma^{-1/m}(1-\zeta^{-2m}) \dfrac{\left[\frac{1}{2}(S_1^{-1/2} + S_2^{-1/2})\right]^{2/m}}{(S_1 S_2)^{1/2-1/m}} \\ \text{där } S_{1,2} = 1 + 2\gamma_{1,2}\zeta^{-m} + \zeta^{-2m} \end{cases} \tag{3.80}$$

Med formler för operationer på potensserier, Ryshik och Gradstein /10/ s. 14 och uttrycken (3.64) och (3.73) kan serieutvecklingen för $w'(\zeta)$ i (3.80) skrivas ned. Först för uttrycket i täljaren

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}(S_1^{-1/2} + S_2^{-1/2}) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k \zeta^{-km}, \quad |\zeta|>1 \\ \text{där } a_k = \frac{1}{2}(P_k(1-\gamma_1)+P_k(1-\gamma_2)), \quad k = 0,1\ldots \end{cases} \tag{3.81}$$

och där potentiering av uttrycket T

$$\begin{cases} T^{2/m} = \sum_{k=o}^{\infty} a_k' \zeta^{-km}, \quad |\zeta|>1 \\ a_k' = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(2j/m-k+j)a_j a_{k-j}', \quad k = 1,2\ldots \\ a_o' = 1 \end{cases} \tag{3.82}$$

Sedan för uttrycket i nämnaren

$$\begin{cases} S_1 S_2^{1/m-1/2} = \sum_{k=o}^{\infty} b_k \zeta^{-km}, \quad |\zeta|>1 \\ b_k = \sum_{j=0}^{k} C_j^{(1/2-1/m)}(-\gamma_1) C_{k-j}^{(1/2-1/m)}(-\gamma_2), \quad k = 0,1\ldots \\ m > 2 \end{cases} \tag{3.83}$$

varpå slutligen (3.80) ger

$$\begin{cases} w_N'(\zeta) = R\,\gamma^{-1/m}(1-\zeta^{-2m}) \sum_{k=0}^{N-2} c_k'\,\zeta^{-km} \\ \\ c_k' = \sum_{j=0}^{k} b_j a_{k-j}' \;,\; k = 0,1\ldots,N-4,\; m > 2 \end{cases} \tag{3.84}$$

och

$$A = R\,\gamma^{-1/m} = R\left[(h(\mu) + h(\lambda))/4\right]^{1/m} \;,\; m \geq 1 \tag{3.85}$$

För m = 2 ger (3.80)

$$w'(\zeta) = A\,(1-\zeta^{-4})\left[\frac{1}{2}\,(S_1^{-1/2} + S_2^{-1/2})\right] \tag{3.86}$$

vilket med (3.76) ger

$$c_k' = \frac{1}{2}\left[P_k(-\gamma_1) + P_k(-\gamma_2)\right] \;,\; k = 0,1,\ldots N-4 \tag{3.87}$$

För m = 1 ger (3.80)

$$w'(\zeta) = A(1-\zeta^{-2})\left[\frac{1}{2}\,(1 + \frac{1}{2}\,(S_1+S_2)/(S_1S_2)^{1/2}\right] \tag{3.88}$$

och med (3.76)

$$\begin{cases} (S_1S_2)^{-/2} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k'\,\zeta^{-k} \;,\; |\zeta|>1 \\ \\ \text{där } b_k' = \sum_{j=0}^{k} P_j(-\gamma_1)P_{k-j}(-\gamma_2) \;,\; k = 0,1,\ldots \end{cases} \tag{3.89}$$

då

$$\frac{1}{2}(S_1+S_2) = 1 + (\gamma_1+\gamma_2)\zeta^{-1} + \zeta^{-2} \tag{3.90}$$

slutligen

$$\begin{cases} c_k' = \frac{1}{2}\left[b_k' + (\gamma_1+\gamma_2)b_{k-1}' + b_{k-2}'\right], \quad k = 2,\ldots,N-4 \\ c_1' = 0 \\ c_0' = 1 \end{cases} \tag{3.91}$$

Sambanden mellan $\{c_k\}$ och $\{c_k'\}$ ges av (3.68) och värdena på c_{N-3}' och c_{N-2}' av (3.66) och (3.67). För denna geometri ger (3.46)

$$\begin{cases} Q_1 = m\, 2^{2/m-1}\, \mu\, \dfrac{[h(\mu)+h(\lambda)]^{1-1/m}}{\mu^m - \mu^{-m}} \\ \\ Q_2 = m\, 2^{2/m-1}\, \lambda\, \dfrac{[h(\mu)+h(\lambda)]^{1-1/m}}{\lambda^m - \lambda^{-m}}, \quad m \geq 1 \end{cases} \tag{3.92}$$

Med (3.45) återfås ur (3.85) (3.73) och dessutom med $\mu = \lambda$ och $n = 2m$ (3.74) ur (3.92). N väljs som för 3.3.2.

3.3.5. Vinkelsprickan.

Symmetriegenskaperna ger att polynomapproximationen för (3.55) får formen

$$w_N'(\zeta) = A(1-2q\zeta^{-1}+\zeta^{-2}) \sum_{k=0}^{N-2} c_k' \zeta^{-k} \tag{3.93}$$

Med

$$\begin{cases} (1+\zeta^{-1})^q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-q)_k}{(1)_k} \zeta^{-k} \\ (1-\zeta^{-1})^q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q)_k}{(1)_k} \zeta^{-k}, \quad |\zeta|>1 \end{cases} \tag{3.94}$$

erhålles liksom t.ex. (3.84)

$$c_k' = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j(-q)_j(q)_{k-j}}{(1)_j(1)_{k-j}}, \quad k = 0,1,\ldots N-4 \tag{3.95}$$

Koefficienterna c_{N-3}' och c_{N-2}' bestäms liksom förut av (3.54). Derivering av (3.93) ger tillsammans med (3.51) och (3.49)

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N-2} c_k'(\cos k\varphi_o - i\sin k\varphi_o) = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{q/2}(\sin\alpha - i\cos\alpha) \\ \varphi_o = \arccos q \\ q = 1 - 2\alpha/\pi \end{cases} \tag{3.96}$$

varur c_{N-3}' och c_{N-2}' löses

$$\begin{cases} c_{N-3}' = [B_1\sin(N-2)\varphi_o - B_2\cos(N-2)\varphi_o]/\sin\varphi_o \\ c_{N-2}' = -[B_1\sin(N-3)\varphi_o - B_2\cos(N-3)\varphi_o]/\sin\varphi_o \end{cases} \tag{3.97}$$

där

$$\begin{cases} B_1 = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{q/2} \sin\alpha - \sum_{k=o}^{N-4} c_k' \cos k\varphi_o \\ B_2 = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{q/2} \cos\alpha - \sum_{k=o}^{N-4} c_k' \sin k\varphi_o \end{cases} \qquad (3.98)$$

Sambanden mellan $\{c_k\}$ och $\{c_k'\}$ erhålles direkt vid en jämförelse mellan (3.93), (3.95) och (3.53)

$$\begin{cases} c_k = -(c_{k-2}' - 2qc_{k-1}' + c_k')/(k-1), \quad k=2,\ldots,N-2 \\ c_o = c_o' = 1 \\ c_1 = 0 \\ c_{N-1}' = -(c_{N-3}' - 2q\, c_{N-2}')/(N-2) \\ c_N = -c_{N-2}'/(N-1) \end{cases} \qquad (3.99)$$

N väljs så att c_k', $k = N-2,\ldots,N-5$ blir så små som möjligt.

3.4. Bestämning av de komplexa spänningsfunktionerna.

3.4.1. Spänningsfunktionernas egenskaper.

De komplexa spänningsfunktionerna får för expansionskrafter formen

$$\begin{cases} f_N(\zeta) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k \zeta^{-k} \\ g_N(\zeta) = \sum_{k=o}^{\infty} b_k \zeta^{-k} \end{cases} \qquad (3.14)$$

där $f_N(\zeta)$ och $g_N(\zeta)$ är holomorfa för $|\zeta| > 1$ .. För de fyra första geometrierna i avsnitt 3.2 skall spänningstillståndet vara oberoende av en rotation $\varphi_k = 2\pi k/n$ eller m där k,n och m är naturliga tal. Då $w_N'(\zeta) = w_N'(\zeta \cdot e^{i\varphi k})$ medför den fundamentala spänningskombinationen ur (3.5) som skrivs

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta = 4\mathrm{Re}\left\{f_N'(\zeta)/w_N'(\zeta)\right\} = 4\mathrm{Re}\left\{f_N'(\zeta \cdot e^{i\varphi k})/w_N'(\zeta \cdot e^{i\varphi k})\right\} \qquad (3.100)$$

och där (r,e) är polära koordinater i det fysiska planet att bortsett från en godtycklig imaginär konstant måste gälla

$$f_N'(\zeta \cdot e^{i\varphi k}) = f_N'(\zeta) \qquad (3.101)$$

Följaktligen kan med en omdefiniering av koofficienterna a_k i (3.14) $f_N(\zeta)$ skrivas om $f_N(\infty) = 0$.

$$f_N(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{1-kn \text{ eller } 1-km} \; ; \; n,m > 1 \qquad (3.102)$$

Man inser också p.g.a. spänningstillståndets symmetri kring den reella axeln att alla $\{a_k\}$ måste vara reella då $\{c_k'\}$ är det. Detta gäller också för vinkelsprickan och det cirkulära hålet när n,m = 1 men $f_N(\zeta)$ behålls där på den ursprungliga formen (3.14).

Liknande överläggningar kan göras för $g_N(\zeta)$.

Randvillkoret som $f_N(\zeta)$ och $g_N(\zeta)$ skall uppfylla på Γ (3.11) lyder för expansionskrafter

$$\begin{cases} f_N(\sigma) + w_N(\sigma)\overline{f_N'(\sigma)/w_N'(\sigma)} + \overline{g_N(\sigma)} = F(\sigma) \\ F(\sigma) = i\int_S (X_n + iY_n)ds + c \end{cases} \qquad (3.103)$$

Vi skall nu studera egenskaperna på Γ för $f_N(\zeta)$ och $g_N(\zeta)$, speciellt spetsarna på konturen där $w_N'(\zeta) = 0$. Spänningssingulariteten där $\sigma_x + \sigma_y \sim 1/\sqrt{r}$ vid spetsen på en spricka z_k medför att $f_N'(z) \sim 1/\sqrt{z-z_k}$. Utnyttjas övergången till bildplanet med avbildningsfunktionen $z = w_N(\zeta)$ och dess Taylorutveckling kring sprickspetsen där $w_N'(\sigma_k) = 0$ vilket medför att $w_N(\zeta) \propto (\zeta - \sigma_k)^2$ och $w_N'(\zeta) \propto (\zeta - \sigma_k)$, se t.ex. (3.173), inses med (3.100) att $f_N'(\sigma_k)$ är begränsad och skild från 0. Då spänningarna på den approximerade konturens rand är begränsade i övrigt, utom i eventuella kraftangreppspunkter, gäller att $f_N(\zeta)$ är kontinuerlig på Γ ev. kraftangreppspunkter undantagna. Av det kompiexkonjugerade randvillkoret i (3.103) framgår sedan att spetsar i den fysiska konturen avspeglas i att $g_N(\zeta)$ har enkelpoler i spetsarnas motsvarigheter på Γ $\zeta = \sigma_k$ varför $g_N(\zeta)$ är kontinuerlig på Γ utom i dessa punkter och ev. kraftangreppspunkter.

För att bestämma storheter som spänningsintensitetsfaktorer och gasvolym etc behövs enbart kännedom om $f_N(\zeta)$ vilken bestäms genom Cauchyintegrering av RV.-ekvationen (3.103). $g_N(\zeta)$ kan bestämmas genom Cauchyintegrering av det komplexkonjugerade sambandet.

3.4.2. Studium av de singulära termerna i R.V.-ekvationen.

Den första termen i R.V.-ekvationen (3.103) $f_N(\sigma)$ utgör randvärdet på Γ till en funktion $f_N(\zeta)$ som är holomorf för $|\zeta| > 1$ och kontinuerlig på Γ varför elementära satser om Cauchyintegraler kan tillämpas direkt. Både andra och tredje termerna däremot har enkelpoler på Γ som försvårar integrationen.

Låt oss studera Cauchyintegralen av en funktion $h(\zeta)$ som har enkelpoler på Γ och vars Laurentutveckling för $|\zeta| < 1$ endast har poler i origo. $h(\zeta)$ kan då delas upp i två delar, dels principaldelen $h_-(\zeta)$ som är holomorf för $|\zeta| > 1$ och kontinuerlig på Γ dels den analytiska delen som är holomorf för $|\zeta| < 1$ men ej kontinuerlig på Γ. Då singulariteterna på Γ förutsattes bestå av enkelpoler i punkterna $\zeta = \sigma_k'$ kan följande uppdelning av $h(\zeta)$ göras.

$$\begin{cases} h(\zeta) = h_-(\zeta) + i_+(\zeta)/P(\zeta) \\ \text{där} \\ P(\zeta) = \prod_{k=1}^{n} (\zeta - \sigma_k') \end{cases} \qquad (3.104)$$

är ett polynom i ζ av n:te graden och $i_+(\zeta)$ en funktion som är holomorf för $|\zeta| < 1$ och kontinuerlig på Γ. För att isolera singulariteterna görs en ytterligare uppdelning av $h(\zeta)$

$$h(\zeta) = h_-(\zeta) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[i_+(\zeta) - i_+(\sigma_k')\right]/P(\zeta) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} i_+(\sigma_k')/P(\zeta) \qquad (3.105)$$

där den andra termen i H.L. är holomorf för $|\zeta| < 1$ och kontinuerlig på Γ. Kända satser för Cauchyintegraler ger

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma,|\zeta|>1} \frac{h(\sigma)d\sigma}{\sigma - \zeta} = -h_-(\zeta) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} i_+(\sigma_k') \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma,|\zeta|>1} \frac{d\sigma}{P(\sigma)(\sigma - \zeta)} \qquad (3.106)$$

där integralen i högerledet är singulär. Om nu $1/P(\zeta)$ partialbråks uppdelas kan denna skrivas

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma,|\zeta|>1} \frac{d\sigma}{P(\sigma)(\sigma - \zeta)} = \sum_{k=1}^{n} P_k \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma,|\zeta|>1,\,|\sigma_k'|=1} \frac{d\sigma}{(\sigma - \sigma_k^{-1})(\sigma - \zeta)} \qquad (3.107)$$

Efter ytterligare uppdelning av integranden i H.L. erhålles

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma,|\zeta|>1,\,|\sigma_k'|=1} \frac{d\sigma}{(\sigma - \sigma_k')(\sigma - \zeta)} = -\frac{1}{\zeta - \sigma_k'} \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma,|\zeta|>1,\,|\sigma_k'|=1} \frac{d\sigma}{\sigma - \sigma_k'} \qquad (3.108)$$

där den singulära integralen i H.L. betraktas som funktion av σ_k'. Principalvärdet existerar och kan enkelt beräknas med Plemeljs formler, det är = 1/2. Slutligen ger så (3.106)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma,|\zeta|>1}\frac{h(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta} = -h_-(\zeta) - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} i_+(\sigma_k')/P(\zeta) \qquad (3.109)$$

Låt den tredje termen i (3.103) $\overline{g_N(\sigma)}$ utgöra gränsvärde på Γ av funktionen $\overline{g_N}(1/\zeta)$ där

$$\overline{g_N}(1/\zeta) = \overline{g_N(1/\bar{\zeta})} \qquad (3.110)$$

Då $g_N(\zeta)$ är holomorf för $|\zeta| > 1$ och kontinuerlig på Γ utom i punkterna $\zeta = \sigma_k$ så är $\overline{g_N}(1/\zeta)$ holomorf för $|\zeta| < 1$ och kontinuerlig på Γ utom för $\zeta = \sigma_k' = 1/\bar{\sigma}_k = \sigma_k$. Den uppfyller således villkoren för funktionen $h(\zeta)$ ovan som ett specialfall vars Laurentutveckling för $|\zeta| < 1$ saknar principaldel. Således försvinner bidraget till Cauchyintegralen av $\overline{g_N(\sigma)}$ från första termen i H.L. i (3.109). En liknande överläggning görs för den andra termen i (3.103) med $w_N(\sigma)\cdot\overline{f_N'(\sigma)/w_N'(\sigma)}$ som gränsvärde till funktionen $w_N(\zeta)\cdot\overline{f_N'(1/\zeta)/w_N'(1/\zeta)}$. Principaldelen av funktionens Laurentutveckling för $|\zeta| < 1$ betecknas med $D_o(\zeta)$. Med (3.109) och (3.104) erhålles de singulära termernas bidrag

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma,|\zeta|>1}\left[w_N(\sigma)\cdot\overline{f_N'(\sigma)/w_N'(\sigma)}+\overline{g_N(\sigma)}\right]\cdot\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} =$$

$$= -D_o(\zeta) - \frac{1}{2n}\cdot\sum_{k=1}^{n} P(\sigma)\cdot\left[w_N(\sigma)\cdot\overline{f_N'(\sigma)/w_N'(\sigma)} - D_o(\sigma) + \overline{g_N(\sigma)}\right]/P(\zeta) =$$

$$\sigma=\sigma_k$$

$$= -D_o(\zeta) + \frac{1}{2n}\cdot\sum_{k=1}^{n} P(\sigma)\cdot\left[f_N(\sigma) + D_o(\sigma) - F(\sigma)\right]/P(\zeta) \qquad (3.111)$$

$$\sigma=\sigma_k=\sigma_k'$$

där R.V.-ekvationen (3.103) utnyttjats i sista ledet. Då alla funktionerna i parentesen är kontinuerliga på Γ utom i ev. kraftangreppspunkter och $P(\sigma_k') = 0$ definitionsmässigt inses att den singulära termen i H.L. = 0 och följaktligen att det enda bidrag som de bägge singulära termerna i R.V.-ekvationen (3.103) ger vid Cauchyintegrering av densamma är principaldelen $-D_o(\zeta)$ i (3.111).

3.4.3. Integrering av randvillkorsekvationen.

Först definieras lastintegralen $A_o(\zeta)$ vilken beror av lastens fördelning över sprickranden som

$$A_o(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(\sigma)d\sigma}{\sigma - \zeta}, \quad |\zeta| > 1 \tag{3.112}$$

Den formella integrationen av R.V.-ekvationen (3.103) ger likt /2/ § 6.3 och /1/ § 84

$$f_N(\zeta) + D_o(\zeta) = - A_o(\zeta) \tag{3.113}$$

där principaldelen $D_o(\zeta)$ av funktionens $w_N(\zeta)\cdot \overline{f_N'}(1/\zeta)/\overline{w_N'}(1/\zeta)$ Laurentutveckling för $|\zeta| < 1$ innehåller koefficienterna $\{a_k\}$ i $f_N(\zeta)$:s serierepresentation vilket lastintegralen $A_o(\zeta)$ inte gör. Resten av avsnittet ägnas åt att bestämma formen hos $D_o(\zeta)$ medan lastintegralen studeras i avsnitt 3.5.

För konturerna med rotationssymmetri, dvs stjärnsprickan och det cirkulära hålet när $n,m > 1$, ger (3.53) och (3.56) när sprickarmarna är lika långa

$$\begin{cases} w_N(\zeta) = A\,\zeta \sum_{k=o}^{N} c_k \zeta^{-kn} = A\zeta^{1-Nn} \cdot \sum_{k=o}^{N} c_{N-k}\zeta^{kn} \\ \overline{w_N'}(1/\zeta) = A(1-\zeta^n) \sum_{k=o}^{N-1} c_k'\zeta^{kn} = A \sum_{k=o}^{N} (1-kn)c_k\zeta^{kn} \end{cases} \tag{3.114}$$

Då $w_N(\zeta)$ är holomorf för $|\zeta| > 1$ utom i oändligheten blir $\overline{w_N'}(1/\zeta)$ holomorf för $|\zeta| < 1$ där dessutom $\overline{w_N'}(1/\zeta) \neq 0$. Utveckling i Laurentserie för $|\zeta| < 1$ av $w_N(\zeta)/\overline{w_N'}(1/\zeta)$ ger

$$\begin{cases} w_N(\zeta)/\overline{w_N'}(1/\zeta) = \sum_{k=1}^{N} d_k \zeta^{1-kn} + \sum_{k=o}^{\infty} d_{-k}\zeta^{1+kn} \\ \text{där} \\ d_k = c_k/c_o + \sum_{j=1}^{N-k} (jn-1)d_{k+j}c_j/c_o^2, \quad k = 0,\ldots,N \end{cases} \tag{3.115}$$

Derivering av (3.102) ger

$$\overline{f_N'}(1/\zeta) = - \sum_{k=1}^{\infty} (kn-1)a_k\zeta^{kn}, \quad |\zeta| < 1 \tag{3.116}$$

och slutligen principaldelen

$$\begin{cases} D_o(\zeta) = \sum_{k=1}^{N-1} D_k \zeta^{1-kn} \\ \text{där} \\ D_k = - \sum_{j=1}^{N-k} (jn-1) a_j d_{k+j} \,, \quad k = 1,\ldots,N-1 \end{cases} \tag{3.117}$$

sambandet (3.113) blir

$$f_N(\zeta) + \sum_{k=1}^{N-1} D_k \zeta^{1-kn} = - A_o(\zeta) \tag{3.118}$$

där identifiering av koefficienter för ζ -termer med samma gradtal ger ett ekvationssystem i $\{a_k\}$ och där det kända högerledet utgörs av lastintegralen $- A_o(\zeta)$.

Som specialfall uppträder den plana sprickan, stjärnsprickan för $n = 2$, vars avbildningsfunktion $w(\zeta)$ är ett polynom med $N = 1$ för vilken följaktligen principaldelen $D_o(\zeta) \equiv 0$. Spänningsfunktionen $f(\zeta)$ ges i detta fall direkt av (3.113)

$$f(\zeta) = - A_o(\zeta) \tag{3.119}$$

Uttrycken gäller också för olika långa armar om m ersätter n.

För vinkelsprickan och det cirkulära hålet när $n,m = 1$ vilka är spegelsymmetriska i den reella axeln erhålles med

$$\begin{cases} w_N(\zeta) = A \zeta^{1-N} \sum_{k=o}^{N} c_{N-k} \zeta^k \\ \overline{w_N'}(1/\zeta) = A \sum_{k=o}^{N} (1-k) c_k \zeta^k \end{cases} \tag{3.120}$$

följande uttryck för $D_o(\zeta)$

$$\begin{cases} D_o(\zeta) = \sum_{k=1}^{N-3} D_k' \zeta^{-k} \\ \text{där} \\ D_k' = - \sum_{j=1}^{N-k-2} j a_j d_{k+j+2}, \quad k = 1,\ldots N-3 \end{cases} \tag{3.121}$$

sambandet (3.113) blir

$$f_N(\zeta) + \sum_{k=1}^{N-3} D_k' \zeta^{-k} = - A_o(\zeta) \qquad (3.122)$$

varigenom $f_N(\zeta)$ i princip är bestämd. I nästa avsnitt bestäms lastintegralerna för några olika fall av expansionskrafter.

3.5. Bestämning av lastintegralerna

Ett samband för spänningsfunktionen $f_N(\zeta)$ har bestämts i avsn. 3.4 för expansionskrafter på randen i vilket lastintegralen $A_o(\zeta)$ ingår.

För tre olika fall varav två utgör specialfall av det tredje skall lastintegralen $A_o(\zeta)$ beräknas, nämligen:

1. Ett jämnt fördelat inre övertryck för alla geometrierna.
2. Centralt angripande krafter som verkar mitt emellan sprickorna för den stjärnformade sprickan och vinkelsprickan.
3. Ett inre övertryck som inte fyller ut geometrin helt för stjärnsprickan och det cirkulära hålet.

Stjärnsprickan med lika långa armar utsatt för inre övertryck har studerats bl.a. av Westmann /11/ och Williams /12/ med Mellintransformer och Wiener-Hopfteknik och av Kutter /3/-/4/ med Muskhelishvilis teknik, det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor av Bowie /7/ och Kutter /3/-/4/ med den sista metoden.

3.5.1 Ett jämt fördelat inre övertryck.

För detta fall ger t.ex. Persson /2/ ex. 18, p är trycket

$$F(\sigma) = - p w_N(\sigma) \tag{3.123}$$

Då $w_N(\zeta)$ är holomorf för $|\zeta| > 1$ utom en pol av första ordningen när $|\zeta| \to \infty$ erhålles med satser för Cauchyintegraler när $|\zeta| > 1$

$$A_o(\zeta) = p[w_N(\zeta) - Ac_o\zeta] \ , \ |\zeta| > 1 \tag{3.124}$$

3.5.2. Centralt angripande krafter.

För stjärn- och vinkelsprickan betraktas centralt angripande krafter mitt emellan sprickorna, se fig. 3.8 för stjärnsprickan.

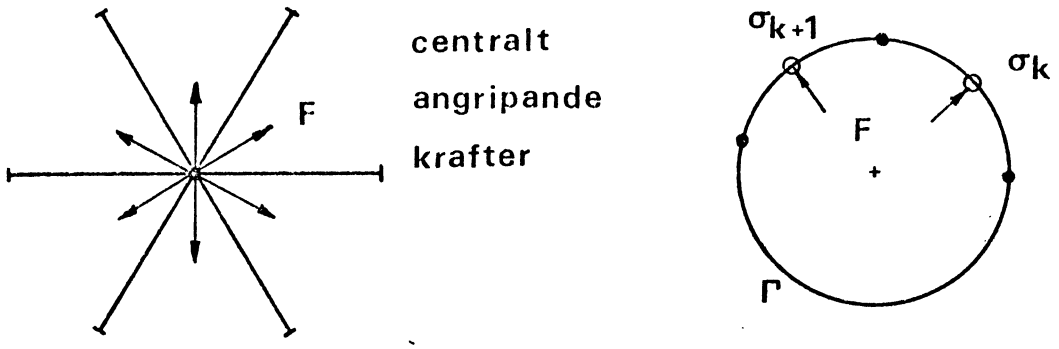


fig 3.8

De är lika stora och radiellt riktade. Enligt Persson /2/ § 6.34 blir detta resultatet om $F(\sigma)$ är konstant mellan de punkter på Γ som svarar mot kraftangreppspunkterna och i dessa ändras språngvis så mycket att språngets storlek svarar mot kraftens belopp. Krafternas riktningar ges för stjärnsprickan av

$$e^{i\varphi_k} = e^{i\pi(2k-1)/n}, \quad k = 1,\ldots,n \tag{3.125}$$

Angreppspunkternas motsvarigheter på Γ är, se (3.26) $\zeta = \sigma_k^{-}$

$$\sigma_k = e^{i[\varphi_k+(-1)^k\Delta]}, \quad k = 1,\ldots,n \tag{3.126}$$

som när sprickarmarna är lika långa sammanfaller med (3.125).
På de olika bågintervallen på Γ ges $F(\sigma)$ av

$$\begin{cases} \text{Båge} & F(\sigma) - c \\ \sigma_n\,\sigma_1 = \sigma_o\,\sigma_1 & 0 \\ \sigma_1\,\sigma_2 & -iFe^{i\varphi_1} \\ \sigma_2\,\sigma_3 & -iF(e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}) \\ \sigma_{n-1}\,\sigma_n & -iF\sum_{k=1}^{n-1} e^{i\varphi_k} \\ \sigma_n\,\sigma_1 & -iF\sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi_k} = 0 \end{cases} \tag{3.127}$$

Sista ledet i (3.127) följer av att lasten är balanserad. Värdet på konstanten c bestäms av att förskjutningarna skall sakna stelkroppskomponenter vilket är fallet om $F(\sigma)$ uppvisar samma symmetriegenskaper som $f_N(\sigma)$, jfr. (3.101). Med (3.125) och (3.127) inses att det blir så om c väljs.

$$c = -\frac{F}{2\sin \pi/n} \tag{3.128}$$

Konstanten bidrar ej till lastintegralen $A_o(\zeta)$ i (3.112) som beräknas som ett antal linjeintegraler längs Γ

$$A_o(\zeta) = -\frac{F}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi_k} \int_{\sigma_k}^{\sigma_n} \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{3.129}$$

Liksom förut inses att integralens övre gräns inte bidrar så att

$$A_o(\zeta) = \frac{F}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi_k} \ln(\sigma_k-\zeta) \tag{3.130}$$

Efter serieutveckling av ln-termerna för $|\zeta| \geq 1$ erhålles med (3.126) för stjärnsprickan

$$A_o(\ ) = -\frac{Fm}{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(2km-1)\Delta}{2km-1} \zeta^{1-2km} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(2km-m-1)\Delta}{2km-m-1} \zeta^{1+m-2km}\right\} \tag{3.131}$$

som konvergerar överallt på Γ utom i kraftangreppspunkterna. Sprickarmarnas längdförhållande δ bestämmer Δ, se (3.27)

$$\Delta = \frac{1}{m} \arcsin\left(\frac{\delta^m-1}{\delta^m+1}\right) \tag{3.27}$$

När armarna är lika långa, $\delta = 1$ ger $\Delta = 0$, så ger (3.131) med $m = n/2$

$$A_o(\zeta) = -\frac{Fn}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kn-1} \zeta^{1-kn} \tag{3.132}$$

När längdförhållandet blir litet, $\delta \ll 1$ ger $\Delta \approx -\pi/2m$, ger (3.131)

$$A_o(\zeta) = -2F\cos \pi/2m \cdot \frac{m}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{km-1} \zeta^{1-km} \qquad (3.133)$$

som svarar mot uttrycket för lika långa sprickor (3.132) fast halva antalet $m = n/2$ och en kraft som är resultanten av två F vilka bildar vinkeln $2\pi/n = \pi/m$ med varandra.

För numerisk beräkning av spänningsintensitetsfaktorerna behövs värdet på $A_o'(\zeta)$ i sprickspetsarna. Derivering av (3.130) ger

$$A_o'(\zeta) = -\frac{Fm}{\pi} \cdot \frac{[\cos(2m-1)\Delta + \cos\Delta\,\zeta^{-2m}]\zeta^{-2m} - [\sin(m-1)\Delta - \sin(m+1)\Delta\,\zeta^{-2m}]\zeta^{-m}}{1+2\cos 2m\Delta\,\zeta^{-2m} + \zeta^{-4m}} \qquad (3.134)$$

som ger värdet i sprickspetsarna $\zeta^m = \pm 1$

$$A_o'(\zeta^m = \pm 1) = -\frac{Fm}{2\pi} \cdot \frac{\cos(m-1)\Delta \pm \sin\Delta}{\cos m\Delta} \qquad (3.135)$$

I gränsen när $\delta \ll 1$ resp. $\delta \gg 1$ gäller (3.135) inte då kraftangreppspunkterna kommer allt närmare de korta sprickornas spetsar.

För vinkelsprickan ges $F(\sigma)$ t.ex. av

$$F(\sigma) = \begin{cases} -iF/2 & \text{på bågen } (0,\pi) \\ iF/2 & (\pi, 2\pi) \end{cases} \qquad (3.136)$$

som medför för $|\zeta| \geq 1$, $\sigma \neq \pm 1$

$$A_o(\zeta) = -\frac{F}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta^{1-2k}/(2k-1) \qquad (3.137)$$

och

$$A_o'(\zeta) = \frac{F}{\pi} \cdot \frac{1}{\zeta^2 - 1} \qquad (3.138)$$

3.5.3. Partiellt inre övertryck.

För två geometrier bestäms $A_o(\zeta)$ i detta fall, för stjärnsprickan med lika långa armar där gasen har trängt in i sprickorna en godtycklig bråkdel η av spricklängden och för det cirkulära hålet där gastrycket verkar enbart över hålranden.

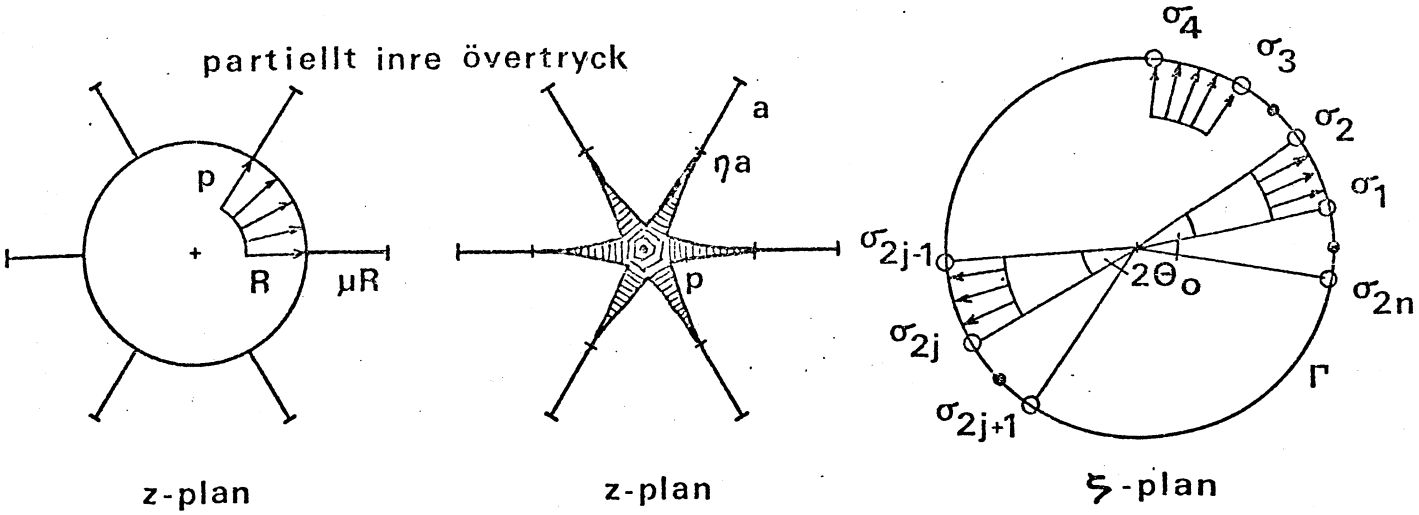


fig 3.9

Lastfunktionen $F(\sigma)$ på de olika bågintervallen på Γ

$$
\begin{cases}
\text{Båge} & & F(\sigma)\text{-c} \\
\text{1:a obelastade} & \sigma_{2n}\ \sigma_1 & 0 \\
\text{1:a belastade} & \sigma_1\ \sigma_2 & -p\,[w_N(\sigma)-w_N(\sigma_1)] \\
\text{2:a obelastade} & \sigma_2\ \sigma_3 & -p\,[w_N(\sigma_2)-w_N(\sigma_1)] \\
\text{j:e belastade} & \sigma_{2j-1}\ \sigma_{2j} & -p\,[w_N(\sigma)-w_N(\sigma_{2j-1})]-p\sum_{k=1}^{j-1}[w_N(\sigma_{2k})-w_N(\sigma_{2k-1})] \\
\text{(j+1):a obel.} & \sigma_{2j}\ \sigma_{2j+1} & -p\sum_{k=1}^{j}[w_N(\sigma_{2k})-w_N(\sigma_{2k-1})] \\
\text{n:e belastade} & \sigma_{2n-1}\ \sigma_{2n} & -p\,[w_N(\sigma)-w_N(\sigma_{2n-1})]-p\sum_{k=1}^{n-1}[w_N(\sigma_{2k})-w_N(\sigma_{2k-1})]
\end{cases}
\qquad (3.139)
$$

Värdet på konstanten c ges i detta fall av

$$c = -pA/\sin\pi/n \cdot \left| \sum_{k=o}^{N} (-1)^k c_k \sin(kn-1)\theta_o \right| \qquad (3.140)$$

där c inte bidrar till lastintegralen.

Själva lastintegralen uttrycks, index - betecknar undre intervallgräns

$$A_o(\zeta) = \frac{p}{2\pi i}\left\{ - \sum_{bel}^{int} \int \frac{w_N(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta} + \sum_{bel}^{int} w_- \int \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} - \sum_{alla}^{int} \sum_{1}^{j-1} [w_{2k}-w_{2k-1}] \int \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} \right\} \tag{3.141}$$

två typer av integraler uppträder vid beräkningen av $A_o(\zeta)$, se /10/ 2.112.1 och 2.117.4, $n > 1$ och $w_N(\sigma)$ ges av (3.53)

$$\begin{cases} \int \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = \ln(\sigma-\zeta) \\ \int \frac{w_N(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta} = A\left\{ c_o[\sigma + \ln(\sigma-\zeta)] + \sum_{k=1}^{N} c_k \zeta^{1-kn} \ln\frac{\sigma-\zeta}{\sigma} + \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{j=1}^{kn-2} \frac{\zeta^{-j}\sigma^{-(kn-1-j)}}{kn-1-j} \right\} \end{cases} \tag{3.142}$$

Vid summering av den undre integralen över alla belastade intervall kommer endast polynomtermer σ^{jn} där $j = 1,2,\ldots$ att ge något bidrag eftersom vinkeln mellan två följande övre eller undre intervallgränser σ_j och σ_{j+2} är $2\pi/n$. Utnyttjas (3.53) erhålles

$$\sum_{bel}^{int} \int \frac{w_N(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta} = \sum_{bel}^{int} \left\{ w_N(\zeta)\ln(\sigma-\zeta) - [w_N(\zeta) - Ac_o\zeta]\ln\sigma + A\sum_{k=2}^{N} c_k \sum_{j=1}^{k-1} \zeta^{1-jn} \frac{\sigma^{-(k-j)n}}{(k-j)n} \right\} \tag{3.143}$$

Vidare räkningar ger bidraget från första termen i (3.141) för $|\zeta| \geq 1$ och $\sigma \neq \sigma_j$

$$A_{o1}(\zeta) = \frac{p}{\pi}\left\{ -\frac{1}{2i} w_N(\zeta) \ln\left[\frac{\zeta^n + e^{in\theta_o}}{\zeta^n + e^{-in\theta_o}}\right] + n\theta_o [w_N(\zeta) - Ac_o\zeta] + A\sum_{k=2}^{N} c_k \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} \frac{\sin(k-j)n\theta_o}{k-j} \zeta^{1-jn} \right\} \tag{3.144}$$

För den plana sprickan, $n = 2$ och $N = 1$, ger den summan i (3.144) inget bidrag.

Bidraget från övriga termer i (3.141) blir

$$A_{o2}(\zeta) = \frac{p}{2\pi i} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left\{ w_N(\sigma_{2k-1}) \int_{\sigma_{2k-1}}^{\sigma_{2k}} \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} - [w_N(\sigma_{2k}) - w_N(\sigma_{2k-1})] \int_{\sigma_{2k}}^{\sigma_{2n}} \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} \right\} \tag{3.145}$$

Beräkningar ger $A_o(\zeta)$

$$A_o(\zeta) = \frac{pA}{\pi}\Big\{ n\theta_o[w_N(\zeta)/A - c_o\zeta] - w_N(\zeta)/2iA \cdot \ln\left[\frac{\zeta^n + e^{in\theta_o}}{\zeta^n + e^{-in\theta_o}}\right]$$

$$+ \sum_{k=2}^{N} c_k \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} \frac{\sin(k-j)n\theta_o}{k-j} \zeta^{1-jn}$$

(3.146)

$$+n\sum_{j=o}^{N} (-1)^j c_j \sin(jn-1)\theta_o \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(kn-1)\theta_o}{kn-1} \zeta^{1-kn}$$

$$-n\sum_{j=o}^{N} (-1)^j c_j \cos(jn-1)\theta_o \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(kn-1)\theta_o}{kn-1} \zeta^{1-kn} \Big\}$$

På en form som är mer anpassad till numeriska beräkningar

$$A_o(\zeta) = \frac{pA}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \zeta^{1-kn} \left[n\theta_o c_k + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k+1-j} c_{j-1} \frac{\sin(k+1-j)n\theta_o}{k+1-j} \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{N-k} (-1)^j c_{k+j} \frac{\sin jn\theta_o}{j}$$

$$+n \cdot \frac{(-1)^k \cos(kn-1)\theta_o}{kn-1} \cdot \sum_{j=o}^{N} (-1)^j c_j \sin(jn-1)\theta_o$$

$$\left. -n \cdot \frac{(-1)^k \sin(kn-1)\theta_o}{kn-1} \cdot \sum_{j=o}^{N} (-1)^j c_j \cos(jn-1)\theta_o \right]$$

$$+ \text{termer av gradtal} \geq \zeta^{1-Nn} \qquad (3.147)$$

Värdet på θ_o som uttrycker hur stor del av enhetscirkelns rand som svarar mot den belastade delen i den verkliga geometrin ges av (3.33) och (3.15) för resp. geometrier

$$\theta_o = \begin{cases} 1/n \cdot \arccos[\epsilon(\mu)] & \text{cirkulärt hål} \\ 2/n \cdot \arcsin(\eta^{n/2}) & \text{stjärnspricka} \end{cases} \qquad (3.148)$$

där (3.35) ger $\epsilon(\mu)$

$$\epsilon = -1 + 2\left[(\mu^n-1)/(\mu^n+1)\right]^2,\ \mu\in[1,\infty) \tag{3.35}$$

I gränsen när lasten täcker en allt större del av randen, $\eta \to 1$ för stjärnsprickan och $\mu \to 1$ resp. $\epsilon \to -1$ för cirkulära hålet medför att $\theta_o \to \pi/n$, ger endast första termen i (3.146) något bidrag då de två sista tar ut varandra.

$$\lim_{\theta_o \to \pi/n} A_o(\zeta) = p\left[w_N(\zeta) - Ac_o\zeta\right] \tag{3.149}$$

vilket överensstämmer med (3.124). I gränsen när lasten täcker en allt mindre del av randen och $\theta_o << 1$ kommer den fjärde termens bidrag att dominera eftersom

$$\sum_{j=o}^{N}(-1)^j c_j \sin(jn-1)\theta_o \approx -\theta_o\sum_{j=o}^{N}(-1)^j(1-jn)c_j = -\theta_o|w_N'(\zeta^n=-1)|/A \tag{3.150}$$

Om s är en komplex randkoordinat i z-planet inses att för det cirkulära hålet

$$|w_N'(\sigma)|\cdot|d\sigma| = |ds| \approx R\sin\pi/n. \tag{3.151}$$

Uttrycken (3.150) och (3.151) ger

$$\lim_{\theta_o\to 0} A_o(\zeta) = -\frac{pnR\sin\pi/n}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{kn-1}\zeta^{1-kn} \tag{3.152}$$

som stämmer med (3.132) om kraften F ersätts av tryckkraftsresultanten över en sektor $F = 2pR\sin\pi/n$. Ett liknande uttryck kan ställas upp för stjärnsprickan.

Derivering av $A_o(\zeta)$ j (3.146) ger om $w_N'(\zeta^n = 1) = 0$ utnyttjas

$$A_o'(\zeta^n=1) = \frac{pA}{\pi}\cdot\Big\{-n\theta_o c_o - \sum_{k=1}^{N-1}(kn-1)\sum_{j=1}^{N-k}(-1)^j c_j \sin jn\theta_o/j$$

$$+n/2\sum_{k=o}^{N}(-1)^k c_k \sin kn\theta_o$$

$$+n\sin n\theta_o/2(1+\cos n\theta_o)\cdot\sum_{k=o}^{N}c_k\left[1-(-1)^k\cos kn\theta_o\right]\Big\} \tag{3.153}$$

I gränsen när lasten täcker hela randen $\theta_o \to \pi/n$ ger detta

$$\lim_{\theta_o \to \pi/n} A_o'(\zeta^n = 1) = - pAc_o \tag{3.154}$$

som överensstämmer med en direkt derivering av (3.149). När lastutbredningen blir liten $\theta_o \to 0$ ger räkningar där (3.150) och (3.151) utnyttjas för det cirkulära hålet

$$\lim_{\theta_o \to 0} A_o'(\zeta^n = 1) = - \frac{npR\sin \pi/n}{2\pi} \tag{3.155}$$

som svarar mot (3.135) när $n = 2m$ och $F = 2pR\sin \pi/n$.

För den plana sprickan gäller $N = 1$ och $n = 2$, vidare

$$\begin{cases} c_o = c_1 = 1 \\ A = a/2 \\ \cos\theta_o = \sqrt{1-\eta^2} \text{ och } \sin\theta_o = \eta \end{cases} \tag{3.156}$$

(3.146) ger då, jfr t.ex. Ouchterlony /13/

$$A_o(\zeta) = \frac{p}{\pi}\left\{a\cdot\arcsin\eta/\zeta - w(\zeta)/2i\cdot\ln\left[\frac{\zeta^2+e^{2i\arcsin\eta}}{\zeta^2+e^{-2i\arcsin\eta}}\right] + \right.$$

$$\left. + a\eta/2i\cdot\ln\left[\frac{\zeta^2+2i\sqrt{1-\eta^2}\zeta-1}{\zeta^2-2i\sqrt{1-\eta^2}\zeta-1}\right]\right\} \tag{3.157}$$

som i sin tur för den helt gasfyllda sprickan ger

$$A_o(\zeta) = pa/2\zeta \tag{3.158}$$

och när lastutbredningen blir liten med $F = 2pa\eta$

$$A_o(\zeta) = - \frac{F}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\zeta^{1-2k} \tag{3.159}$$

som stämmer med (3.132) för $n = 2$. Derivatans värde ges av (3.153) med (3.156)

$$A_o'(\zeta^n = 1) = - pa/\pi \cdot \arcsin\eta \tag{3.160}$$

Härigenom är värdet på derivatan i sprickspetsen för den komplexa spänningsfunktionen $f(\zeta)$ känd, se (3.119) för den plana sprickan.

För det cirkulära hålet med en spricka, $n = 1$, och för vinkelsprickan blir belastningen inte balanserad på den approximerade konturen varför räkningarna inte genomförs.

I och med att belastningsintegralen $A_o(\zeta)$ är känd kan nu $f_N(\zeta)$ beräknas.

3.4. Diskussion av lösningens form.

Sambanden i 3.4-3.5 kan sammanfattas på matrisform. Koefficienterna $\{a_k\}$ i $f_N(\zeta)$ beskrivs med en vektor $\mathbf{a}$ som a priori har formen $(\infty \times 1)$. Med koefficienterna i serieutvecklingen för $A_o(\zeta)$ som lastvektorn $\mathbf{A}$ och principaldelen på matrisform $\{D\}$ erhålles i de olika fallen:

Stjärnsprickan och det cirkulära hålet för n,m > 1, (3.118)

$$[\{E\} + \{D\}_{N-1 \times N-1}] \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{A} \tag{3.161}$$

Den plana sprickan (3.119), N = 1

$$\mathbf{a} = -\mathbf{A} \tag{3.162}$$

Vinkelsprickan och det cirkulära hålet för n,m = 1 (3.122)

$$[\{E\} + \{D\}_{N-3 \times N-3}] \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{A} \tag{3.163}$$

Här är $\{E\}$ enhetsmatrisen. När belastningen utgörs av ett jämnt fördelat tryck har enl. (3.124) lastvektorn $\mathbf{A}$ formen $(N \times 1)$ när, n, m > 1 och $(N-1 \times 1)$ när n, m = 1 som också blir formen för $\mathbf{a}$.

Sambanden (3.161) och (3.163) skrivs för denna belastning

$$\begin{cases} [\{E\}_{N-1 \times N-1} + \{D\}_{N-1 \times N-1}] \cdot \mathbf{a}_{N-1 \times 1} = -\mathbf{A}_{N-1 \times 1} \\ a_N = -A_N \end{cases} \tag{3.164}$$

$$\begin{cases} [\{E\}_{N-3 \times N-3} + \{D\}_{N-3 \times N-3}] \cdot \mathbf{a}_{N-3 \times 1} = -\mathbf{A}_{N-3 \times 1} \\ a_k = -A_k, \quad k = N-2, N-1 \end{cases} \tag{3.165}$$

Lösningen till dessa ekvationssystem ger $\mathbf{a}$ och därmed $f_N(\zeta)$ som blir ett polynom. Uttrycket för den plana sprickan är trivialt.

Elementen i matrisen $\{D\}$ i (3.161) ges av (3.117)

$$D_{kj} = \begin{cases} -(jn-1)d_{k+j} , & j+k \leq N \\ 0 , & j+k > N \end{cases} \qquad (3.166)$$

och elementen i (3.149) av (3.121)

$$D_{kj} = \begin{cases} -jd_{k+j+2} , & j+k \leq N-2 \\ 0 , & j+k > N-2 \end{cases} \qquad (3.167)$$

När belastningen utgörs av centralt angripande krafter F, 3.5.2, ges belastningsvektorns form av (3.130) - (3.133) till $(\infty \times 1)$. Ekvationssystemet kan då lösas på formen (3.164)

$$\begin{cases} [\{E\}_{N-1 \times N-1} + \{D\}_{N-1 \times N-1}] \cdot a_{N-1 \times 1} = -A_{N-1 \times 1} \\ a_k = -A_k , \quad k = N, \ldots \end{cases} \qquad (3.168)$$

För vinkelsprickan ger (3.163) ett liknande resultat där $N-1 \rightarrow N-3$ i (3.168), för den plana sprickan ger (3.162) lösningen. Om belastningen utgörs av ett tryck över en del av randen ger (3.168) lösningen för stjärnsprickan när $n > 2$ och det cirkulära hålet när $n > 1$. Belastningsvektorn ges av (3.147).

Ett alternativ till (3.168) är att bilda differensvektorn b

$$a_{\infty \times 1} = -A_{\infty \times 1} + b_{\infty \times 1} \qquad (3.169)$$

varpå resultatet blir

$$\begin{cases} [\{E\}_{N-1 \times N-1} + \{D\}_{N-1 \times N-1}] \cdot b_{N-1 \times 1} = B_{N-1 \times 1} \\ b_k = 0, \quad k > N-1 \end{cases} \qquad (3.170)$$

och där

$$B_{N-1 \times 1} = \{D\}_{N-1 \times N-1} \cdot A_{\infty \times 1} \qquad (3.171)$$

Denna form är mer lämpad för numeriska beräkningar om derivatans $A'_{\infty \times 1}$ värde i sprickspetsarna har bestämts på sluten form såsom i 3.5.2 och 3.5.3.

3.7. Uttryck för sökta storheter.

De storheter som är av intresse är

1. Spänningsintensitetsfaktorerna
2. Trolig utbredningsriktning
3. Sprickbredden
4. Gasvolymen

3.7.1. Spänningsintensitetsfaktorer och trolig utbredningsriktning.

De ges för modus I och II av följande uttryck, se Sih /14/ och Andersson /6/ m.fl.

$$\bar{K} = K_I - iK_{II} = 2\sqrt{2\pi}\, e^{-i\phi_k/2} \lim_{\zeta \to \sigma_k} \sqrt{w(\zeta)-w(\sigma_k)}\, f'(\zeta)/w'(\zeta) \qquad (3.172)$$

där ϕ_k är sprickspetsens vinkel mot a-axeln i z-planet och σ_k spetsens läge på Γ i bildplanet. Då $w'(\sigma_k) = 0$ ger en utveckling av $w(\zeta)$ i Taylorserie kring sprickspetsen för $|\zeta| > 1$

$$\begin{cases} w(\zeta) = w(\sigma_k) + \frac{1}{2}(\zeta-\sigma_k)^2 w''(\sigma_k) + \ldots \\ w'(\zeta) = (\zeta-\sigma_k) w''(\sigma_k) + \ldots \end{cases} \qquad (3.173)$$

Dessa uttryck ger som hos Andersson /6/

$$\bar{K} = 2\sqrt{\pi}\, f'(\sigma_k)/(w''(\sigma_k) e^{i\phi_k})^{1/2} \qquad (3.174)$$

För de approximerade konturerna gäller samma uttryck då $w_N'(\sigma_k) = 0$. Stjärnsprickan och det cirkulära hålet ger $\sigma_k = e^{i\phi_k}$ varför $\bar{K}$ i dessa fall blir reell, dvs $K_{II} = 0$, något som direkt inses av symmetriskäl. Däremot blir $K_{II} \neq 0$ för vinkelsprickan.

De approximerade konturerna är också valda så att $w''(\sigma_k) = w_N''(\sigma_k)$, för stjärnsprickan och det cirkulära hålet med lika armar ger (3.174)

$$\begin{cases} K_I = 2\sqrt{\pi} \cdot f_N'(\sigma_k)/\sqrt{AQ}, \quad k = 1,\ldots,n \\ K_{II} = 0 \end{cases} \qquad (3.175)$$

Motsvarande uttryck när armarna är olika långa ger (3.66)

$$\begin{cases} K_I = 2\sqrt{\pi}\, f_N'(\sigma_{2k-1,2k})/\sqrt{AQ_{1,2}}\,, \quad k = 1,\ldots,m \\ K_{II} = 0 \end{cases} \tag{3.176}$$

där olika index syftar på de olika långa sprickorna. För vinkelsprickan ger (3.51)

$$K = 2\sqrt{\pi} f_N'(\sigma_{1,2}).e^{\pm i(\varphi_o - \alpha)}/\sqrt{a} \tag{3.177}$$

där φ_o är given av (3.96).

Uttrycket för f_N' ges av (3.14) och (3.102)

$$f_N'(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-kn)a_{k\ el.k-1}\,\sigma^{-kn} \tag{3.178}$$

där a_k ersätts av a_{k-1} när n = 1. Uttrycket gäller också när n → m.

Om man använder dragspänningshypotesen för att bestämma sprickans troliga utbredningsriktning φ_o i ett sprött material leder detta till att sprickan är benägen att växa i den riktning där den tangentiella dragspänningen är störst. φ_o är en huvudspänningsriktning, dvs $\tau_{r\varphi} = 0$ för $\varphi = \varphi_o$, och dess värde ges av, se Sih och Liebowitz /15/ och Ouchterlony /16/.

$$\varphi_o = -2\,\mathrm{atan}\left[\left(\sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2} - K_I\right)/4K_{II}\right] \tag{3.179}$$

När $K_{II} = 0$ vilket gäller för stjärnsprickan och det cirkulära hålet med radiella sprickor är $\varphi_o = 0$ och sprickan växer i sprickspetsplanets riktning. Den största avvikelsen från sprickspetsplanet $\varphi_o \approx \pm 70^o$ erhålles när $|K_{II}| \gg K_I$.

Sprickans troliga utbredningsriktning kan även bestämmas av att den lokalt frigjorda elastiska energin är störst där. Detta energikriterium som Knauss och Palaniswamy /25/ föreslår ger också den kritiska belastningen och det är en mer logisk utvidgning av brottmekanikens villkor för sprick-tillväxt än dragspänningshypotesen. Enl. /25/ ger energikriteriet c:a 5% större värden på φ_o men dess tillämpning kräver så omfattande räkningar att dess användning i stället för dragspänningshypotesen inte anses motiverad.

3.7.2. Förskjutningar och gasvolym.

Förskjutningarna ges av (3.5) för $|\zeta| > 1$

$$2G(u_x+iv_y) = \varkappa f_N(\zeta) - w_N(\zeta)\cdot\overline{f_N'(\zeta)}/\overline{w_N'(\zeta)} - \overline{g_N(\zeta)} \qquad (3.180)$$

På sprickranden ger (3.103)

$$2G(u_x+iv_y)_\Gamma = (\varkappa+1)f_N(\sigma) - F(\sigma) \qquad (3.181)$$

För stjärnsprickan och det cirkulära hålet med radiella sprickor följer att den tangentiella deformation i sprickspetsen är noll. Uttrycket kan användas för en kontroll av avbildningsfunktionen $w_N(\zeta)$. Om sprickan tenderar att sluta sig någonstans så att motsatta sidor kommer i kontakt med varandra gäller R.V. - ekvationen (3.103) inte längre. Med hjälp av tecknet på K_I kan man avgöra om sprickspetsen sluter sig eller inte. Se Ouchterlony /17/.

Uttrycket för förskjutningarna nära sprickspetsen ges av, se t.ex. Rice /18/.

$$\begin{cases} u_x' = \dfrac{1+\nu}{E}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\,[K_I\cos\varphi/2(\varkappa-\cos\varphi)+K_{II}\sin\varphi/2(\varkappa+2+\cos\varphi)] \\ v_y' = \dfrac{1+\nu}{E}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\,[K_I\sin\varphi/2(\varkappa-\cos\varphi)-K_{II}\cos\varphi/2(\varkappa-2+\cos\varphi)] \end{cases} \qquad (3.182)$$

där (r, φ) är polära koordinater kring sprickspetsen, se fig. 3.10

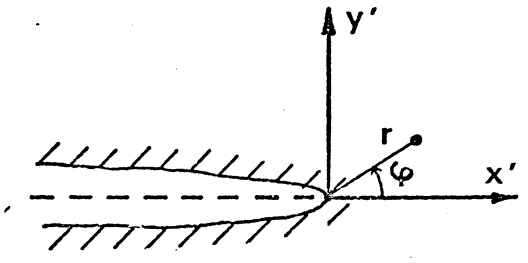


fig 3.10 sprickspetskoordinater

För plant deformationstillstånd med $\varkappa = 3-4\nu$ ger (3.182) förskjutningar på sprickytan där $\varphi = \pi$

$$(u_x', v_y') = \frac{4(1-\nu^2)}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\,(K_{II}, K_I) \qquad (3.183)$$

Sprickspetsen som alltid har parabolisk form oavsett belastningsgeometrin går ihop när $K_I \leq 0$. Förutsättningen för att R.V. - ekvationen (3.103) skall gälla och därmed de beräkningsresultat som presenteras är alltså att $K_I > 0$.

Volymökningen ges av, se fig. 3.11

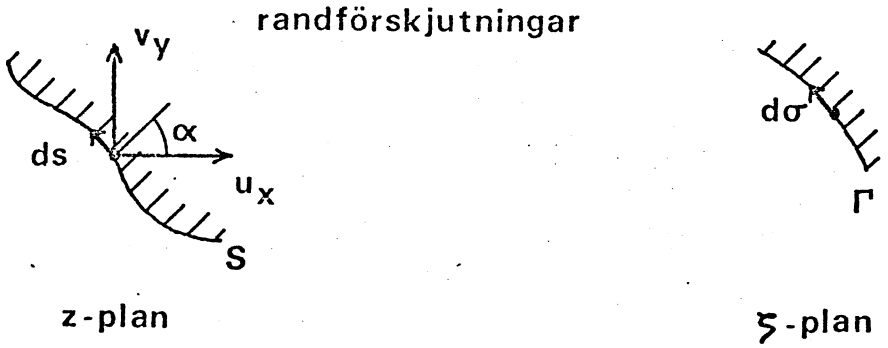


fig 3.11

$$dV = (u_x \cos\alpha + v_y \sin\alpha)\,|ds| \qquad (3.184)$$

där s som förut är en komplex randkoordinat i z-planet och α är normalens riktning. Med

$$\begin{cases} ds = |ds|\, i\, e^{i\alpha} \\ ds = w_N'(\sigma)\,d\sigma \end{cases} \qquad (3.185)$$

erhålles

$$dV = \mathrm{Re}\,\{-\,i(u_x - iv_y)\,w_N'(\sigma)\,d\sigma\} \qquad (3.186)$$

En integrering av detta uttryck runt tillämpliga delar av Γ ger gasens volymökning V. Uttrycket blir mycket komplicerat utom när gasen fyller ut spricksystemet helt och hållet.

Integralen runt Γ tolkas då som en Cauchyintegral med (3.181) och (3.123)

$$2GV = 2\pi \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [(\varkappa+1)\overline{f_N(\sigma)} + p\overline{w_N(\sigma)}]\, w_N'(\sigma)\sigma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}, \zeta=0 \right\} \quad (3.187)$$

Alla koefficienterna i uttrycken för $f_N(\zeta)$ och $w_N(\zeta)$ är reella, med kända satser för Cauchyintegraler inses att endast den konstanta termen i källfunktionens Laurentutveckling för $|\zeta| < 1$ ger något bidrag.

För stjärnsprickan och det cirkulära hålet när $n,m > 1$ ger (3.187), (3.164), (3.114) och (3.102)

$$V = \pi A/G \sum_{k=o}^{N} (1-kn)[(\varkappa+1)a_k c_k + pAc_k^2] \quad (3.188)$$

För vinkelsprickan och det cirkulära hålet när $n,m = 1$ ger (3.187) med (3.165), (3.120) och (3.14)

$$\begin{cases} V = \pi A/G \sum_{k=o}^{N} (1-k)[(\varkappa+1)a_{k-1} c_k + pAc_k^2] \\ \text{där } a_o, a_{-1} = 0 \end{cases} \quad (3.189)$$

Gasvolymen kan också beräknas med spänningsintensitetsfaktorerna. För stjärnsprickan erhålles, se Ouchterlony /19/

$$V_k = 2n(1-\nu^2)/pE \cdot \int_o^a K_I^2(a)da \quad (3.190)$$

och med olika långa armar

$$\begin{cases} V_k = 2m(1-\nu^2)/pE \cdot \int_o^a [K_{Ia}^2(a) + \delta \cdot K_{I\delta a}^2(a)]\, da \\ \delta = \text{konst.} \end{cases} \quad (3.191)$$

För det cirkulära hålet med radiella sprickor kan sådana uttryck också ställas upp men då $K_I(\mu)$ inte är känd kan integrationen inte genomföras. För vinkelsprickan erhålles

$$V_k = 4(1-\nu^2)/pE \cdot \int_o^a [K_I^2(a) + K_{II}^2(a)]\, da \qquad (3.192)$$

Det gemensamma för stjärnsprickan och vinkelsprickan är att tillväxten sker geometriskt likformigt så att dels $K_I(a)$ beroendet är känt och dels sprickans begynnelsevolym är noll.

Uttrycken (3.190)-(3.192) kan jämföras med (3.188)-(3.189) och ger då ett mått på hur väl verklig och approximerad kontur stämmer med varandra.

3.8. Några enkla geometrier som referenstillstånd.

För att göra beräkningsresultaten överskådliga kan man presentera dem på dimensionslös form men innan valet av referensgeometrierdiskuteras skall en hypocykloidspricka studeras närmare. Räkningarna på den blir mycket enkla då det är den enklaste approximation av stjärnsprickan som bevarar spetsarnas karaktär, $w'(\sigma_k) = 0$. Den bör ge en uppfattning om hur mycket sprickrandens utseende påverkar spänningstillståndet i sprickspetsen.

3.8.1. Hypocykloidsprickan.

Denna spricka beskrivs av en punkt på periferin av en cirkel som får rulla inuti en annan större cirkel när storleksförhållandet är ett heltal n, se Muskhelishvili /1/ s 177-78.

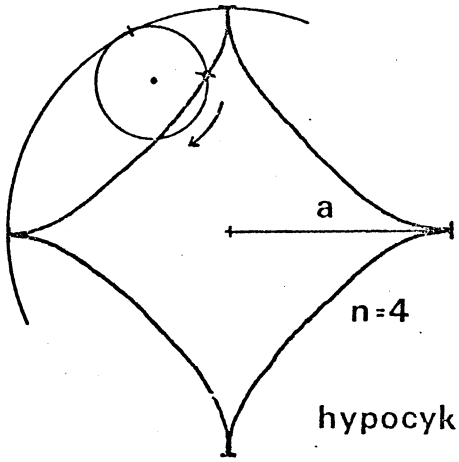


fig 3.12

Avbildningsfunktionens derivata $w_h'(\zeta)$ ges av (3.56)

$$w_h'(\zeta) = A\,(1-\zeta^{-n}) \tag{3.193}$$

Med villkoret $w_h(1) = a$ fås

$$w_h(\zeta) = a\,\zeta/n\cdot[(n-1) + \zeta^{-n}]\ ,\ n \geq 2 \tag{3.194}$$

där den plana sprickan, n = 2,är ett särfall.

Den komplexa spänningsfunktionen $f(\zeta)$ ges som för den plana sprickan av (3.119)

$$f(\zeta) = -A_o(\zeta) \tag{3.119}$$

För hypocykloidsprickan gäller N = 1 och med

$$\begin{cases} c_o = 1 - 1/n \\ c_1 = 1/n \\ A = a \end{cases} \tag{3.195}$$

ger (3.153) och (3.119) för ett partiellt inre övertryck

$$f'(\zeta^n=1) = pa/\pi \cdot n(1-1/n)\theta_o \tag{3.196}$$

Vinkeln θ_o uttrycker lastfördelningen och η definieras liksom för stjärnsprickan som den bråkdel av båglängden över vilken trycket verkar. Båglängden S_h ges med (3.185) av

$$S_h = \int_S |ds| = \int |w_h'(e^{i\theta})|\, d\theta \tag{3.197}$$

Sambanden (3.193) och (3.197) ger

$$S_h(\theta_o) = 2a(1-1/n) \int_{\pi/n-\theta_o}^{\pi/n+\theta_o} \sin\frac{n\theta}{2}\, d\theta \tag{3.198}$$

Med η enligt definition

$$\eta = S_h(\theta_o)/S_h(\pi/n) \tag{3.199}$$

erhålles

$$\theta_o = 2/n \cdot \arcsin\eta \tag{3.200}$$

som ger med (3.196)

$$f'(\zeta^n=1) = 2pa(1-1/n)/\pi \cdot \arcsin\eta \tag{3.201}$$

Då

$$|w_h''(\zeta^n=1)| = an(1-1/n) \tag{3.202}$$

ger (3.174) för $n \geq 2$

$$K_I/p\sqrt{\pi a} = 2\sqrt{n-1}/n \cdot 2/\pi \cdot \arcsin\eta \tag{3.203}$$

För den helt gasfyllda sprickan, $\eta = 1$, ger detta, $n \geq 2$

$$K_I/p\sqrt{\pi a} = 2\sqrt{n-1}/n \tag{3.204}$$

och för en där lastutbredningen blir allt mindre 2b

$$\eta = 2nb/S_h(o) = bn^2/4a(n-1) \tag{3.205}$$

ger (3.203) om $F = 2pb$ och $n \geq 2$

$$K_I/(F/\sqrt{\pi a}) = n/2\sqrt{n-1} \tag{3.206}$$

Uttrycken i H.L. i (3.204) och (3.206) blir båda ett för den plana sprickan. En jämförelse med litteraturvärden för den fyrarmade stjärnsprickan, se Rooke och Sneddon /20/ och Stallybrass /21/, för inre övertryck

$$\begin{cases} K_I/p\sqrt{\pi a}, \text{ hypocykloid} = 0.8660 \\ K_I/p\sqrt{\pi a}, \text{ stjärnspricka} = 0.8636 \end{cases} \tag{3.207}$$

ger mindre än 3% avvikelse. En jämförelse mellan Westmanns /11/ och Williams /12/ värden och (3.204) tyder på att överensstämmelsen är lika god för alla värden på n. Då förhållandet mellan största och minsta avstånd till origo är $n/(n-2)$ för hypocykloidsprickan kan man förvänta att resultaten för det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor inte avviker nämnvärt från stjärnsprickans så länge som

$$\mu \geq \mu_o = n/(n-2), \quad n > 2 \tag{3.208}$$

För centralt angripande krafter förväntas inte lika god överensstämmelse. Om kraften beräknas som resultaten till ett tryck som verkar över en sektor i ett cirkulärt hål

$$F = 2pR \sin \pi/n \tag{3.209}$$

blir uttrycken i (3.204) och (3.206) jämförbara

$$\begin{cases} K_I/p\sqrt{\pi a} = 2\sqrt{n-1}/n \sim 2\sqrt{n} \\ K_I/(2pR/\sqrt{\pi a}) = n \sin(\pi/n)/2\sqrt{n-1} \sim \pi/2\sqrt{n} \end{cases} \tag{3.210}$$

men $K_I(n)$ bör uppvisa samma principiella utseende som för hypocykloid-sprickan.

3.8.2. Referensgeometrier.

Den plana sprickan är en mycket känd geometri och för stjärnsprickan och vinkelsprickan är den ett naturligt referensfall. För det cirkulära hålet kan olika referenser användas. Lämpliga är den plana sprickan och stjärnsprickan för spänningsintensitetsfaktorn samt den plana sprickan och och det cirkulära hålet utan sprickor för volymen. För den plana sprickan gäller

$$K_{Io} = \begin{cases} p\sqrt{\pi a} & \text{allm. inre övertryck} \\ F/\sqrt{\pi a} = 2pR/\sqrt{\pi a} & \text{centrala krafter} \\ 2p\sqrt{a}/\sqrt{\pi}\cdot\arcsin\eta & \text{partiellt övertryck} \end{cases} \qquad (3.211)$$

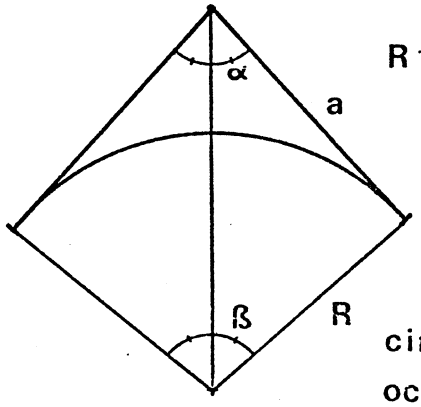
Gasvolymen för den helt fyllda sprickan är

$$V_o = 2\pi(1-\nu^2)pa^2/E \qquad (3.212)$$

och volymökningen för det cirkulära hålet

$$V_I = 2\pi(1+\nu)pR^2/E \qquad (3.213)$$

Det faller sig också naturligt att jämföra uttrycken för vinkelsprickan med cirkelbågsprickans värden, se fig.3.13.



R tanß ≙ a

cirkelbågsprickan
och vinkelsprickan

fig 3.13

För jämförelsen i fig. 3.13 gäller $\alpha = \pi/2 - \beta$ och $a = R\tan\beta$, då gäller med Ouchterlony /17/ för den helt gasfyllda cirkelbågsprickan

$$(K_I + iK_{II})/K_{Io} = \sqrt{\cos\beta}/\cdot\ \sin^2(\beta/2)\cdot e^{i\,\beta/2} \qquad (3.214)$$

och

$$V/V_o = \cos^2\beta\,/(1-\sin^4\beta/2) \tag{3.215}$$

För centralt angripande krafter däremot

$$(K_I+iK_{II})/K_{Io} = \frac{1}{\sqrt{\cos\beta}}\cdot\left[\frac{1-3\sin^2\beta/2}{1+\sin^2\beta/2} + i\,\frac{\sin\beta}{1+\sin^2\beta/2}\right] \tag{3.216}$$

3.9. Explicita dimensionslösa uttryck.

3.9.1. Jämnt fördelat inre övertryck.

Lastfunktionen kommer att innehålla en faktor pA, se (3.124) som skiljs från ekvationssystemen (3.161-163) genom att göra koefficientvektorn dimensionslös

$$a_o = a/pA \tag{3.217}$$

För stjärnsprickan med lika långa armar erhålles på dimensionslös form med (3.19), (3.62), (3.175) och (3.211)

$$\begin{cases} K_I(n)/K_{Io} = K_I/p\sqrt{\pi a} = \sqrt{2/n}\, 2^{1-2/n}\, f_{oN}'(1) \\ \\ n \geq 2 \end{cases} \tag{3.218}$$

och med (3.19), (3.186) och (3.212)

$$V(n)/V_o = 2^{-4/n} S_N(n)/(1-\nu)\ ,\ n \geq 2 \tag{3.219}$$

där $S_N(n)$ ges av (3.188)och (3.189). N = 1 för den plana sprickan. För det cirkulära hålet ger (3.73) och (3.74)

$$\begin{cases} K_I(\mu,n)/K_{Io} = \sqrt{2/n}\, 2^{1-2m} \left(\frac{\mu^n+1}{\mu^n}\right)^{2/n} \sqrt{\frac{\mu^n-1}{\mu^{n+1}}}\, f_{oN}'(1) \\ \\ K_{Io} = p\sqrt{\pi\mu R},\ n \geq 1 \end{cases} \tag{3.220}$$

Denna kontur liknar stjärnsprickan när $\mu >> 1$, med $\mu R = a$ återfås då (3.218) ur (3.220). När sprickorna blir små $\mu \to 1$ däremot inses att $K_I \to 0$ då $f_{oN}'(\zeta)$ är begränsad. Med spricklängden $a << R$ och $\mu = 1 + a/R$ ger (3.220)

$$K_I(\mu,n)/p\sqrt{\pi a} \approx 2 f_{oN}'(1) \tag{3.221}$$

För volymen ger (3.73)

$$\begin{cases} V(\mu,n)/V_o = 2^{-4/n} \left(\frac{\mu^n+1}{\mu^n}\right)^{4/n} S_N(n)/(1-\nu) \\ \\ V(\ldots,n)/V_o = 2^{-4/n} \ldots^{4/n} \ldots^2 \ldots S_N(n) \end{cases} \tag{3.222}$$

När sprickorna blir långa, $\mu >> 1$, återfås (3.219) ur övre sambandet. För korta sprickor tar det undre värdet ett, för långa blir det obegränsat.

För stjärnsprickan med olika långa armar ger (3.27) och (3.69) för resp. armar

$$\begin{cases} K_{I1}(\delta,m)/K_{Io1} = \sqrt{1/m}\, 2^{1-1/m}\left(\frac{\delta^m+1}{2}\right)^{1/m-1/2} f_{oN}'(\sigma_1) \\ K_{Io1} = p\sqrt{\pi a} \end{cases} \tag{3.223}$$

och

$$\begin{cases} K_{I2}(\delta,m)/K_{Io2} = \sqrt{1/m}\, 2^{1-1/m}\left(\frac{\delta^m+1}{2\delta^m}\right)^{1/m-1/2} f_{oN}'(\sigma_2) \\ K_{Io2} = p\sqrt{\pi\delta a} \end{cases} \tag{3.224}$$

Båda uttrycken ger (3.218) med $m = n/2$ när armarna blir lika långa, $\delta = 1$. När $\delta \to 0$ blir det undre uttrycket $O(\delta^{m/2-1})$ och det övre som (3.218) fast med halva antalet armar $n = m$. Volymen ges av, $m > 1$

$$V(\delta,m)/V_o = 2^{-2/m}\left(\frac{\delta^m+1}{2}\right)^{2/m} S_N(m)/(1-\nu) \tag{3.225}$$

Uttrycket ger (3.219) när $\delta = 1$. När $m = 1$ ger (3.225) uttrycket för den plana sprickan där $a \to a(1+\delta)/2$.

För det cirkulära hålet med olika långa armar ger (3.85) och (3.92) för resp. armar

$$\begin{cases} K_{I1}(\mu,\lambda,m)/K_{Io1} = \sqrt{1/m}\, 2^{1-1/m}\left[\frac{h(\mu)+h(\lambda)}{2}\right]^{1/m-1/2}\sqrt{\mu^m-\mu^{-m}}/\mu \cdot f_{oN}'(\sigma_1) \\ K_{Io1} = p\sqrt{\pi\mu R} \end{cases} \tag{3.226}$$

och

$$\begin{cases} K_{I2}(\mu,\lambda,m)/K_{Io2} = \sqrt{1/m}\, 2^{1-1/m}\left[\frac{h(\mu)+h(\lambda)}{2}\right]^{1/m-1/2}\sqrt{\lambda^m-\lambda^{-m}}/\lambda\cdot f_{oN}'(\sigma_2) \\ \\ K_{Io2} = p\sqrt{\pi\lambda R} \end{cases} \qquad (3.227)$$

som för $\mu = \lambda$ i bägge fallen ger med $n = 2m$ ekv (3.219). När $\lambda \to 1$ blir det undre uttrycket noll och det övre ger (3.219) för halva antalet sprickor $n = m$. Volymen ges av

$$\begin{cases} V(\mu,\lambda,m)/V_o = 2^{-2/m}\left[\frac{h(\mu)+h(\lambda)}{2\mu^m}\right]^{2/m}\cdot S_N(m)/(1-\nu) \\ \\ V(\mu,\lambda,m)/V_1 = 2^{-2/m}\left[\frac{h(\mu)+h(\lambda)}{2}\right]^{2/m}\cdot S_N(m) \end{cases} \qquad (3.228)$$

som när $\mu = \lambda$ ger (3.222) med $m = n/2$ och när endera μ eller $\lambda \to 1$ ger (3.193) med halva antalet sprickor $m = n$.

För vinkelsprckan ger (3.51)

$$\begin{cases} \bar{K}(\alpha)/K_{Io} = \left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{q/2}\sqrt{1-q^2}\cdot e^{\pm i(\varphi_o-\alpha)}\, f_{oN}'(\sigma_{1,2}) \\ \\ K_{Io} = p\sqrt{\pi a} \end{cases} \qquad (3.229)$$

och

$$V(\alpha)/V_o = \frac{1}{4}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^q/(1-q^2)\cdot S_N(1)/(1-\nu) \qquad (3.330)$$

vilka bägge antar värdet ett när $\alpha = \pi/2$ dvs $q = 0$

3.9.2. Centralt angripande krafter.

Denna gång kommer lastfunktionen att innehålla en faktor F, se (3.130-33) varför $\bar{K} \propto p\sqrt{A}$. Med dimensionslös koefficientvektor

$$\bar{a}_o = \bar{a}/(F/2\pi) \tag{3.231}$$

erhålles för stjärnsprickan med lika långa armar

$$\begin{cases} K_I(n)/K_{Io} = K_I/(F/\sqrt{\pi a}) = \sqrt{2/n}\, f_{oN}'(1) \\ K_I(n)/(2pR/\sqrt{\pi a}) = \sqrt{2/n}\sin\pi/n\, f_{oN}'(1) \end{cases} \tag{3.232}$$

och för den med olika långa armar resp.

$$\begin{cases} K_{II}(\delta,m)/K_{Io1} = \sqrt{1/m}\,\left(\frac{\delta^m+1}{2}\right)^{-1/2} f_{oN}'(\sigma_1) \\ K_{Io1} = F/\sqrt{\pi a} \end{cases} \tag{3.233}$$

och

$$\begin{cases} K_{I2}(\delta,m)/K_{Io2} = \sqrt{1/m}\,\left(\frac{\delta^m+1}{2\delta^m}\right)^{-1/2} f_{oN}'(\sigma_2) \\ K_{Io2} = F/\sqrt{\pi\delta a} \end{cases} \tag{3.234}$$

vilka för $\delta = 1$ båda ger (3.232) med $n = 2m$.

För vinkelsprickan erhålles slutligen

$$\bar{K}/K_{Io} = e^{\pm i(\varphi_o-\alpha)} f_{oN}'(\sigma_{1,2}) \tag{3.235}$$

3.9.3. Partiellt inre övertryck.

Normaliseringen av koefficientvektorn blir samma som (3.188) och för stjärnsprickan med lika långa armar ger (3.218)

$$\begin{cases} K_I(n)/K_{Io} = \dfrac{\pi/2}{\arcsin\eta}\sqrt{2/n}\;2^{1-2n}\,f_{oN}'(1) \\ \\ K_{Io} = p\sqrt{\pi a}\;2/\pi\cdot\arcsin\eta\;, \quad \eta\in(0,1] \;\text{ och } n \geq 2 \end{cases} \tag{3.236}$$

ur vilken (3.218) återfås när gasen fyller ut sprickan, $\eta = 1$. (3.232) kan däremot inte härledas direkt ur (3.236) utan (3.217) och (3.231).

Såsom ovan ger (3.218) för det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor

$$\begin{cases} K_I(\mu,n)/K_{Io} = \pi/2\cdot\arcsin^{-1}(1/\mu)\sqrt{2/n}\;2^{1-2n}\left(\dfrac{\mu^n+1}{\mu^n}\right)^{2/n}\sqrt{\dfrac{\mu^n-1}{\mu^n+1}}\;f_{oN}'(1) \\ \\ K_{Io} = p\sqrt{\pi\mu R}\;2/\pi\cdot\arcsin(1/\mu), \mu\in[1,\infty) \end{cases} \tag{3.237}$$

som för mycket korta sprickor, $\mu \to 1$ återger (3.221). För långa sprickor, $\mu \to \infty$ övergår det i (3.236) med $\mu = 1/\eta$.

4. Numerisk beräkning och resultat.

4.1. Inledning.

Alla numeriska beräkningar har genomförts på en IBM 1130 dator vid Atlas Copcos centrala systemlaboratorier ZD. Kärnminnesutrymmet är begränsat till 8 K varför större matriser än c:a 30x30 inte kunnat användas. Antalet termer i den approximerade avbildningsfunktionen $w_N(\zeta)$ har härigenom begränsats till 31 st. svarande mot $N_{max} = 30$. Detta betyder att den approximativa konturen ibland avviker märkbart från den ursprungliga, särskilt om vinkeln mellan två närliggande sprickor är liten dvs. stort antal eller om förhållandet mellan sprickläng derna märkbart skiljer sig från ett. Då avvikelserna i konturen är störst kring de punkter där avbildningsfunktionen $w(\zeta)$ har förgreningspunkter och den approximerade avbildningsfunktionen $w_N(\zeta)$ med avsikt valts så att konturens karaktär bevarats i sprickspetsarna, se avsnitt 3.3., medför detta att spänningsintensitetsfaktorns K_I eller K_{II} värde för ett jämnt fördelat inre övertryck påverkas mindre än värdet för centralt angripande krafter eller partiellt inre övertryck.

Vad beträffar gasvolymen V kommer den som beräknad ur spänningsintensitetsfaktorerna normalt att ge ett högre värde än det som beräknats ur linjeintegralen över randförskjutningen då den ideala konturen har en större belastad yta.

Innan de egentliga beräkningarna genomförts har dels kontrollerats att $w_N'(\zeta) \neq 0$ för $|\zeta| > 1$ för några parameterkombinationer för varje konturtyp enl. avsnitt 3.2, dels har de approximerade konturerna upprita ts i ett antal fall.

Några ex. finns redovisade i fig. 4.1-4.14.

Beräkningen av koefficienterna $\{c_k\}$ i $w_N(\zeta)$ har lagts i ett antal subrutiner medan huvudprogrammen omfattat:

a. Beräkning av matriselementen till matrisen $\{D\}$ vilka enbart beror av $\{c_k\}$, se avsnitt 3.4 och 3.6.
b. Beräkning av elementen i lastvektorn A, se avsnitt 3.5 och 3.6, beroende på typ av belastning.
c. Beräkning av koefficienterna $\{a_k\}$ i den komplexa spänningsfunktionen $f_N(\zeta)$ genom lösning av ett ekvationssystem, se avsnitt 3.6.
d. Beräkning av spänningsfunktionens derivata $f_N'(\sigma_k)$ i sprickspetsarna, se avsnitt 3.7.
e. Beräkning av spänningsintensitetsfaktorer K_I och K_{II}, trolig utbredningsriktning φ_o och gasvolym V, se avsnitt 3.7, på den dimensionslösa form som ges i avsnitt 3.9.

Beräkningstiden för ett fall kan uppskattas till c:a 1 min när N = 30.

Resten av avsnitt 4 kommer att ägnas åt presentation av och diskussion kring de numeriska resultaten för följande fall:

1. Stjärnsprickan med lika långa armar under utbrett inre övertryck.
2. Det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor under utbrett inre övertryck.
3. Stjärnsprickan med lika långa armar och centralt angripande krafter.
4. Stjärnsprickan med armar av alternerande längd under utbrett inre övertryck.
5. Det cirkulära hålet med radiella sprickor av alternerande längd under utbrett inre övertryck.
6. Stjärnsprickan med armar av alternerande längd och centralt angripande krafter.
7. Det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor under inre övertryck på enbart hålranden.
8. Vinkelsprickan under utbrett inre övertryck.
9. Vinkelsprickan med centralt angripande krafter.

Med resultaten i avsnitt 3 är det ganska enkelt att göra motsvarande räkningar för ytterligare geometrier.

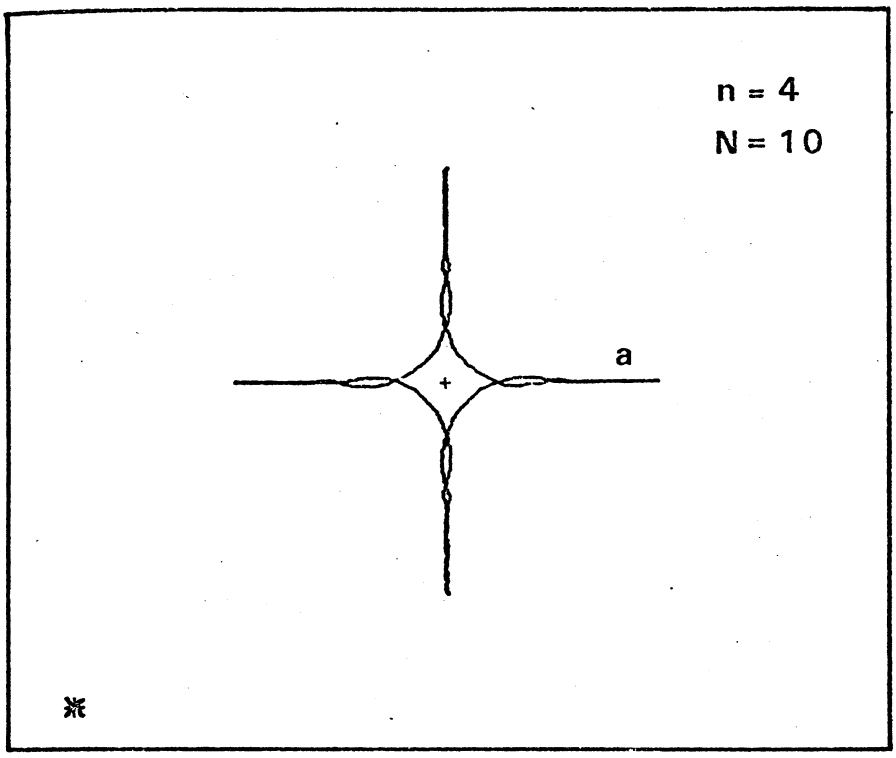


Fig 4.1 Stjärnsprickan med lika långa armar.

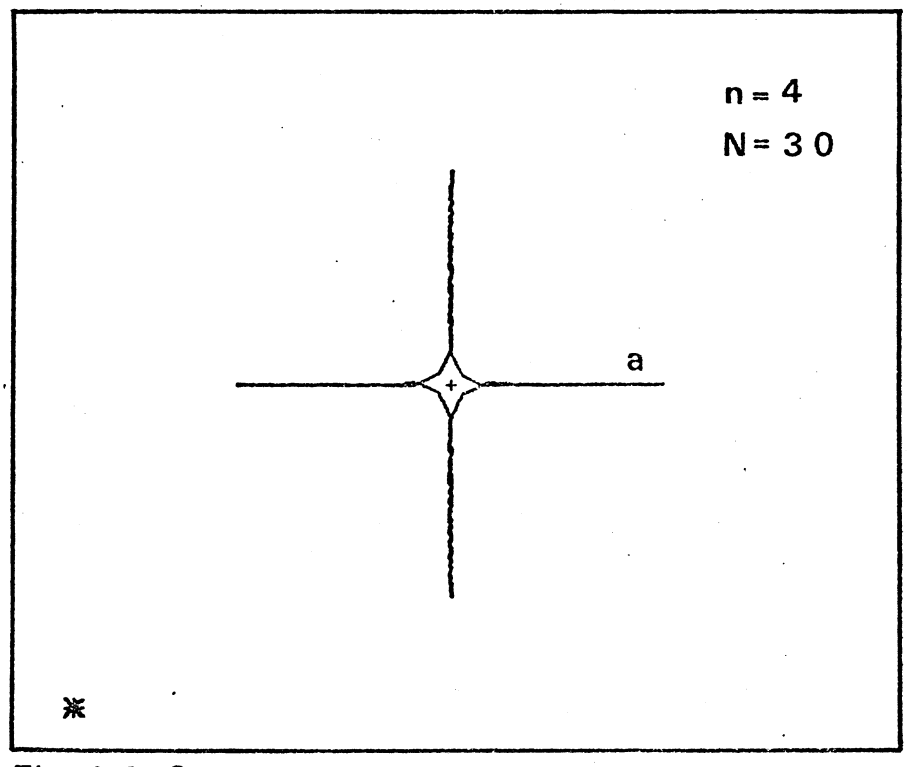


Fig 4.2 Som ovan.

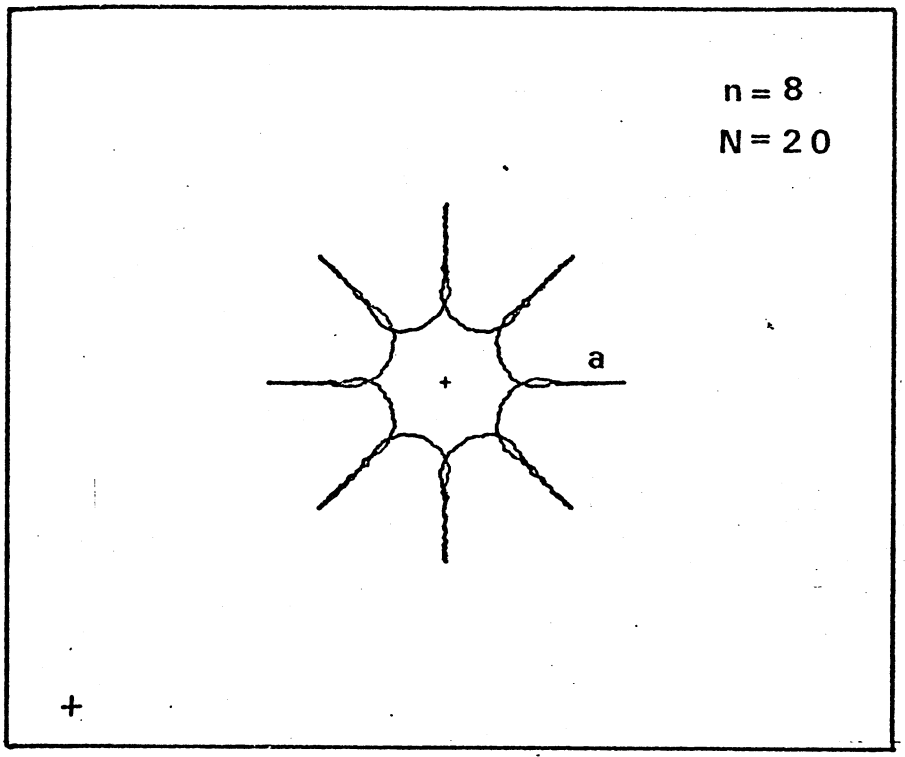


Fig 4.3 Som fig 4.1.

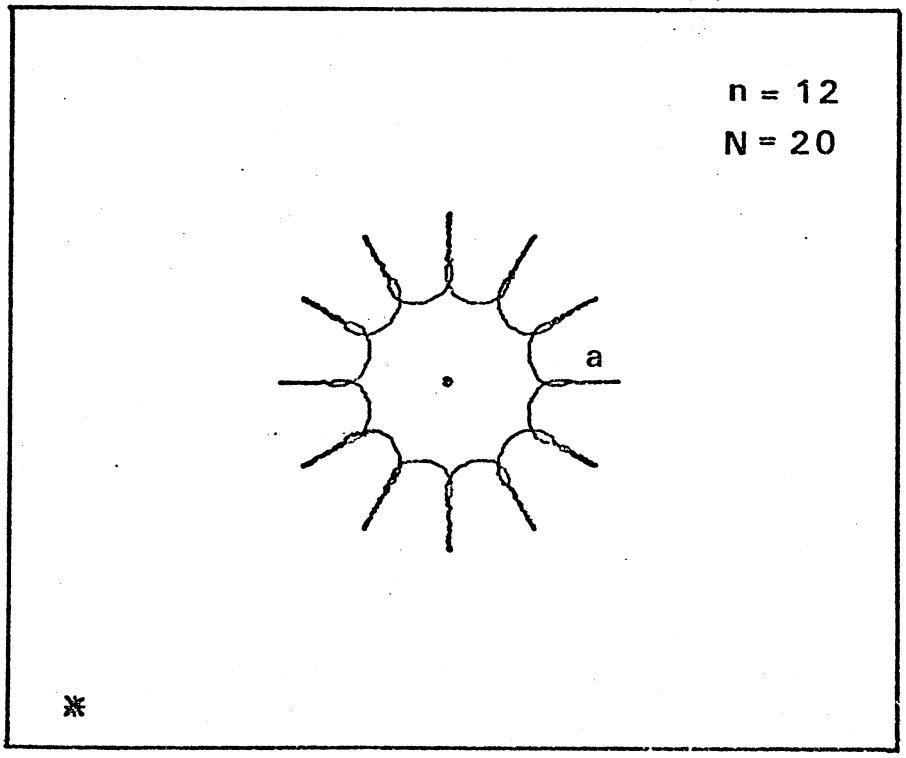


Fig 4.4 Som fig 4.1.

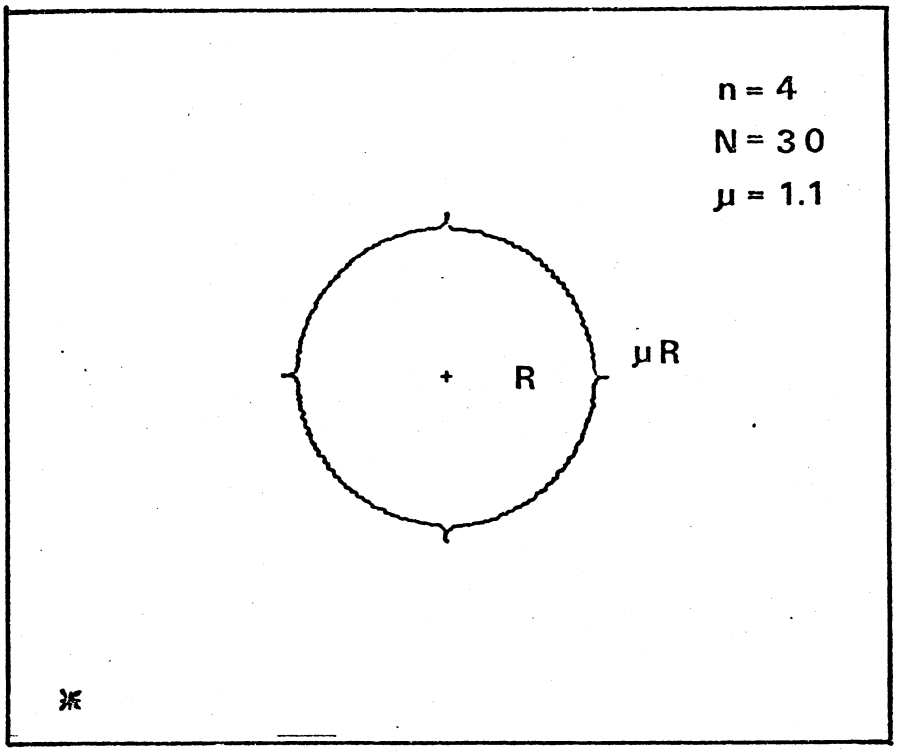


Fig 4.5 Det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor.

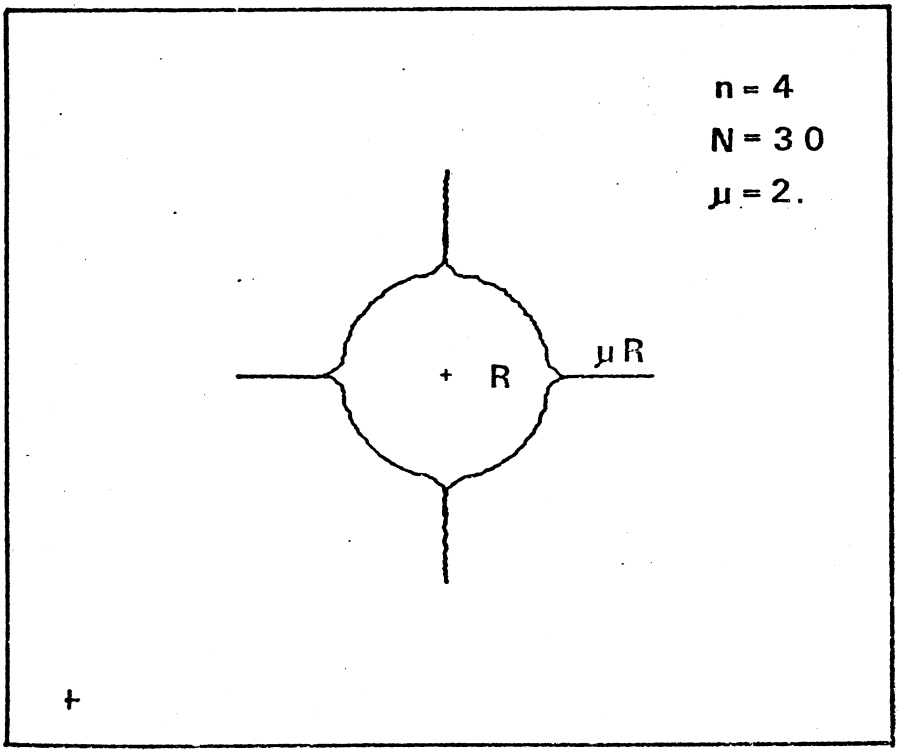


Fig 4.6 Som ovan.

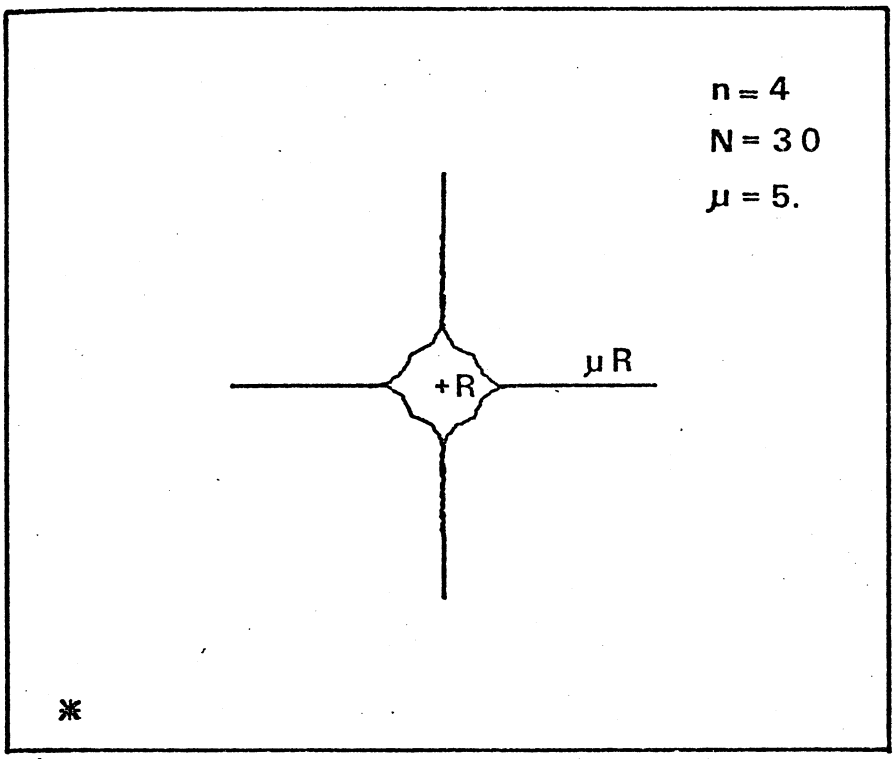


Fig 4.7 Som fig 4.5.

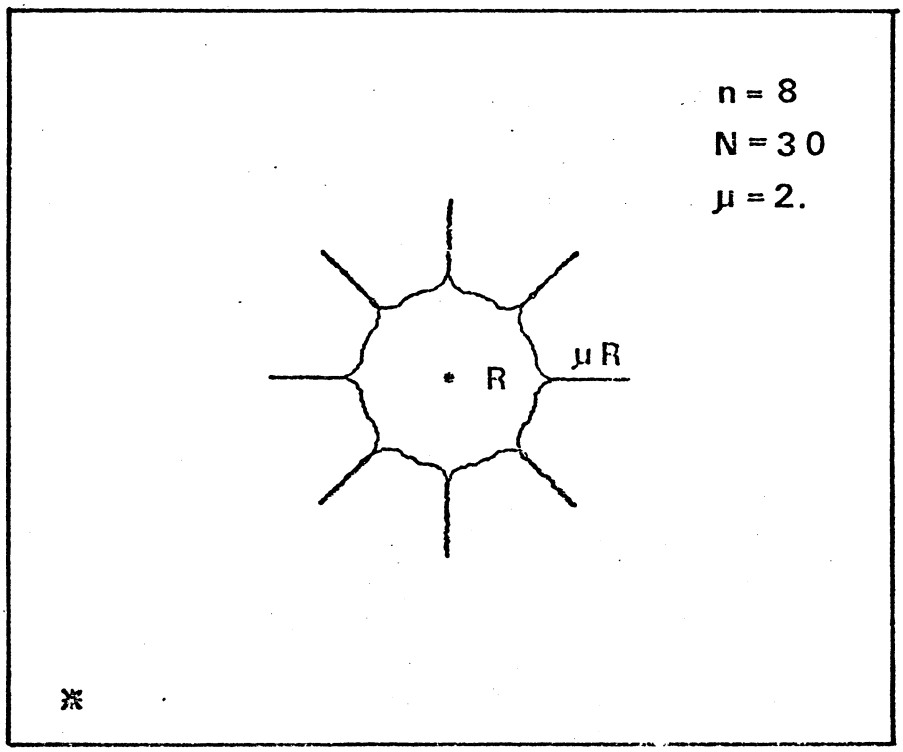


Fig 4.8 Som fig 4.5.

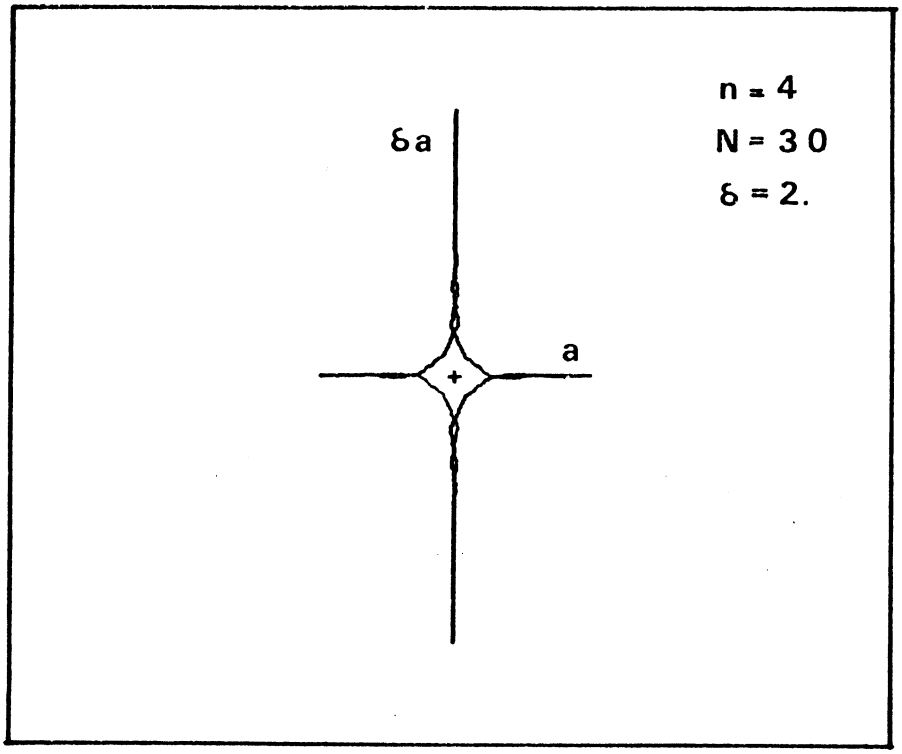


Fig 4.9 Stjärnsprickan med armar av alternerande längd.

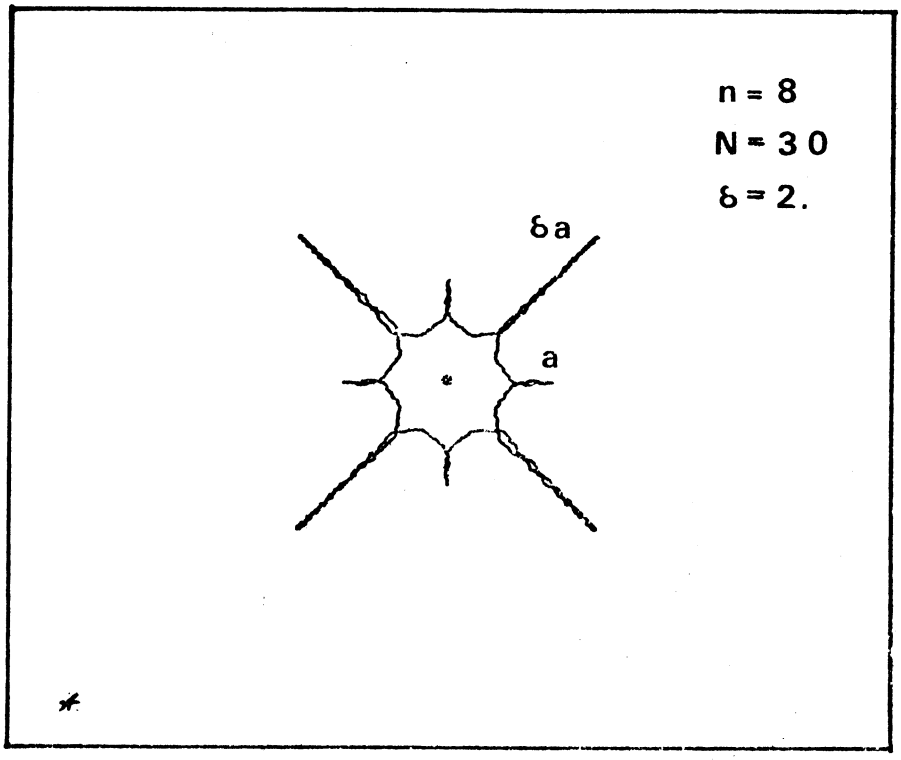


Fig 4.10 Som ovan.

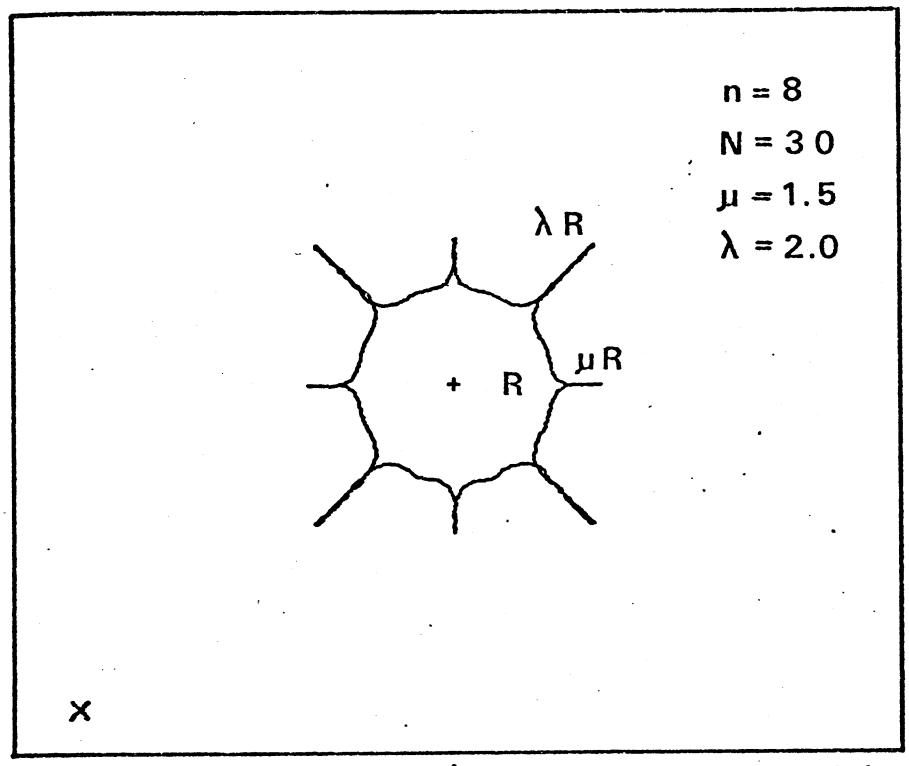


Fig 4.11 Det cirkulära hålet med radiella sprickor av alternerande längd.

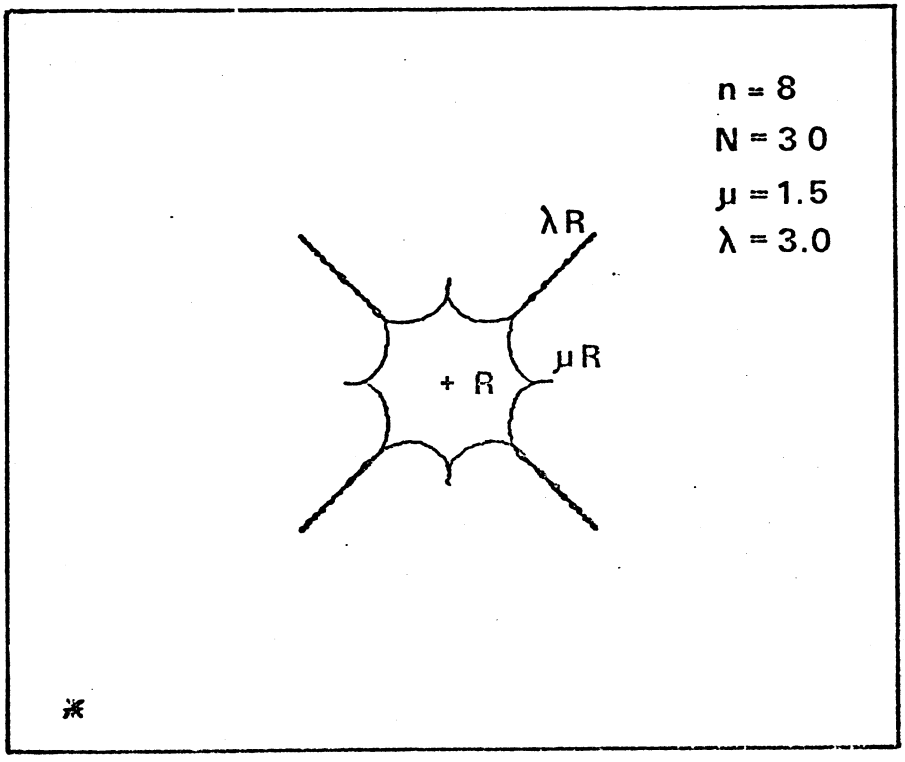


Fig 4.12 Som ovan.

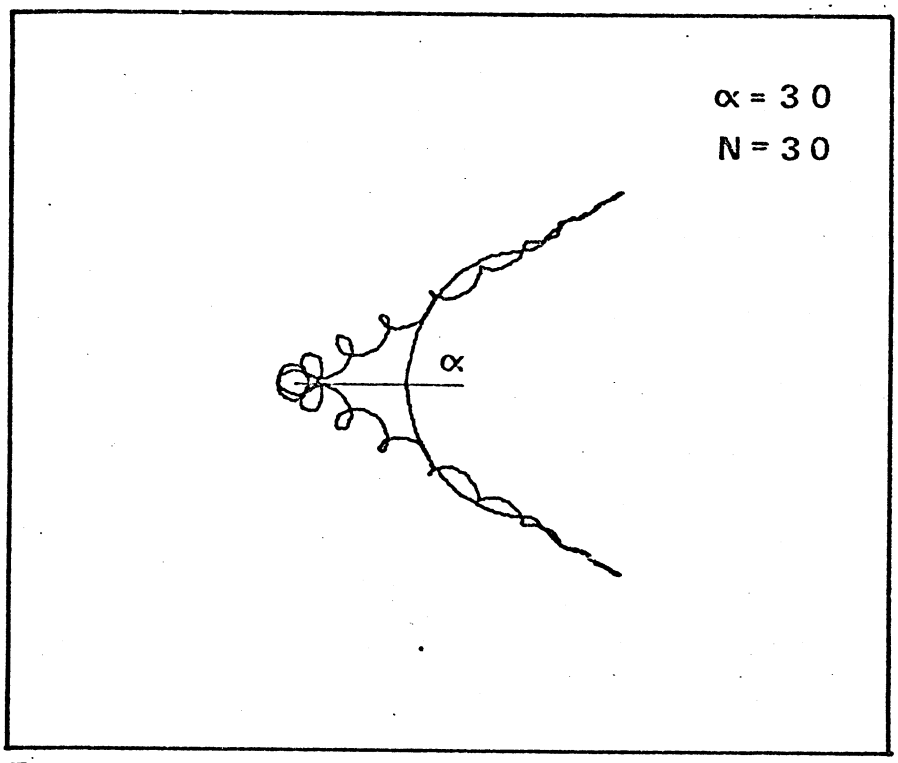


Fig 4.13 Vinkelsprickan.

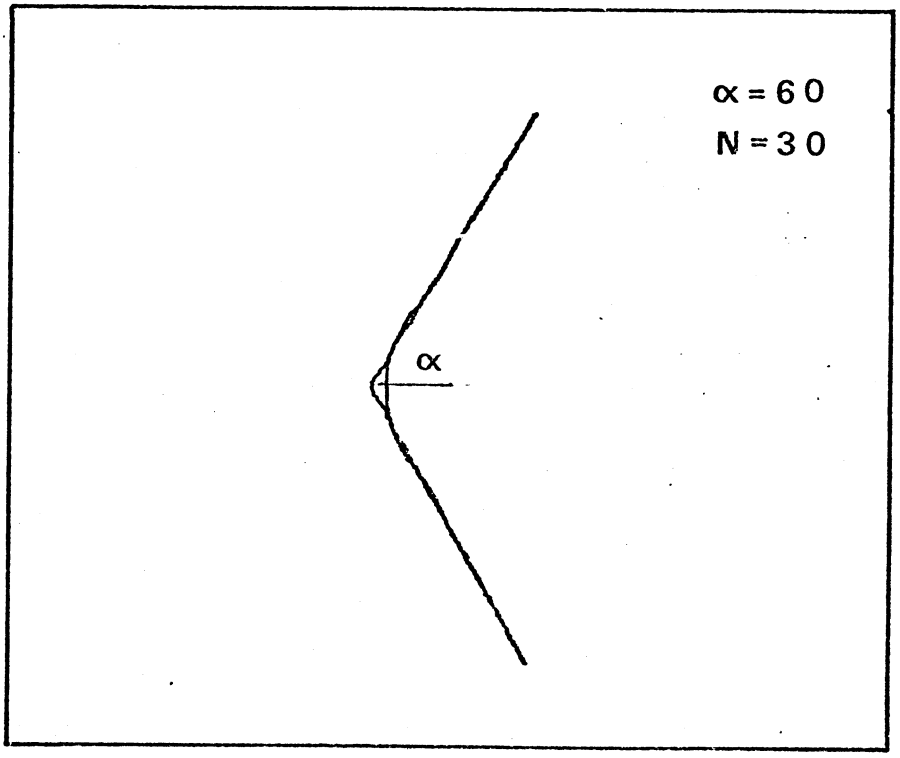


Fig 4.14 Som ovan.

4.2. Stjärnsprickan med lika långa armar under utbrett inre övertryck.

För detta fall har dels spänningsintensitetsfaktorn K_I beräknats ur (3.218) dels gasvolymen V ur (3.219) och (3.190). Resultaten är dimensionslösa med den plana sprickan som referensgeometri . Med (3.218), (3.219) och (3.190) samt (3.211)-(3.212)

$$\begin{cases} k_I(n) = K_I(n)/K_{Io} \quad , \quad K_{Io} = p\sqrt{\pi a} \\ v_o(n) = V(n)/V_o \quad , \quad V_o = 2\pi(1-\nu^2)pa^2/E \\ v_k(n) = V_k/V_o \end{cases} \tag{4.1}$$

I tabell 4.1 visas hur $k_I(n)$ och $v_o(n)$ beror av avbildningsfunktionens gradtal N. I tabell 4.2-4.3 och fig 4.15-16 visas $k_I(n)$, $v_o(n)$ och $v_k(n)$ tillsammans med motsvarande uttryck för hypocykloidsprickan enligt (3.210), $k_I(n) = 2\sqrt{n-1}/n$ och numeriska värden från Stallybrass /21/,Rooke och Sneddon /20/ och Williams /12/. Med hänsyn till konvergensen har valts N = 20 samt $\nu = 0.25$.

Avbildningspolynomet behöver endast innehålla ett fåtal termer för att spänningstillståndet skall återges med god noggrannhet, det visar tabell 4.1 och överensstämmelsen med hypocykloidsprickans värden i tabell 4.2. Dessa avviker aldrig mer än 4‰ och avvikelsen minskar med ökande n. Maximum inträffar när n = 6. Överensstämmelsen med litteraturvärdena är ännu bättre.

Utnyttjas (3.190) och hypocykloidsprickans värde på $k_I(n)$ inses att för stora n lim $v_k(n) = 2$, liksom (3.188) för hypocykloidsprickan medför att lim $v_o(n) = V_I/V_o = (1-\nu)^{-1} = 1.33$ för $\nu = 0.25$.

Jämförelsen mellan v_k och v_o visar att avbildningspolynomet väl beskriver stjärnsprickan för $n \leq 5$ i den meningen att skillnaden är 1% eller mindre. Med växande antal sprickor blir skillnaden mellan ideal och approximerad kontur allt sämre, se fig. 4.16 och de approximerade stjärnsprickorna i fig. 4.1-4.4.

Tabell 4.1: Konvergensen hos $k_I(n)$ och $v_o(n)$ mot avbildningspolynomets gradtal N.

N	6	8	10	15	20
$k_I(4)$	0.86357	0.86358	0.86356	0.86355	0.86354
$k_I(15)$			0.49745	0.49732	0.49732
$v_o(4)$	1.4690	1.4758	1.4794	1.4838	1.4858
$v_o(15)$			1.6009	1.6293	1.6469

Tabell 4.2: Den dimensionslösa spänningsintensitetsfaktorn $k_I(n)$ mot antalet sprickor n för stjärnsprickan under utbrett inre övertryck samt litteraturvärden från /12/, /20/ och /21/.

n	3	4	5	6	8	10	12	15	20
$k_I(n)$	0.9415	0.8635	0.7972	0.7425	0.6589	0.5978	0.5509	0.4973	0.4347
$2\sqrt{n-1}/n$	0.9428	0.8660	0.8000	0.7454	0.6614	0.6000	0.5528	0.4989	0.4359
/12/	0.942	0.864*	0.798	0.742	0.659				

* /20/ och /21/ anger värdet 0.8636.

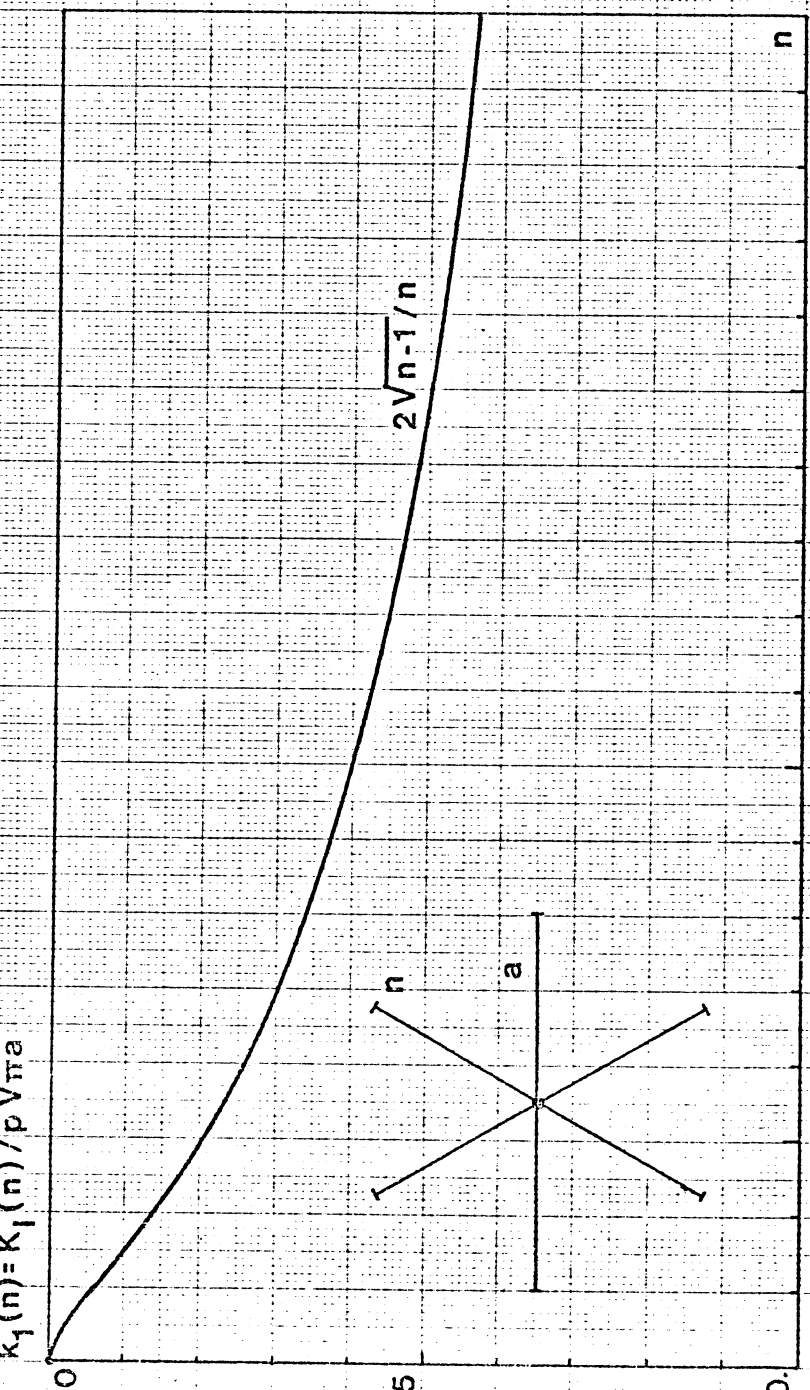
Tabell 4.3: Den dimensionslösa gasvolymen $v_o(n)$ och $v_k(n)$ mot antalet sprickor n för samma fall som ovan.

n	3	4	5	6	8	10	12	15	20
$v_o(n)$	1.3289	1.4858	1.5726	1.6220	1.6652	1.6732	1.6666	1.6409	1.6100
$v_k(n)$	1.3296	1.4914*	1.5888	1.6540	1.7367	1.7869	1.8208	1.8549	1.8893

* /20/ och /21/ anger samma värde.

Spänningsintensitetsfaktorn $k_1(n)$ för en stjärnspricka med lika långa armar under utbrett inre övertryck.

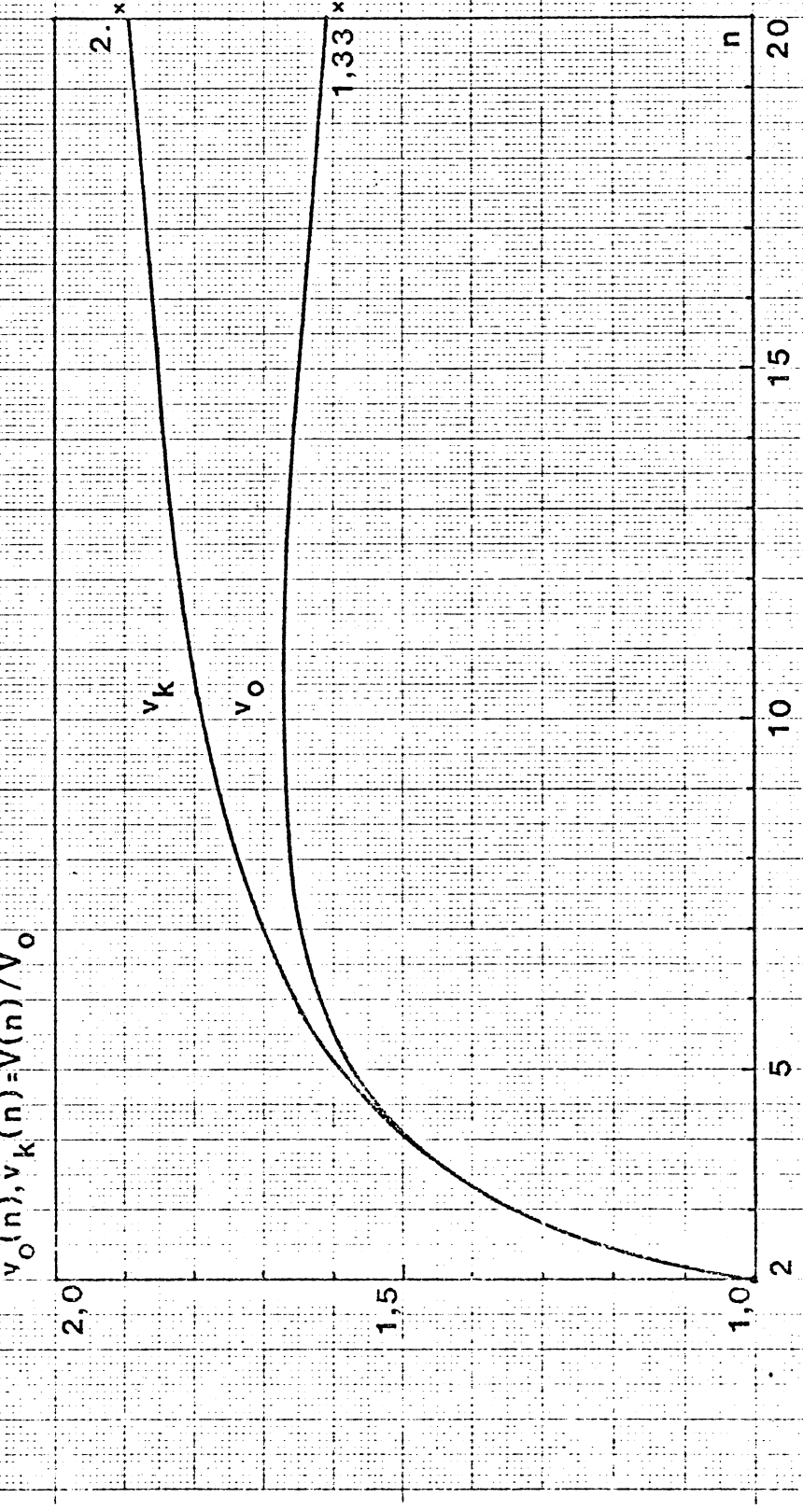
fig 4.15



Gasvolymen för en stjärnspricka med lika långa armar under utbrett inre övertryck.

fig 4.16

FOU



4.3. Det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor under utbrett inre övertryck.

Dels har spänningsintensitetsfaktorn K_I ur (3.220) dels ökningen av gasvolymen ur (3.222) beräknats på dimensionslös form. Den plana sprickan är åter referensgeometri , volymen jämförs dessutom med det cirkulära hålets volymökning V_1 ur (3.213). Vi har

$$\begin{cases} k_1(\mu,n) = K_I(\mu,n)/K_{Io} \ , \ K_{Io} = p\sqrt{\pi\mu R} \\ v_o(\mu,n) = V(\mu,n)/V_o \quad , \ V_o = 2\pi(1-\nu^2)p\mu R^2/E \\ v_1(\mu,n) = V(\mu,n)/V_1 \quad , \ V_1 = 2\pi(1+\nu)pR^2/E \end{cases} \qquad (4.2)$$

I tabell 4.4. och 4.5 visas hur $k_1(\mu,n)$ och $v_1(\mu,n)$ beror av sprick-längd och antal. Avbildningspolynomets gradtal har valts olika beroende på konvergensen.

I fig. 4.17 finns $k_1(\mu,n)$ som funktion av förhållandet mellan spricks-petsavstånd och hålradie μ, kortare uttryckt sprickläng̈den med antalet sprickor n som parameter. Ur tabell 4.4 framgår som väntat för stora sprickläng̈der att $\lim k_1(\mu,n) = k_1(n)$ för stjärnsprickan, vidare att osäkerheten i värdena för stora μ sitter i 3:e eller 4:e siffran medan för $\mu = 1.05$ och 1.10 och små n avbildningspolynomets gradtal skulle behöva vara åtskilligt större för att uppnå samma noggrannhet. Se t.ex. värdet $k_1(1.05,2)$ och fig. 4.19. Värdena för $\mu = 1.05$ borde rimligen vara lika för $n \leq 10$ då avståndet mellan två sprickspetsar är mer än 6ggr den verk-liga sprickläng̈den $(\mu-1)\cdot R$, dvs. stort i St Venants mening.

För små sprickor, $\mu-1 \ll 1$, närmar sig $k_1(\mu,n)$ kurvorna asymptotiskt värdet för en kort tryckbelastad kantspricka i en plåt under lika stor enaxlig dragning, så att $k_1(\mu,n) \approx 2\cdot 1.12\sqrt{1-1/\mu}$ oberoende av n när $\mu \to 1$. Se t.ex. Bowie /8/. Kurvan $k_1(\mu,1)$ utgör ett särfall, för stora μ liknar geometrin alltmer en plan spricka med längden μR varför $\lim k_1(\mu,1) = 1/\sqrt{2} \approx 0.7071$ när $\mu \to \infty$.

För att se hur uppskattningen från hypocykloidsprickan av värdet på sprick-längden μ_o när hålet inte längre påverkar spänningstillståndet jämfört med stjärnsprickan har $k_1(\mu,n)/k_1(n)$ ritats in i fig. 4.18. Kvotens värde är för alla $\mu_o(n)$ ett med den noggrannhet de numeriska värdena medger. Man ser också att $k_1(\mu,n)$ med ökande antal sprickor allt snabbare närmar sig stjärnsprickans värden $k_1(n)$.

I fig 4.19 där $k_1(\mu,n)$ avsatts som funktion av antalet sprickor syns osäkerheten i värdena för små n när $\mu = 1.05$ och 1.10.

Jämförelsen med Bowies /7/ värden ger överensstämmelse så långt den numeriska noggrannheten medger bedömning.

Volymökningen, $v_o(\mu,n)$ och $v_1(\mu,n)$, finns inritad i fig 4.19 och 4.20 som funktion av spricklängden. Man inser att när $\mu \to 1$ så gäller $\lim v_o(\mu,n) = (1-\nu)^{-1} = 1.33$ för $\nu = 0.25$ och $\lim v_1(\mu,n) = 1$ liksom att för stora μ gäller $\lim v_o(\mu,n) = v_k(n)$ ur (4.1) och $v_1(\mu,n) \sim \mu^2$. Fig. visar att värdena på v_o och v_1 är mycket osäkra för ett litet antal korta sprickor liksom jämförelsen med $v_k(n)$ visar att detta även gäller ett stort antal långa sprickor, jfr. skillnaden mellan $v_k(n)$ och $v_o(n)$ för stjärnsprickan i fig 4.16.

För korta sprickor ökar volymen mindre med ökande spricklängd för det cirkulära hålet med radiella sprickor än för motsvarande stjärnspricka, $v_o(\mu,n)$ har ett minimum när $n \geq 2$. Det beror på att gastrycket på hålranden motverkar sprickornas tvärdeformation så länge spetsen är nära hålranden. För stora värden på μ blir hålets inverkan försumbar och värdena för stjärnsprickan ger beteendet.

Tabell 4.4: Den dimensionslösa spänningsintensitetsfaktorn $k_I(\mu,n)$ mot sprickl ängd μ och antal n för det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor under utbrett inre övertryck p.

$k_I(\mu,n)$

	N=30		N=20*			N=10			
n \ μ	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0	$\mu \gg 1$ °
1	0.4774	0.6236	0.7407	0.8278	0.8540	0.8687*	0.8672*	0.8346	0.7071 [1]
2	0.1948	0.5532	0.7471	0.8488	0.9015	0.9448	0.9660	0.9926	1.0000
3	0.4500	0.5870	0.7498	0.8503	0.8960	0.9273	0.9377	0.9422	0.9415
4	0.4436*	0.5968	0.7416	0.8249	0.8535	0.8645	0.8648	0.8630	0.8635
5	0.4580	0.5968	0.7253	0.7858	0.7979	0.7979	0.7964	0.7967	0.7972
6	0.4414	0.5918	0.7035	0.7416	0.7437	0.7413	0.7410	0.7424	0.7425
8	0.4485	0.5749	0.6511	0.6594	0.6569	0.6573	0.6584	0.6590	0.6589
10	0.4472	0.5537	0.5980	0.5957	0.5956	0.5974	0.5978	0.5979	0.5978
12	0.4419	0.5296	0.5511	0.5481	0.5497	0.5509	0.5510	0.5510	0.5509
15	0.4296	0.4919	0.4952	0.4957	0.4971	0.4974	0.4974	0.4974	0.4973

o Värden för $\mu \gg 1$ ur tabell 4.2 för stjärnsprickan.

1 Svarar mot en hälften så lång spricka som när n = 2.

Tabell 4.5: Den dimensionslösa volymökningen $v_1(\mu,n)$, $v_o(\mu,n)$ mot spricklängd μ och antal n för det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor under utbrett inre övertryck.

$v_1(\mu,n)$

	N=30		N=20*			N=10			
n \ μ	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0	$\mu \gg 1$ °
1	2.98	4.13	1.557	1.430	1.270	1.484*	1.765*	3.150	$\sim\mu^2$
2	2.45	1.25	1.119	1.311	1.555	2.071	2.716	6.329	
3	1.027	1.084	1.170	1.450	1.820	2.577	3.492	8.467	
4	1.039*	1.071	1.225	1.584	2.037	2.932	3.978	9.553	
5	1.022	1.080	1.275	1.691	2.195	3.156	4.266	10.16	
6	1.044	1.094	1.319	1.776	2.306	3.302	4.455	10.61	
8	1.039	1.123	1.391	1.887	2.440	3.477	4.678	10.99	
10	1.043	1.147	1.442	1.952	2.517	3.580	4.818	11.02	
12	1.050	1.169	1.477	1.993	2.569	3.653	4.846	10.95	
15	1.061	1.194	1.511	2.035	2.621	3.662	4.800	10.81	

$v_o(\mu,n) = v_1(\mu,n)/0.75\,\mu^2$

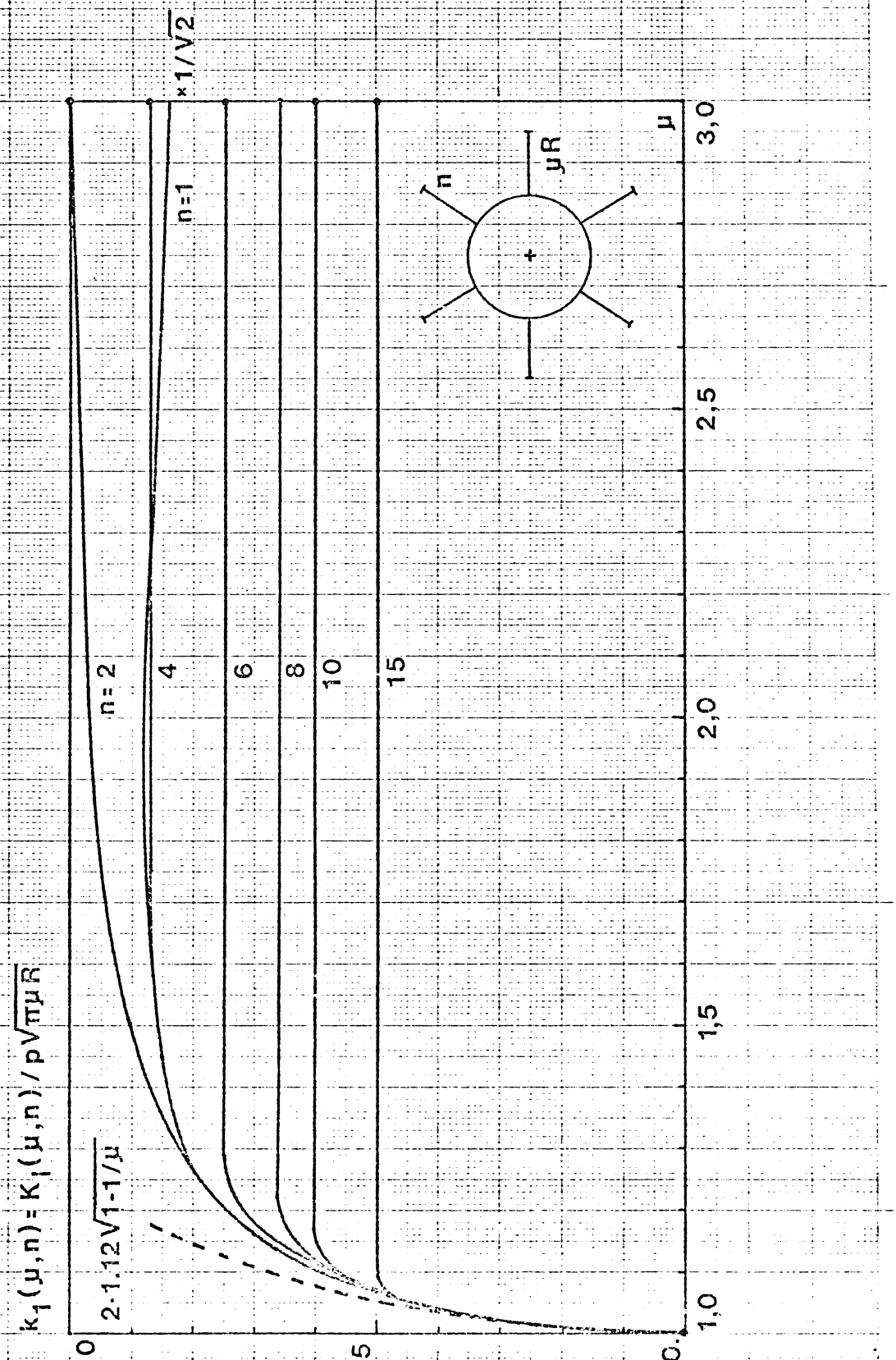
1	3.60	4.55	1.442	1.046	0.753	0.646*	0.586*	0.467	0.250
2	2.96	1.38	1.036	0.959	0.921	0.902	0.905	0.938	1.000
3	1.242	1.194	1.083	1.061	1.079	1.122	1.164	1.254	1.330
4	1.257*	1.180	1.134	1.159	1.207	1.277	1.326	1.415	1.491
5	1.236	1.190	1.181	1.237	1.301	1.374	1.422	1.505	1.589
6	1.263	1.206	1.221	1.299	1.367	1.438	1.485	1.572	1.654
8	1.257	1.237	1.288	1.381	1.446	1.514	1.559	1.628	1.737
10	1.261	1.264	1.335	1.428	1.492	1.559	1.606	1.633	1.787
12	1.270	1.288	1.368	1.458	1.522	1.590	1.615	1.622	1.821
15	1.283	1.316	1.399	1.489	1.553	1.594	1.600	1.601	1.855

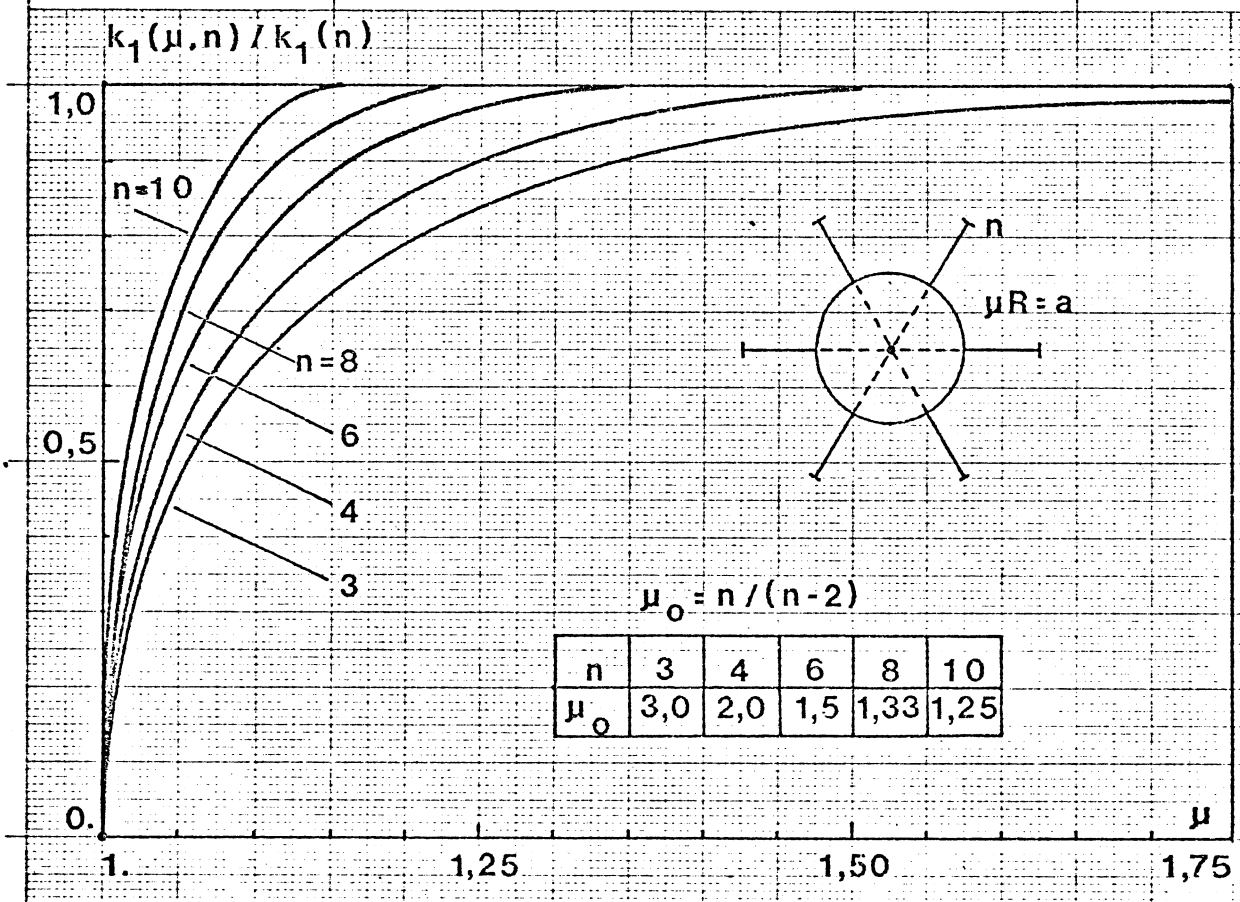
o Värden för $\mu \gg 1$ ur tabell 4.3 för stjärnsprickan.

Spänningsintensitetsfaktorn $k_I(\mu,n)$ för det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor under ett utbrett inre övertryck.

fig 4.17 88.

Fou





$\mu_o = n/(n-2)$

n	3	4	6	8	10
μ_o	3,0	2,0	1,5	1,33	1,25

Fig 4.18 Jämförelse mellan det cirkulära hålets och stjärnsprickans värden.

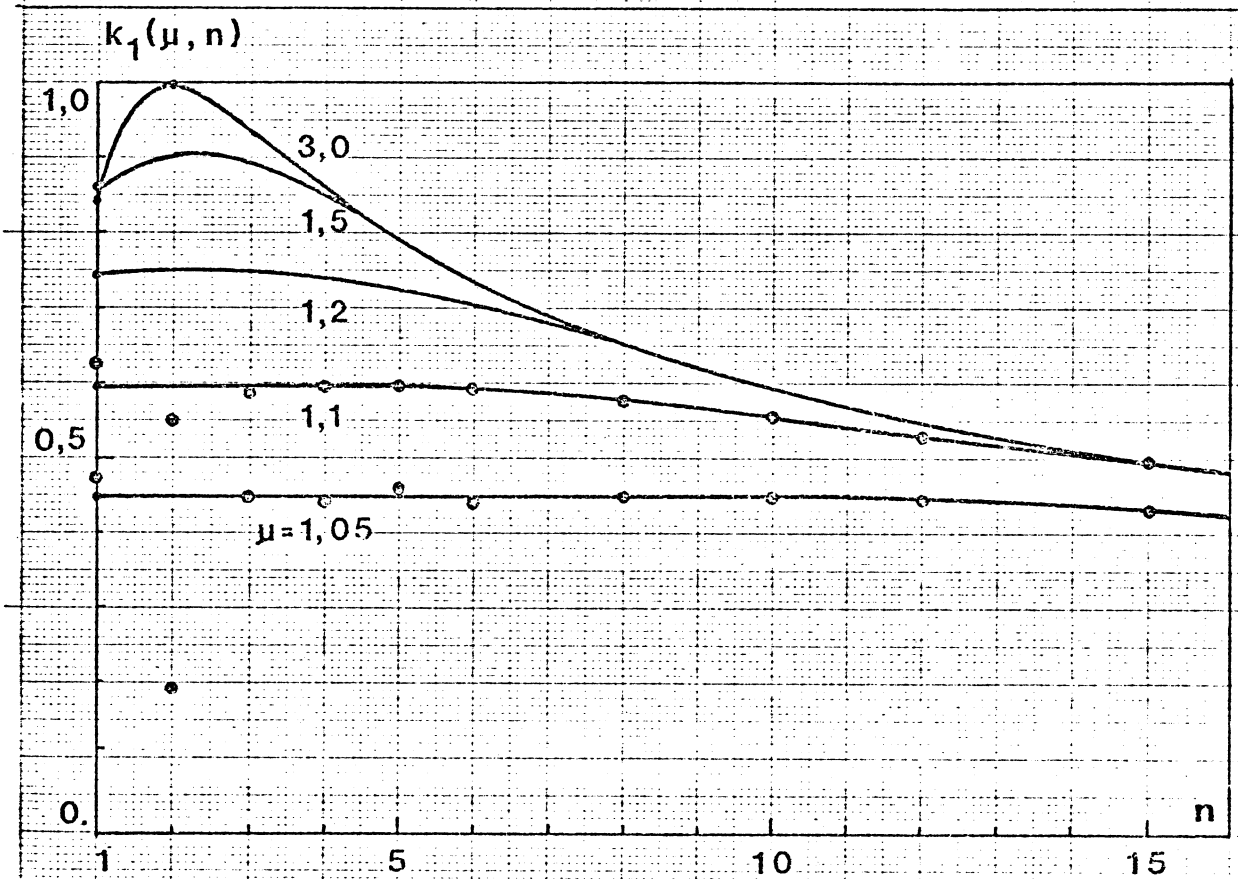


Fig 4.19 Som fig 4.17.

Volymökningen för ett cirkulärt hål med lika långa radiella sprickor.

fig 4.20+21

Fou

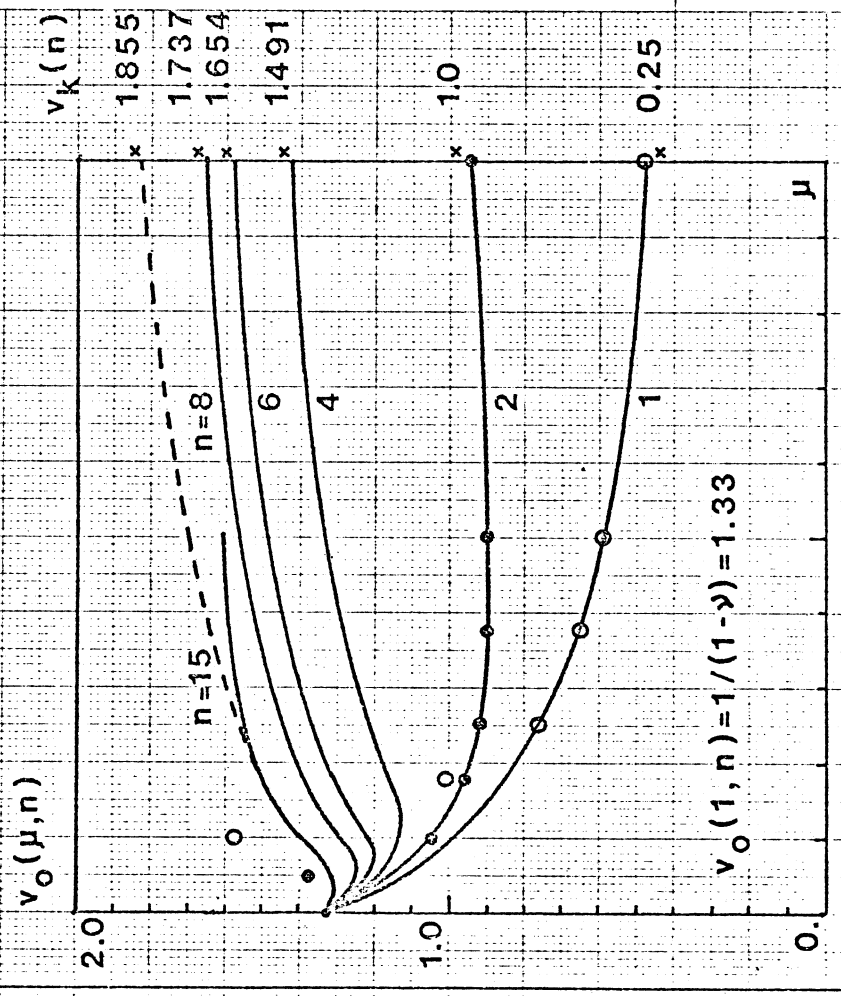


Fig 4.21 Jfrd med en plan spricka.

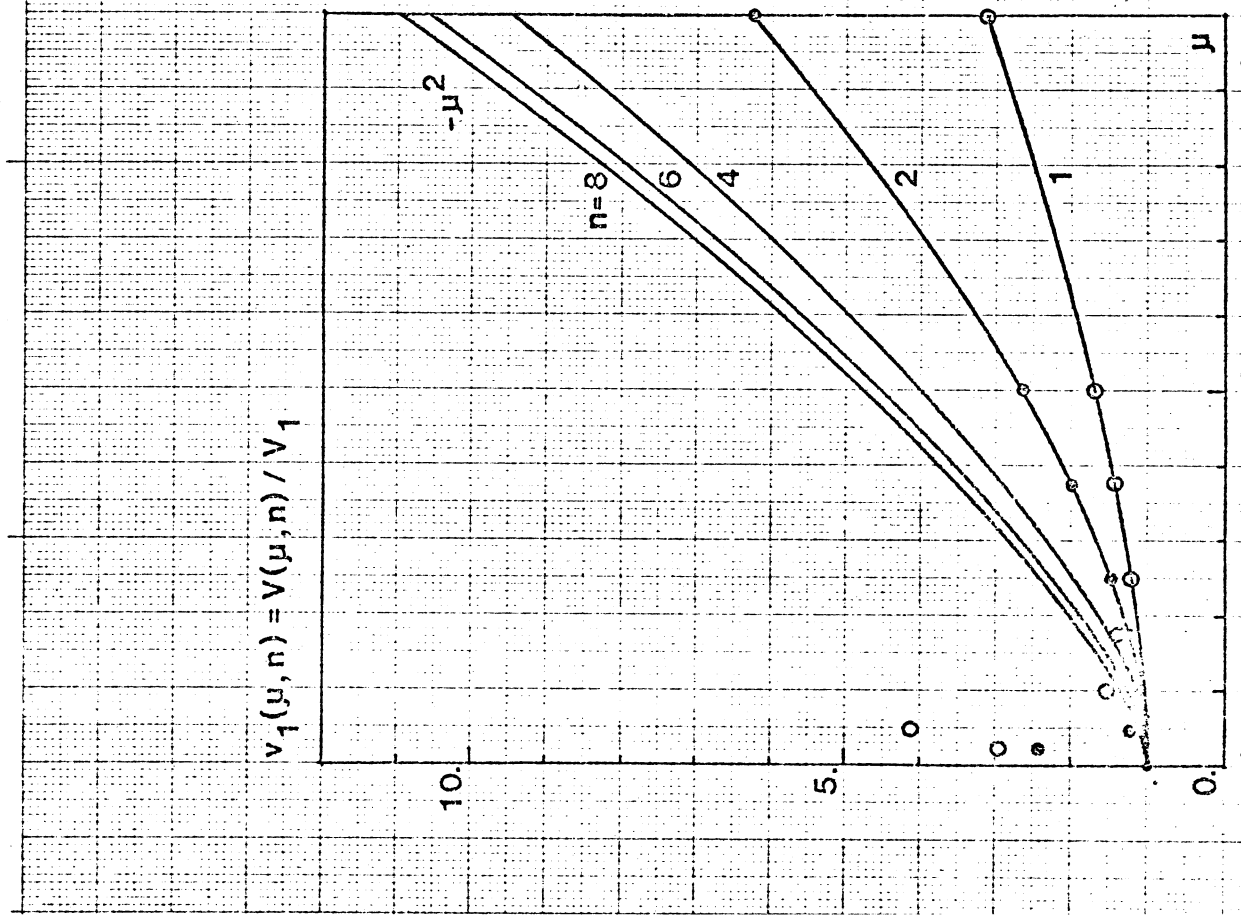


Fig 4.20 Jfrd med ett cirkulärt hål.

4.4. Stjärnsprickan med lika långa armar och centralt angripande krafter.

Här har enbart spänningsintensitetsfaktorn K_I beräknats ur (3.232) med den plana sprickan som referensgeometri för de dimensionslösa resultaten. Kraften över en sektor utgörs av resultanten till trycket p i ett borrhål $F = 2pR \cdot \sin \pi/n$. Med (3.232)

$$\begin{cases} k_I(n) = K_I(n)/K_{Io} \\ \\ K_{Io} = 2pR/\sqrt{\pi a} \end{cases} \qquad (4.3)$$

ger tabell 4.6 och fig. 4.22 värdena på $k_I(n)$. Motsvarande uttryck för hypocykloidsprickan, se (3.206), $k_I(n) = n/2\sqrt{n-1} \cdot \sin \pi/n$ liksom det asymptotiska värdet $\pi/2\sqrt{n}$ finns också medtagna. Avbildningspolynomets gradtal N = 20. Om värden för F = konst. över en sektor önskas måste k_I-värdena i tabell 4.6 divideras med $\sin \pi/n$.

Osäkerheten i värdena är från några enheter i 4:e siffran för n = 3 till några enheter i 3:e siffran för n = 20. Jämförelsen med hypocykloidsprickans värden i tabell 4.6 visar dels att för stora n gäller $k_I(n) \approx 2/\sqrt{n}$ dels att detta uttryck för $n > 2$ bättre approximerar $k_I(n)$ än det exakta värdet. En jämförelse med $k_I(n)$ för utbrett inre övertryck, tabell 4.2 och fig. 4.15, visar att båda för stora $n \sim 1/\sqrt{n}$ men att $k_I(n)$ för centralt angripande krafter avtar snabbare.

Då de centralt angripande krafterna är resultanter till det tryck som verkar över varje sektor i ett litet borrhål inses att det arbete som lasten-trycket kan uträtta på kroppen är begränsat. Eftersom den lokalt frigjorda energin i en sprickspets $\propto \overline{k_I(n)^2}$ inses att den totala energi som frigörs vid spricktillväxt, den är $\propto n\overline{k_I(n)^2}$, är begränsad och följaktligen att för stora n måste gälla att $k_I(n) \sim 1/\sqrt{n}$.

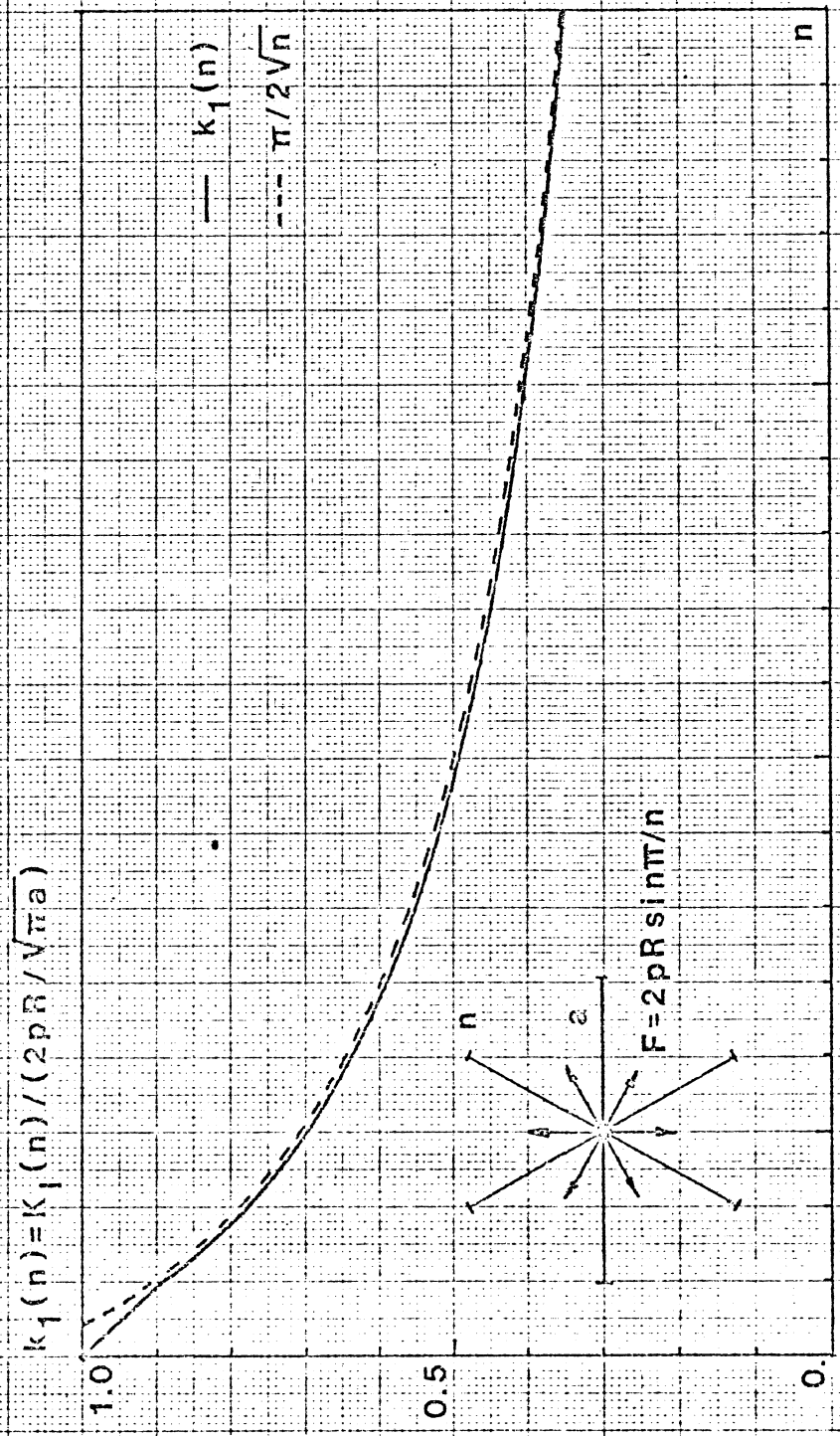
Tabell 4.6: Den dimensionslösa spänningsintensitetsfaktorn $k_I(n)$ för stjärnsprickan under centralt angripande krafter och jämförbara uttryck för hypocykloidsprickan. N = 20.

n	3	4	5	6	8	10	12	15	20
$k_I(n)$	0.8913	0.7800	0.6990	0.6382	0.5523	0.4935	0.4501	0.4020	0.3476
$\frac{n \sin \pi/n}{2\sqrt{n-1}}$	0.9186	0.8165	0.7347	0.6708	0.5785	0.5150	0.4636	0.4167	0.3589
$\pi/2\sqrt{n}$	0.9068	0.7853	0.7025	0.6413	0.5554	0.4967	0.4534	0.4056	0.3512

Spänningsintensitetsfaktorn $k_1(n)$ för en stjärnspricka med lika långa armar och centralt angripande krafter.

fig 4.22

Fou



4.5. Stjärnsprickan med armar av alternerande längd under utbrett inre övertryck.

Dels har spänningsintensitetsfaktorerna, K_{I1} för spetsarna med längden a och K_{I2} för spetsarna med längden δ a, ur (3.223) och (3.224) beräknats dels gasvolymen V bestämd genom spänningsintensitetsfaktorerna ur (3.191) samt genom randförskjutningarna ur (3.225). Den plana sprickan utgör referensgeometri för de dimensionslösa storheterna k_{11}, k_{12}, v_o och v_k givna av resp. samband där $n = 2m$, $n > 2$

$$\begin{cases} k_{11}(\delta,n) = K_{11}(\delta,n)/K_{Io1}, & K_{Io1} = p\sqrt{\pi a} \\ k_{12}(\delta,n) = K_{12}(\delta,n)/K_{Io2}, & K_{Io2} = p\sqrt{\pi\delta a} \\ v_o(\delta,n) = V(\delta,n)/V_o, & V_o = 2\pi(1-\nu^2)pa^2/E \\ v_k(\delta,n) = V_k(\delta,n)/V_o & \end{cases} \tag{4.4}$$

Spänningsintensitetsfaktorerna $k_{11}(\delta,n)$ och $k_{12}(\delta,n)$ jämförs med en plan spricka av olika längd. Detta av symmetriskäl men de blir därigenom inte jämförbara om inte $K_{I2}(\delta,n)$ relateras till samma spets som $K_{I1}(\delta,n)$ genom uttrycket $k_{12}'(\delta,n) = k_{12}(\delta,n)\sqrt{\delta}$.

I tabell 4.7 och 4.8 finns värdena på $k_{11}(\delta,n)$, $k_{12}(\delta,n)$, $v_o(\delta,n)$ och $v_k(\delta,n)$ som funktion av förhållandet mellan armlängder δ och antal n för $\delta \geq 1$. Man inser av symmetriskäl att

$$\begin{cases} k_{11}(\delta,n) = k_{12}(1/\delta,n) \\ k_{12}(\delta,n) = k_{11}(1/\delta,n) \end{cases} \tag{4.5}$$

Värdena finns inritade i fig. 4.23-4.30 för $k_{11}(\delta,n)$ och $k_{12}(\delta,n)$ som en funktion av dels längdförhållandet δ dels antalet armar n med den andra storheten som parameter. Gasvolymen $v_k(\delta,n)$ visas i fig. 4.31 som funktion av längdförhållandet. Den plana sprickan kommenteras för sig.

Avbildningspolynomets gradtal N = 20 vilket ger en osäkerhet från 5:e siffran när n är litet och $\delta \approx 1$ till 3:e siffran för stora n och δ för spänningsintensitetsfaktorerna.

Man inser att spänningsintensitetsfaktorernas värden alla är lika stora när sprickorna är lika långa och att värdet är det samma som tabell 4.2 ger för stjärnsprickan med lika långa armar, dvs $k_{11}(1,n) = k_{12}(1,n) = k_{12}'(1,n) = k_1(n)$. Vidare inses att när längdförhållandet δ antingen

är mycket stort eller mycket litet så kan de kortare sprickorna inte påverka spänningstillståndet nämnvärt vid spetsarna hos de längre. Detta uttrycks så att $\lim_{\delta \to \infty} k_{12}(\delta,n) = \lim_{\delta \to 0} k_{11}(\delta,n) = k_I(n/2)$, dvs

spänningsintensitetsfaktorns värde svarar mot stjärnsprickans med lika långa armar för halva antalet armar. Det syns vid ett studium av tabell 4.7 och fig. 4.23-4.29.

Dessa fig. visar också att stjärnsprickan med lika långa armar är instabil ur tillväxtsynpunkt då spänningsintensitetsfaktorn för den längre spetsen alltid är större än värdet för den kortare. Det följer av att värdena relaterade till spetsen av längd a, $k_{11}(\delta,n)$ och $k_{12}'(\delta,n)$, uppfyller villkoren $k_{11}(\delta,n) > k_{12}'(\delta,n)$ när $\delta < 1$ och $k_{12}'(\delta,n) > k_{11}(\delta,n)$ när $\delta > 1$. Denna tendens till instabilitet ökar med antalet sprickor. Den är som sådan lätt förståelig då för ett utbrett inre övertryck p $K_I \propto \sqrt{a}$, dvs. en lång spricka alltid farligare.

Vad som också bör observeras är spetsarna på de kortare sprickorna sluts när längdförhållandet blir tillräckligt stort för fler än n = 4 sprickor. Detta inträffar när $k_{11}(\delta,n)$ eller $k_{12}(\delta,n)$ blir negativa och då gäller inte räkningarna längre, se avsnitt 3.7.2. Spänningstillståndet i sektorn mellan två närliggande sprickspetsar hos stjärnsprickan med lika långa armar liknar med ökande antal armar alltmer ett hydrostatiskt. Trycket i tvärled längs bissektrisen kan t.o.m. överskrida trycket på sprickranden, se Kutter /3/ och /4/, vilket medför att om en för kort spricka introduceras förmår trycket på dess rand inte öppna den. För en plan spricka liknar spänningstillståndet inte ett hydrostatiskt varför någon slutningseffekt inte inträffar när n = 4, se tabell 4.7 och fig. 4.23. För n = 12 är längdförhållandet 1,4 tillräckligt för att den korta sprickans spets skall slutas och för ett mycket stort antal armar går det mot ett.

I fig. 4.30 visas också spänningsintensitetsfaktorerna $k_{11}(\delta,n)$ och $k_{12}(\delta,n)$ men som funktion av antalet armar n. Symmetriegenskapen $k_{11}(\delta,n) = k_{12}(1/\delta,n)$ syns direkt.

Överensstämmelsen mellan gasvolymen dels beräknad ur randförskjutningarna, $v_o(\delta,n)$, dels beräknad med spänningsintensitetsfaktorerna, $v_k(\delta,n)$ är bättre än 1% för n = 4. Avvikelsen dvs. skillnaden mellan ideal och approximerad kontur ökar snabbt med antal sprickarmar n och är ca 12% när n = 12. Se tabell 4.8. Gasvolymen $v_k(\delta,n)$ visas i fig. 4.31. Då volymen relateras till den plana sprickan med sprickläng d a inses att

$$v_k(1/\delta,n) = v_k(\delta,n)/\delta^2 \qquad (4.6)$$

Vidare att när alla sprickorna är lika långa värdet är detsamma som tabell 4.3 ger för stjärnsprickan med lika långa armar, dvs $v_k(1,n) = v_k(n)$. När längdförhållandet blir litet, $\delta << 1$, ger den kortare sprickorna inget bidrag till volymen och värdet svarar mot en stjärnsprickas med lika långa armar men halva antalet dvs $\lim_{\delta \to 0} v_k(\delta,n) = v_k(n/2)$. När längdförblir stort, $\delta >> 1$, inses då med (4.6) att $v_k(\delta,n) \approx v_k(n/2) \cdot \delta^2$. För $n = 4$ ger detta asymptoten δ^2 när $\delta > 1$ och linjen 1 när $\delta < 1$ vilket är den undre begränsningslinjen i fig. 4.30. Med ökande antal sprickarmar n närmar sig kurvan $v_k(\delta,n)$ alltmer den övre gränsen i figuren, $v_k(\delta,n) \approx 2\delta^2$ när $\delta > 1$ och $v_k(\delta,n) \approx 2$ när $\delta < 1$. Kurvorna är heldragna inom det intervall för δ där inga slutningseffekter uppträder. För ett mycket stort antal sprickor krymper det till punkten $\delta = 1$.

Den plana sprickan med armar av olika längd under utbrett inre övertryck är ett ointressant specialfall. Spänningsintensitetsfaktorerna $K_{I1}(\delta,n)$ och $K_{I2}(\delta,n)$ är alltid lika stora oberoende av den godtyckliga definitionen av armlängd och sprickan således geometriskt stabil ur tillväxtsynpunkt.

I och med att en stjärnspricka både med lika långa armar och armar av alternerande längd under utbrett inre övertryck studerats finns nu kvantitativa uppgifter om den relaxation av spänningarna som uppträder vid existerande sprickspetsar när nya sprickor initieras. Den slutningseffekt som påverkar dessa nya sprickor om de är för korta från början hindrar effektivt uppkomsten av dem. Ju fler sprickorna är från början desto effektivare undertrycks uppkomsten av nya.

Låt oss ytterligare belysa uttrycket: stjärnsprickan är geometriskt instabil ur tillväxtsynpunkt. Från en situation där vi har en stjärnspricka med ett givet antal lika långa armar kommer, om belastningen ökas så att tillväxt initieras, någon eller några av spetsarna börja växa före de andra p.g.a. ojämnheter i materialegenskaperna eller små avvikelser från den ideala geometrin. Då spänningsintensitetsfaktorerna ökar med tillväxten för dessa spetsar och minskar för de övriga underlättas ytterligare tillväxt för dem som redan börjat växa. Stjärnsprickans alla armar kan således inte växa samtidigt. Med geometriskt instabil tillväxt förstås alltså här att en geometriskt likformig tillväxt inte är möjlig för stjärnsprickan.

I avsnitt 4.6–4.8 noteras bl.a. hur närvaron av ett cirkulärt hål och en icke utbredd last påverkar instabiliteten.

Tabell 4.7: De dimensionslösa spänningsintensitetsfaktorerna $k_{11}(\delta, n)$ och $k_{12}(\delta, n)$ för stjärnsprickan med armar av alternerande längd under utbrett inre övertryck. N = 20.

$k_{11}(\delta, n) = k_{12}(1/\delta, n)$

n \ δ	1.00	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0	5.0	10.0	20.0
4	0.8636	0.8485	0.8333	0.8026	0.7573	0.7141	0.6479	0.5897	0.4251	0.2668	0.1332	0.0444
6	0.7426	0.7052	0.6666	0.5884	0.4760	0.3752	0.2391	0.1383	0.0304*	o		
8	0.6590	0.6034	0.5451	0.4292	0.2738	0.1525	0.0177	o				
10	0.5979	0.5266	0.4515	0.3070	0.1331	0.0206	o					
12	0.5510	0.4656	0.3759	0.2116	0.0390	0.0039|					

* $\delta = 2.4$ o $k_{11}(\delta, n) < 0$ \| $\delta = 1.4$

$k_{12}(\delta, n) = k_{11}(1/\delta, n)$

n \ δ	1.00	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0	5.0	10.0	20.0
4	0.8636	0.8777	0.8902	0.9113	0.9350	0.9517	0.9697	0.9803	0.9952	0.9993	0.9997	0.9962
6	0.7426	0.7766	0.8055	0.8506	0.8931	0.9168	0.9343	0.9404	0.9424*			
8	0.6590	0.7080	0.7478	0.8032	0.8449	0.8600	0.8657	0.8651				
10	0.5979	0.6588	0.7056	0.7625	0.7936	0.7997						
12	0.5510	0.6216	0.6722	0.7253	0.7440	0.7453|					

Tabell 4.8: De dimensionslösa volymerna $v_o(\delta, n)$ och $v_k(\delta, n)$ för stjärnsprickan med armar av alternerande längd under utbrett inre övertryck. N = 20.

$v_o(\delta, n)$

n \ δ	1.00	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0	5.0	10.0	20.0
4	1.479	1.556	1.639	1.827	2.150	2.530	3.280	4.166	9.070	24.99	100.4	426.9
6	1.601	1.685	1.785	2.016	2.446	2.969	4.007	5.25	7.59*	○		
8	1.632	1.720	1.833	2.102	2.612	3.226	4.42	○				
10	1.633	1.725	1.843	2.139	2.711	3.38	○					
12	1.623	1.718	1.842	2.171	2.761	○						

* $\delta = 2.4$ ○ $k_{11}(\delta, n) < 0$

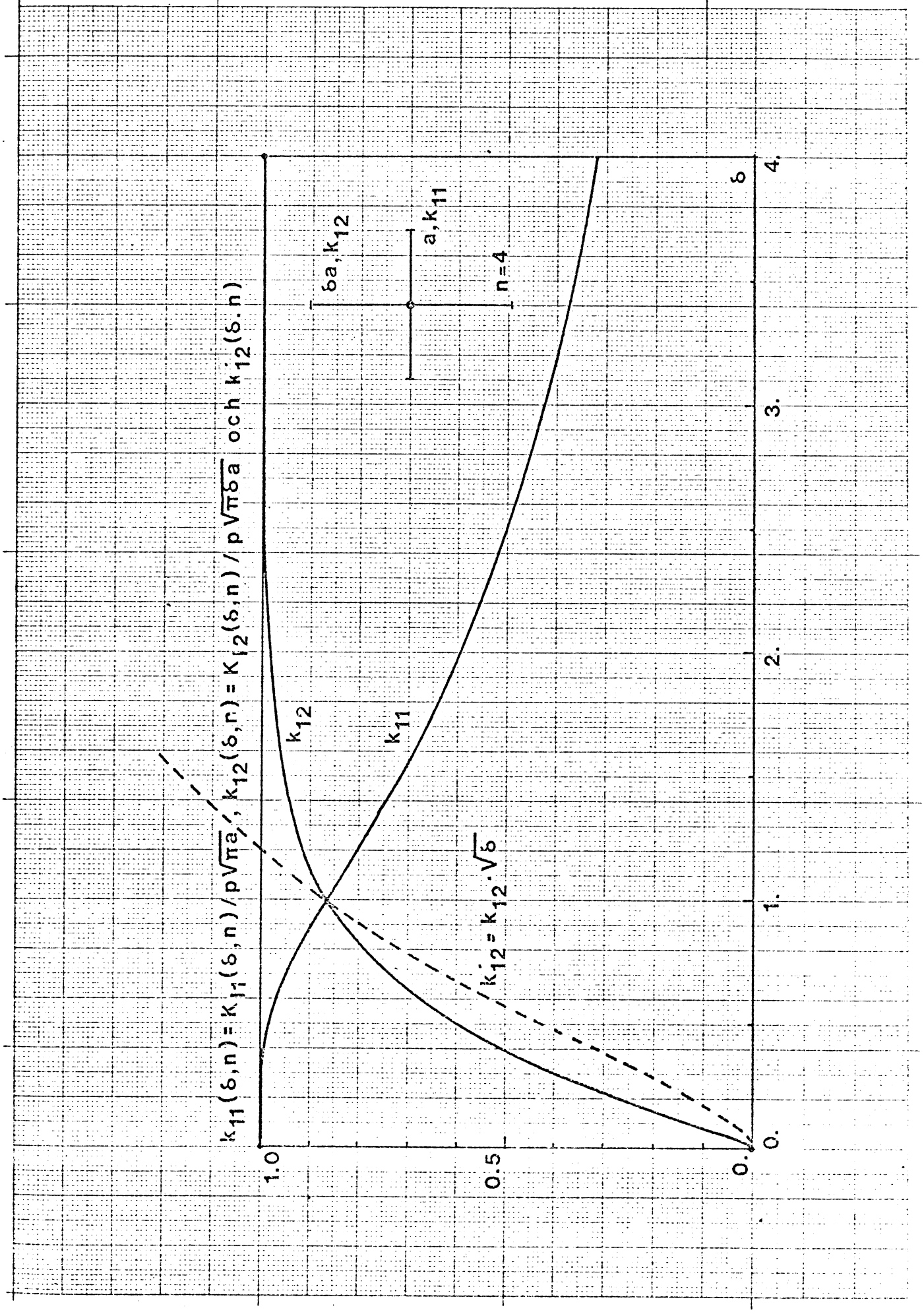
$v_k(\delta, n)$

n \ δ	1.00	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0	5.0	10.0	20.0
4	1.491	1.569	1.653	1.840	2.167	2.548	3.299	4.191	9.095	25.04	99.99	397.0
6	1.654	1.743	1.844	2.082	2.521	3.048	4.096	5.33	7.67○*			
8	1.737	1.836	1.948	2.227	2.752	3.375	4.59	○				
10	1.788	1.890	2.016	2.329	2.914	3.60	○					
12	1.822	1.928	2.064	2.409	3.031	○						

Spänningsintensitetsfaktorerna för en stjärnspricka med armar av alternerande längd under utbrett inre övertryck. n=4.

fig 4.23

FOu



Som fig 4.23.

fig 4.24+25

FOu 100.

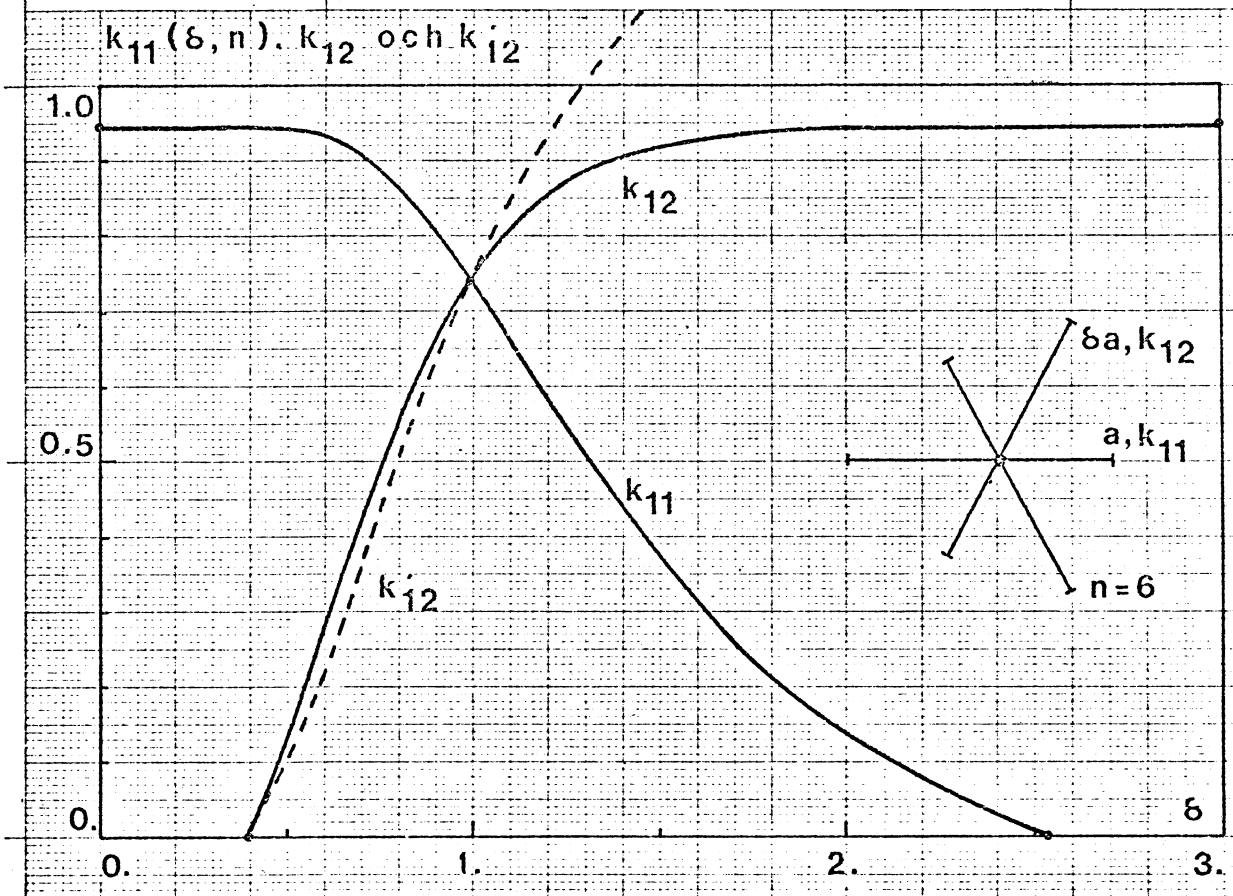


Fig 4.24 n=6 armar.

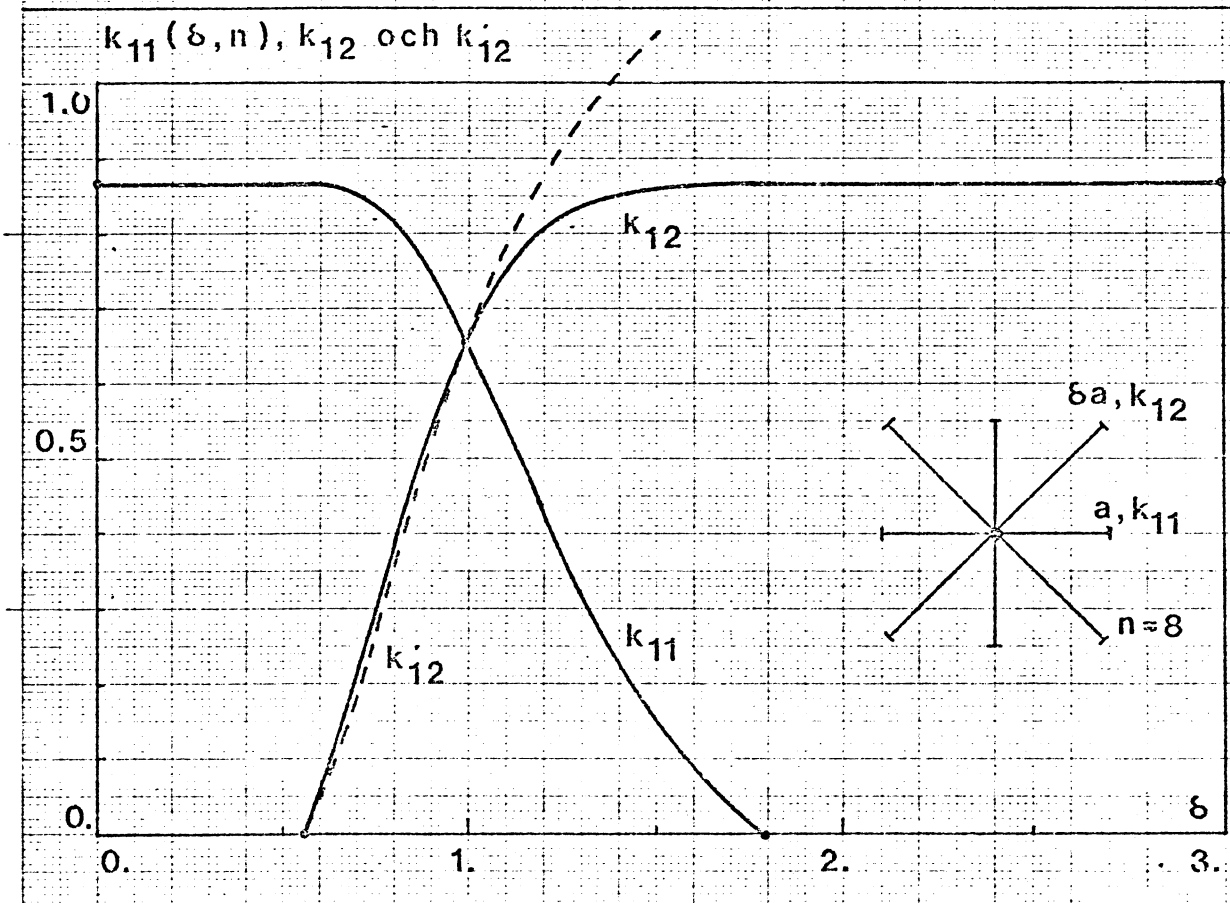


Fig 4.25 n=8 armar.

Som fig 4.23.

fig 4.26+27

FOa 101.

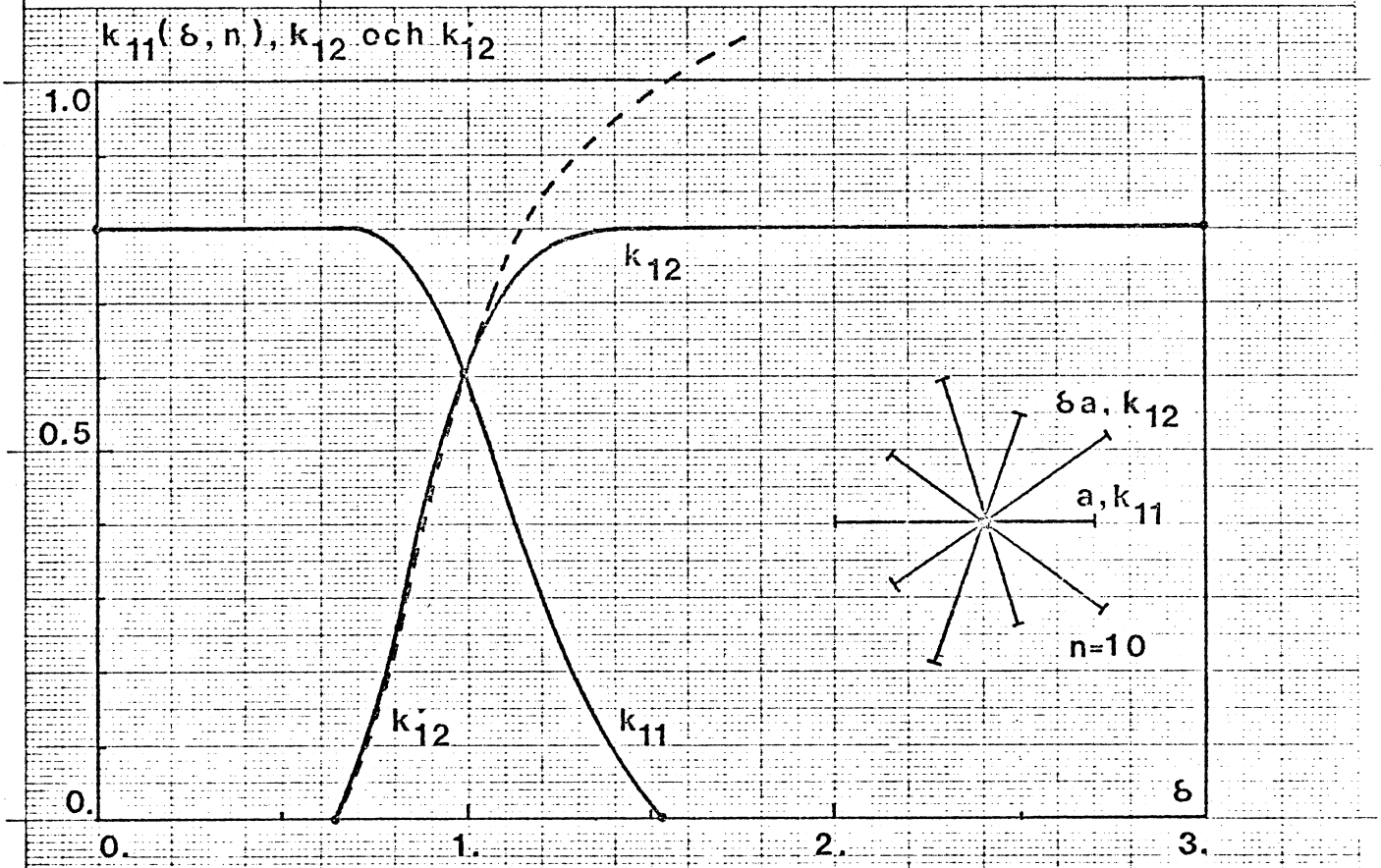


Fig 4.26 n=10 armar.

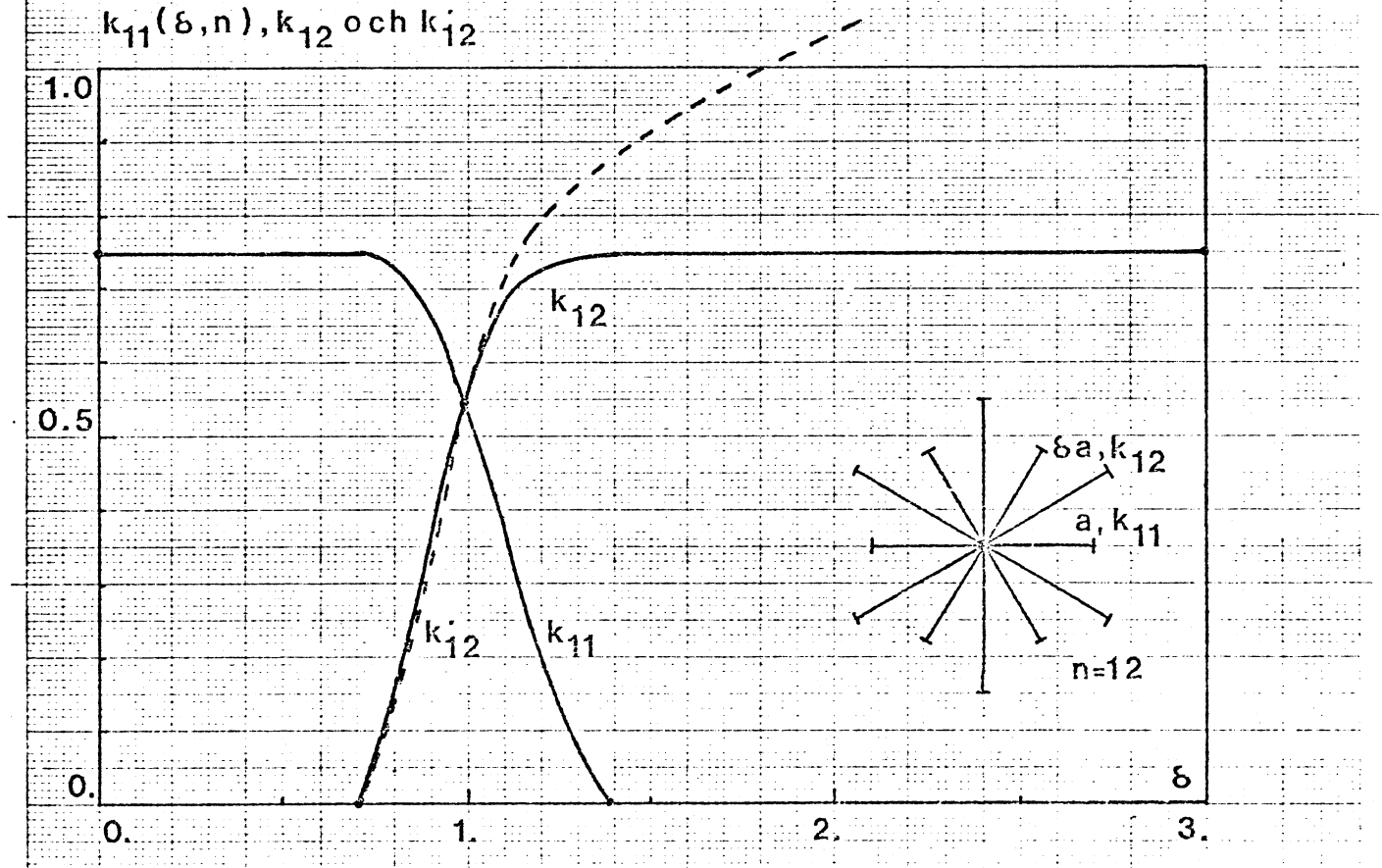


Fig 4.27 n=12 armar.

Som fig 4.23 fast värden för ena spetsen för sig.

fig 4.28+29

FOU 102.

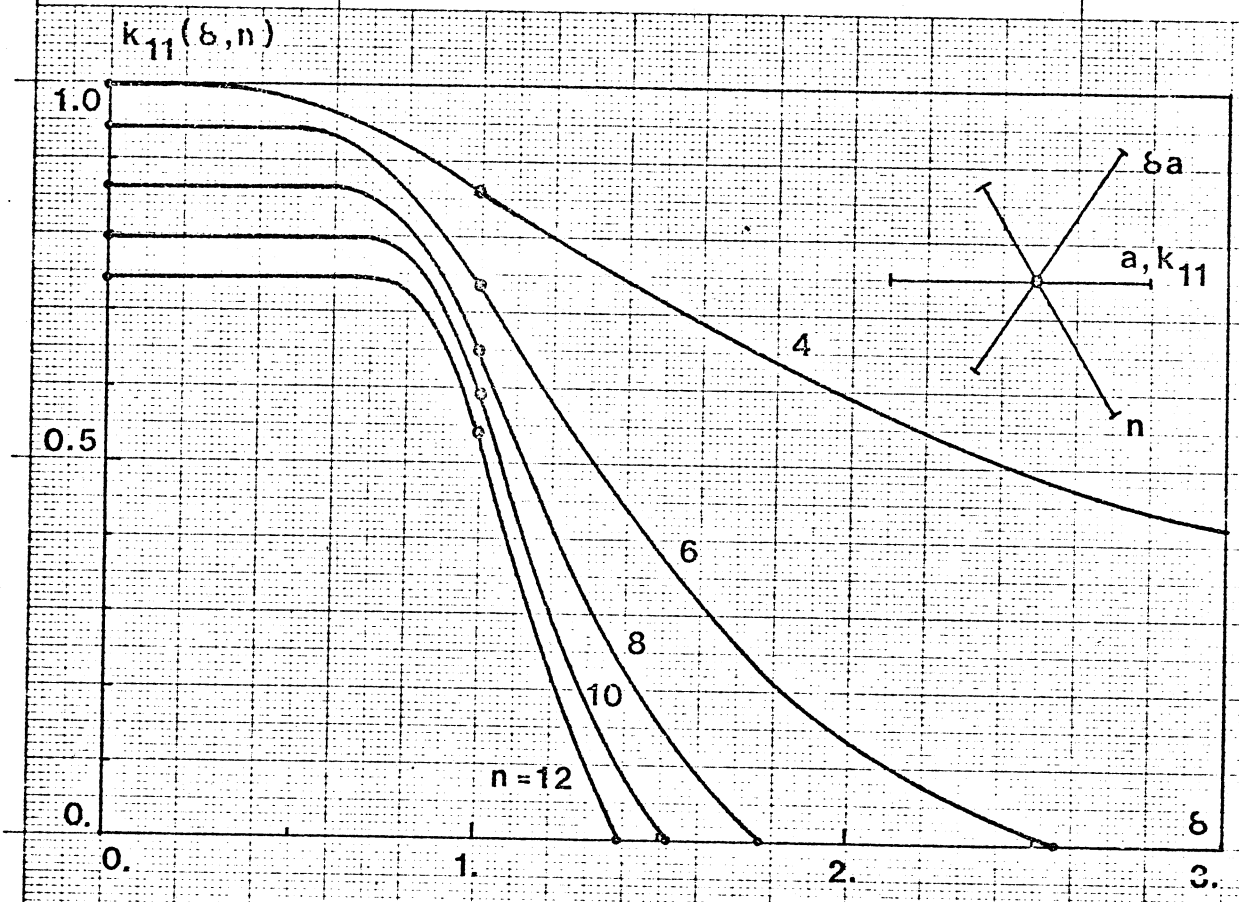


Fig 4.28 Värden för a-spetsen.

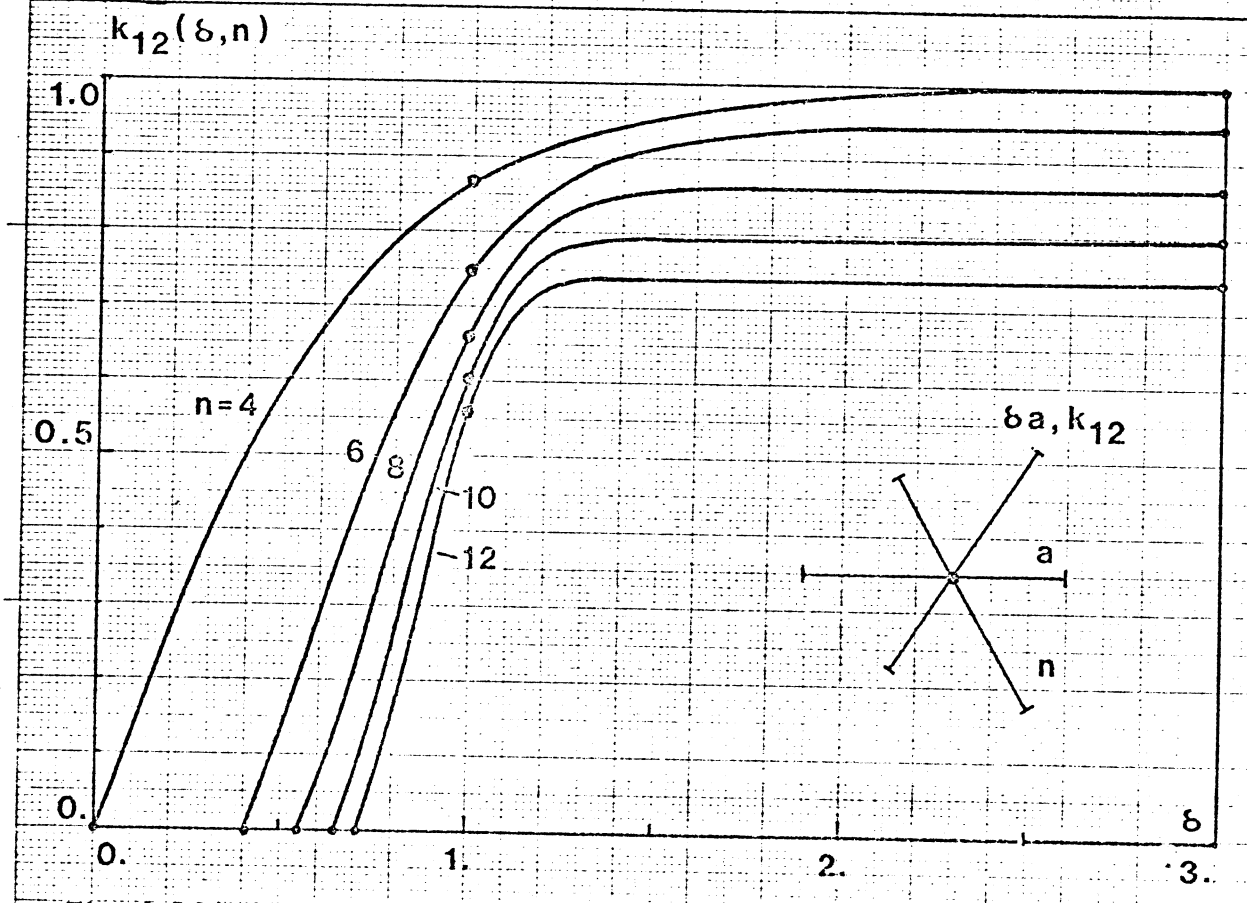


Fig 4.29 Värden för δa-spetsen.

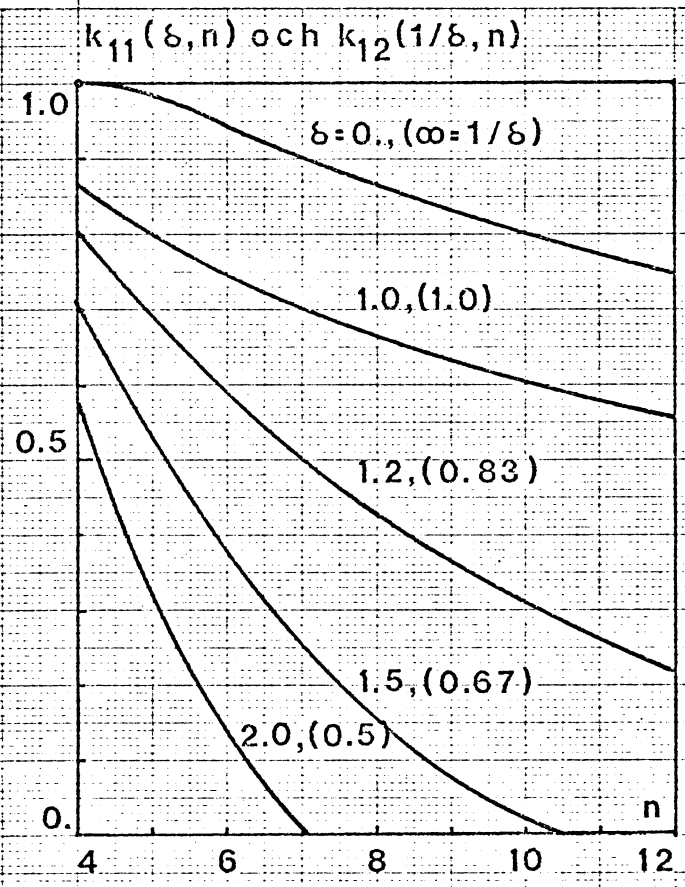


Fig 4.30 Som fig 4.23.

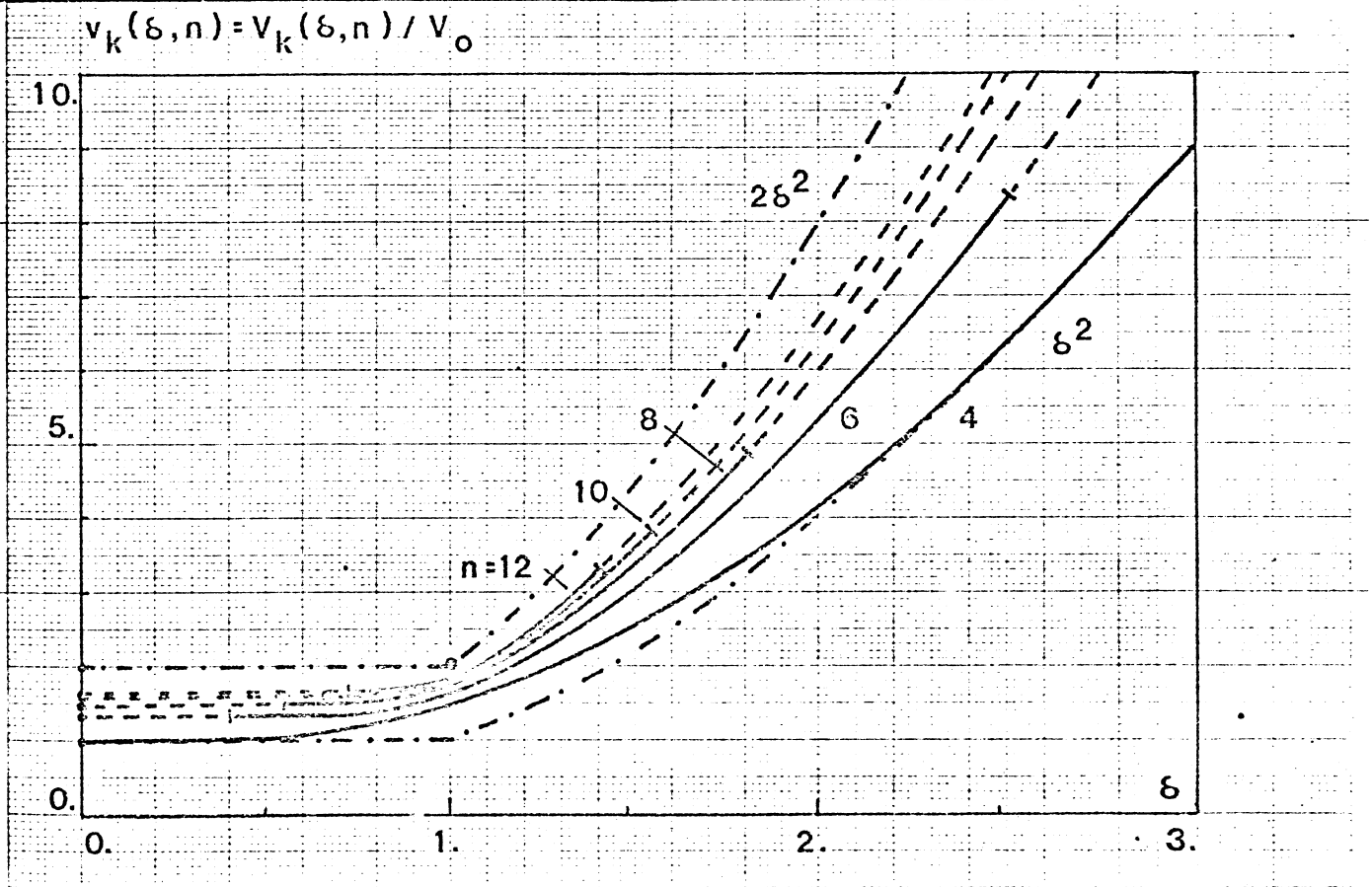


Fig 4.31 Gasvolymen för en stjärnspricka med armar av alternerande längd under ett utbrett inre övertryck.

4.6. Det cirkulära hålet med radiella sprickor av alternerande längd under utbrett inre övertryck.

Både spänningsintensitetsfaktorer, dels K_{I1} för spetsarna på avståndet μR och dels K_{I2} för dem på avståndet λR, ur (3.226) och (3.227) samt gasvolymen ur (3.228) har beräknats. Volymvärdena redovisas inte. Den plana sprickan är referensgeometri för de dimensionslösa storheterna k_{I1} och k_{I2} som ges av (3.226) och (3.227) när n = 2 m.

$$\begin{cases} k_{I1}(\mu,\lambda,n) = K_{I1}(\mu,\lambda,n)/K_{Io1},\ K_{Io1} = p\sqrt{\pi\mu R} \\ \\ k_{I2}(\mu,\lambda,n) = K_{I2}(\mu,\lambda,n)/K_{Io2},\ K_{Io2} = p\sqrt{\pi\lambda R} \end{cases} \qquad (4.7)$$

Referenssprickans längd är olika i de bägge fallen och $K_{I2}(\mu,\lambda,n)$ relateras till samma sprickspets som $K_{I1}(\mu,\lambda,n)$ genom uttrycket $k_{I2}'(\mu,\lambda,n) = k_{I2}(\mu,\lambda,n)\cdot\sqrt{\lambda/\mu}$.

Värdena på $k_{I1}(\mu,\lambda,n)$ och $k_{I2}(\mu,\lambda,n)$ finns i tabell 4.9 där sambandet

$$k_{I1}(\mu,\lambda,n) = k_{I2}(\lambda,\mu,n) \qquad (4.8)$$

utnyttjas, vidare finns de i fig. 4.32-4.49 som funktion av sprickspetsavståndet λ med sprickspetsavståndet μ och antalet armar n som parametrar eller omvänt $\lambda \rightleftharpoons \mu$ med (4.8). Gradtalet N på avbildningspolynomet har valts N = 20 när μ eller $\lambda > 1.20$ och N = 30 i övrigt. Härigenom varierar osäkerheten i de beräknade värdena alltifrån någon enhet i fjärde siffran när μ och λ är stora till några enheter i andra siffran för små μ och λ . Värdena för den kortare sprickspetsen torde genomgående vara otillförlitligare. $k_{I1}(\mu,\lambda,n)$ - värdena för $\mu = 1.05$ när n = 4 är helt odugliga. Värdena för n = 2 är bättre och för n > 4 verkar osäkerheten minska med ökande n.

Vad som i den följande diskussionen sägs om $k_{I1}(\mu,\lambda,n)$ och $k_{I2}(\mu,\lambda,n)$ som funktion av λ har med (4.8) en motsvarighet i μ.

I fig. 4.32-4.37 visas för olika antal armar, n = 2,4,6,8, 10 och 12, $k_{I1}(\mu,\lambda,n)$ och $k_{I2}(\mu,\lambda,n)$ som funktion av λ vid konstant μ. Som jämförelse för det cirkulära hålet har stjärnsprickans värden också medtagits. I dessa fig. synes avvikelsen utom för n = 2 vara försumbar gott och väl innan gränsen $\lambda_o = \mu_o = n/(n-2)$ ur (3.208) uppnåtts. Jfr. avsnitt 4.3 och fig. 4.18. Gränsen ges snarare av $\mu_o' \approx (\mu_o - 1)/2 = (n-2)^{-1}$.

Det faktum att det cirkulära hålet påverkar spänningstillståndet vid sprickspetsarna enbart när dessa ligger mycket nära hålranden medför att slutsatserna för stjärnsprickan med alternerande armlängder gäller oförändrat utom för n = 2 armar, den plana sprickan. Dvs. att:

a. När längdförhållandet μ/λ är stort eller litet blir spänningstillståndet vid de längre sprickornas spetsar opåverkat av de kortare.

b. Det omvända förhållandet gäller däremot inte utan samma slutningseffekt för de korta sprickorna som för stjärnsprickan uppträder när $n \geq 6$. Denna uppträder först när hålet är tillräckligt litet jämfört med sprickspetsavståndet, se fig. 4.34-4.37.

c. Det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor är geometriskt instabilt ur tillväxtsynpunkt. Denna tendens ökar med antalet sprickarmar.

I fig. 4.38-4.49 visas $k_{I1}(\mu,\lambda,n)$ och $k_{I2}(\mu,\lambda,n)$ som funktion av sprickspetsavståndet λ med avståndet μ som parameter. Som jämförelse har kurvorna för det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor, $k_{I1}(\mu,\lambda,n) = k_{I2}(\mu,\lambda,n) = k_I(\mu,n)$ ur fig. 4.17 när $\mu = \lambda$. Man ser att för $n \geq 4$ påverkar växande sprickor (λ -spetsarna) redan existerande (μ-spetsarna) så att spänningsintensitetsfaktorn för dessa $k_{I1}(\mu,\lambda,n)$ minskar med ökande λ .

Två armar utgör ett särfall liksom en arm för det cirkulära hålet i avsnitt 4.3. I fig. 4.32 och 4.38-4.39 finns kurvor som visar att i detta fall $k_{I1}(\mu,\lambda,n)$ ökar med ökande λ och att $k_{I2}(\mu,\lambda,n)$ som funktion av λ har ett maximum. En jämförelse mellan spänningsintensitetsfaktorerna för de olika spetsarna, $k_{I1}(\mu,\lambda,n)$ och $k_{I2}'(\mu,\lambda,n)$ i fig. 4.32, visar att även i detta fall är den längre sprickarmen mest benägen att växa. Denna fig. visar också att hålets närvaro inte är försumbar för sprickor med längdförhållandet $\mu = 2.0$ då $k_{I1}(\mu,\lambda,n)$ för alla λ -värden är mindre än värdet för den plana sprickan utan hål, först när $\lambda,\mu \geq 3$ är inverkan försumbar. Den plana sprickans utan hål värden ges av

$$\begin{cases} k_{I1}(\mu,\lambda,n) = \sqrt{(\mu+\lambda)/2\mu} \\ k_{I2}(\mu,\lambda,n) = \sqrt{(\mu+\lambda)/2\lambda} \end{cases}, \quad \mu,\lambda \gg 1 \tag{4.9}$$

För $\mu = 2.0$ visar tabell 4.9 att avvikelsen mellan $k_{I2}(\mu,\lambda,n)$ och uttrycket i (4.9) är mindre än 1% när $\lambda \geq 3$, se fig. 4.32.

Tabell 4.9: De dimensionslösa spänningsintensitetsfaktorerna $k_{11}(\mu, \lambda, n)$ och $k_{12}(\mu, \lambda, n)$ för det cirkulära hålet med radiella sprickor av alternerande längd under utbrett inre övertryck.
N = 30 när μ och $\lambda \leq 1.20$ annars 20.

$k_{11}(\mu, \lambda, n) = k_{12}(\lambda, \mu, n)$

n = 2

$\mu,(\lambda)$ / $\lambda,(\mu)$	1.00	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0
1.00	0.0000	0.4774	0.6236	0.7407	0.8278	0.8540	0.8687	0.8672	0.8346
1.05	-	0.3978	0.4580	0.7176	0.8155	0.8555	0.8706	0.8681	0.8348
1.10	-	0.4067	0.5532	0.7353	0.8308	0.8520	0.8681	0.8637	0.8304
1.20	-	0.4195	0.4603	0.7471	0.8293	0.8632	0.8788	0.8765	0.8404
1.35	-	0.4244	0.4707	0.7432	0.8488	0.8835	0.8929	0.8898	0.8507
1.50	-	0.4477	0.4511	0.7611	0.8576	0.9015	0.9122	0.9068	0.8628
1.75	-	0.4773	0.4705	0.7982	0.8925	0.9349	0.9448	0.9359	0.8842
2.00	-	0.5157	0.4822	0.8343	0.9288	0.9718	0.9766	0.9660	0.9063
3.00	-	0.6465	0.6379	0.9788	1.0728	1.1034	1.1028	1.0825	0.9926

n = 4

$\mu,(\lambda)$ / $\lambda,(\mu)$	1.00	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0
1.00	0.0000	0.3978	0.5532	0.7471	0.8488	0.9015	0.9448	0.9660	0.9926
1.05	-	0.4436	0.5295	0.6757	0.7820	0.8537	0.9339	0.9473	0.9899
1.10	-	0.3141	0.5968	0.7367	0.8423	0.8964	0.9422	0.9647	0.9914
1.20	-	0.2925	0.5714	0.7416	0.8420	0.8925	0.9365	0.9594	0.9900
1.35	-	0.2675	0.5635	0.7265	0.8249	0.8756	0.9216	0.9474	0.9856
1.50	-	0.2259	0.5527	0.7058	0.8022	0.8535	0.9025	0.9319	0.9798
1.75	-	0.1413	0.5299	0.6653	0.7577	0.8101	0.8645	0.9004	0.9671
2.00	-	0.1508	0.5029	0.6241	0.7117	0.7637	0.8228	0.8648	0.9511
3.00	-	0.2170	0.3658	0.4767	0.5488	0.5968	0.6615	0.7161	0.8630

(forts. tabell 4.9)

$k_{11}(\mu, \lambda, n) = k_{12}(\lambda, \mu, n)$

n = 6

$\lambda,(\mu)$ \ $\mu,(\lambda)$	1.00	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0
1.00	0.0000	0.4500	0.5870	0.7498	0.8503	0.8960	0.9273	0.9377	0.9422
1.05	-	0.4414	0.5968	0.7465	0.8455	0.8910	0.9231	0.9354	0.9411
1.10	-	0.4476	0.5918	0.7355	0.8382	0.8868	0.9222	0.9355	0.9424
1.20	-	0.4255	0.5597	0.7035	0.8080	0.8637	0.9098	0.9293	0.9423
1.35	-	0.3720	0.4996	0.6313	0.7416	0.8109	0.8791	0.9130	0.9416
1.50	-	0.3080	0.4272	0.5480	0.6617	0.7437	0.8357	0.8877	0.9398
1.75	-	0.2026	0.3079	0.4109	0.5224	0.6169	0.7413	0.8249	0.9324
2.00	-	0.1187	0.2122	0.2936	0.3949	0.4909	0.6322	0.7410	0.9163
3.00	-	0.0553	0.0105	0.0247	0.0765	0.1399	0.2554	0.3743	0.7424

n = 8

$\lambda,(\mu)$ \ $\mu,(\lambda)$	1.00	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0
1.00	0.0000	0.4436	0.5968	0.7416	0.8249	0.8535	0.8645	0.8648	0.8630
1.05	-	0.4485	0.5836	0.7301	0.8196	0.8511	0.8642	0.8626	0.8633°
1.10	-	0.4180	0.5749	0.7154	0.8071	0.8443	0.8625	0.8650	0.8644°
1.20	-	0.3730	0.5119	0.6511	0.7623	0.8192	0.8556	0.8639	0.8640°
1.35	-	0.2845	0.3888	0.5207	0.6594	0.7529	0.8317	0.8577	0.8641°
1.50	-	0.1945	0.2696	0.3841	0.5339	0.6569	0.7856	0.8405	0.8646°
1.75	-	0.0734	0.1138	0.1935	0.3282	0.4662	0.6573	0.7741	0.8652
2.00	-	0.0243	0.0146	0.0631	0.1667	0.2889	0.4939	0.6584	0.8600
3.00	-	°	°	°	°	°	0.0306	0.1515	0.6590

° $k_{11}(\mu, \lambda, n) < 0$

(forts. tabell 4.9)

$k_{11}(\mu, \lambda, n) = k_{12}(\lambda, \mu, n)$

n = 10

$\mu,(\lambda)$ / $\lambda,(\mu)$	1.00	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0
1.00	0.0000	0.4580	0.5968	0.7253	0.7858	0.7979	0.7979	0.7964	0.7967
1.05	-	0.4472	0.5852	0.7142	0.7810	0.7968	0.7984°	0.7745°	°
1.10	-	0.4203	0.5537	0.6881	0.7689	0.7931	0.7983°	0.7973°	°
1.20	-	0.3344	0.4536	0.5980	0.7210	0.7752	0.7976	0.7982°	0.7949°
1.35	-	0.1944	0.2812	0.4198	0.5957	0.7109	0.7859	0.7986	0.7968°
1.50	-	0.0857	0.1374	0.2487	0.4337	0.5956	0.7470	0.7917	0.7997°
1.75	-	°	°	0.0499	0.1876	0.3520	0.5974	0.7349	0.7984°
2.00	-	°	°	°	0.0289	0.1479	0.3872	0.5978	0.7996
3.00	-	°	°	°	°	°	°	0.0202	0.5979

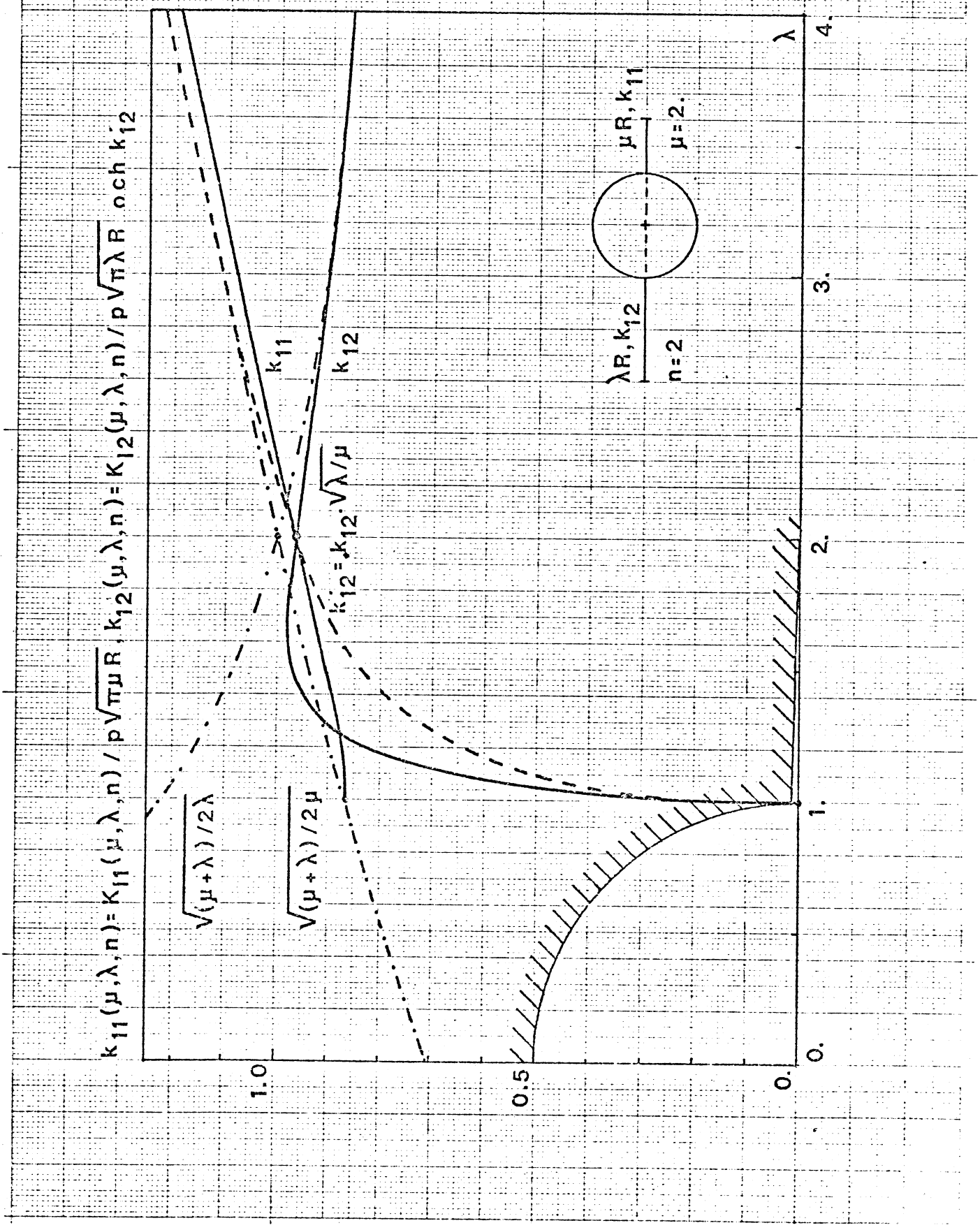
n = 12

$\mu,(\lambda)$ / $\lambda,(\mu)$	1.00	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0
1.00	0.0000	0.4414	0.5918	0.7035	0.7416	0.7437	0.7413	0.7410	0.7424
1.05	-	0.4419	0.5736	0.6919	0.7388	0.7438	0.7079°	°	°
1.10	-	0.3997	0.5296	0.6602	0.7297	0.7430	0.7425°	0.7411°	°
1.20	-	0.2857	0.3948	0.5511	0.6870	0.7341	0.7438°	0.7420°	°
1.35	-	0.1168	0.1865	0.3349	0.5481	0.6788	0.7411	0.7438°	°
1.50	-	0.0084	0.0417	0.1459	0.3549	0.5497	0.7129	0.7435	0.7412°
1.75	-	°	°	°	0.0887	0.2617	0.5509	0.7014	0.7431°
2.00	-	°	°	°	°	0.0528	0.3017	0.5510	0.7436°
3.00	-	°	°	°	°	°	°	°	0.5510

Spänningsintensitetsfaktorerna för ett cirkulärt hål med radiella sprickor av alternerande längd under ett utbrett inre övertryck. n=2 och μ=2.

fig 4.32 109.

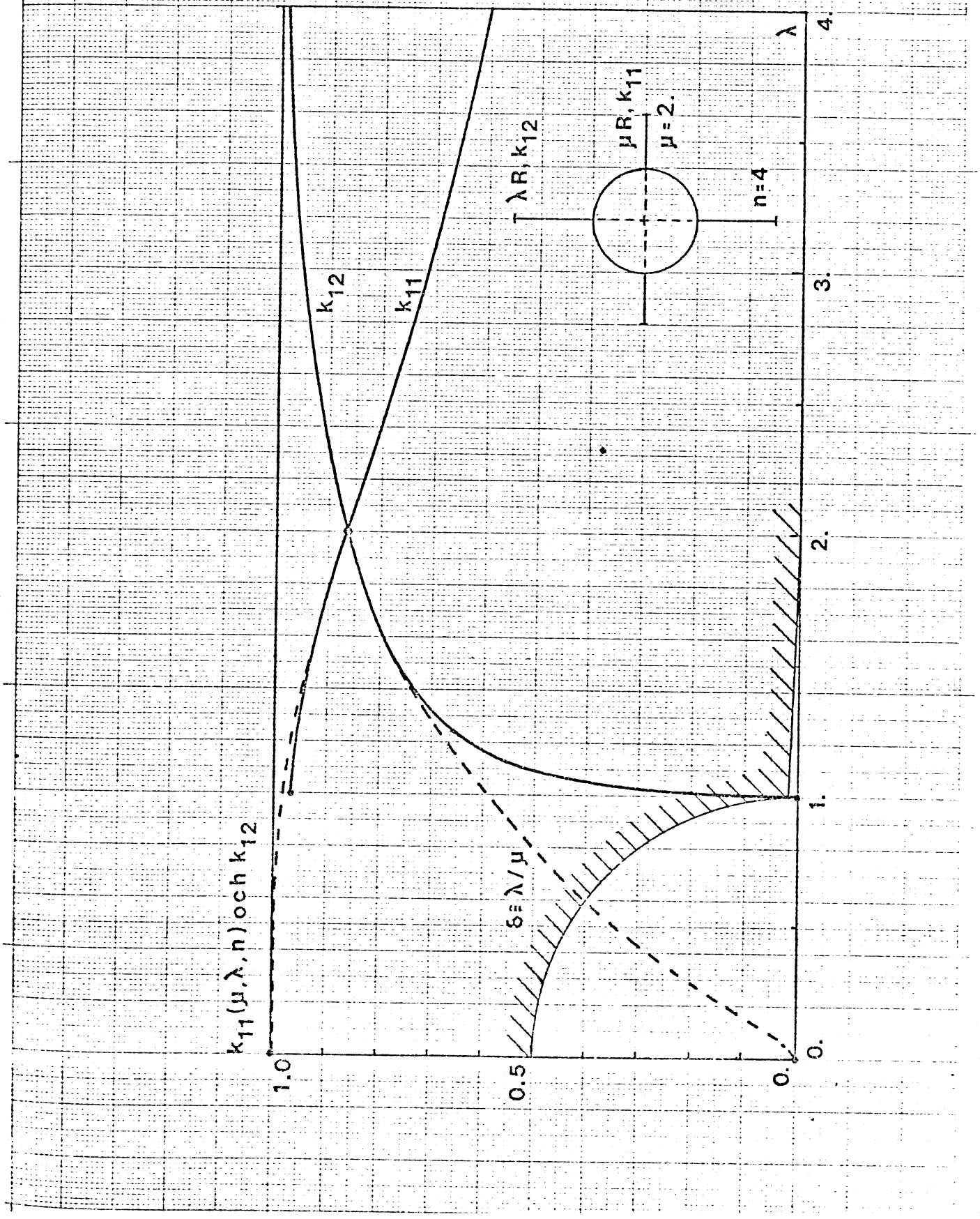
FOU



Som fig 4.32 fast n=4 och μ=2.

fig 4.33 110.

Fou



Som fig 4.32.

fig 4.34+35

Fou III.

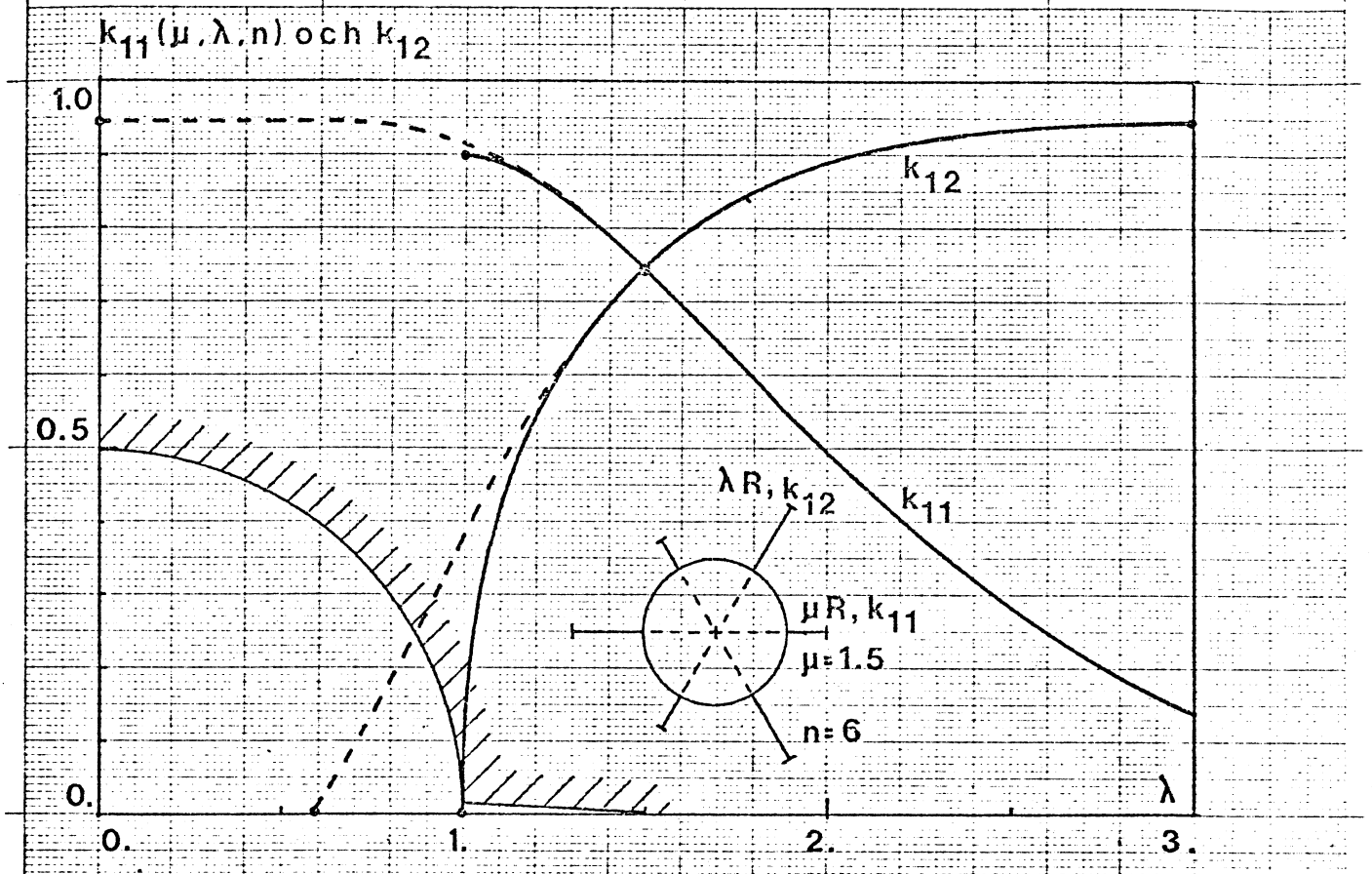


Fig 4.34 n=6 och μ=1.5.

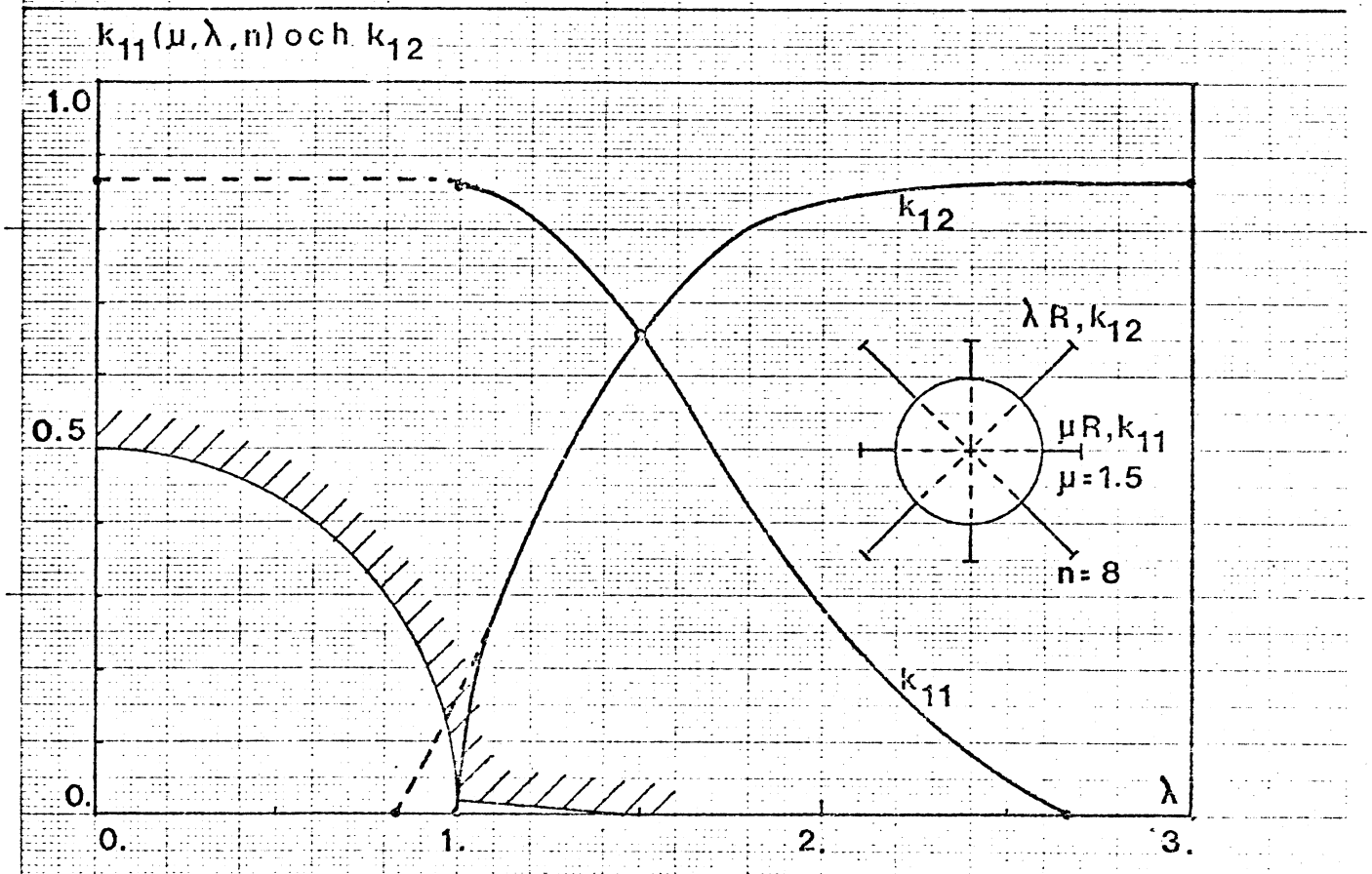


Fig 4.35 n=8 och μ=1.5.

Som fig 4.32.

fig 4.36+37

FOu

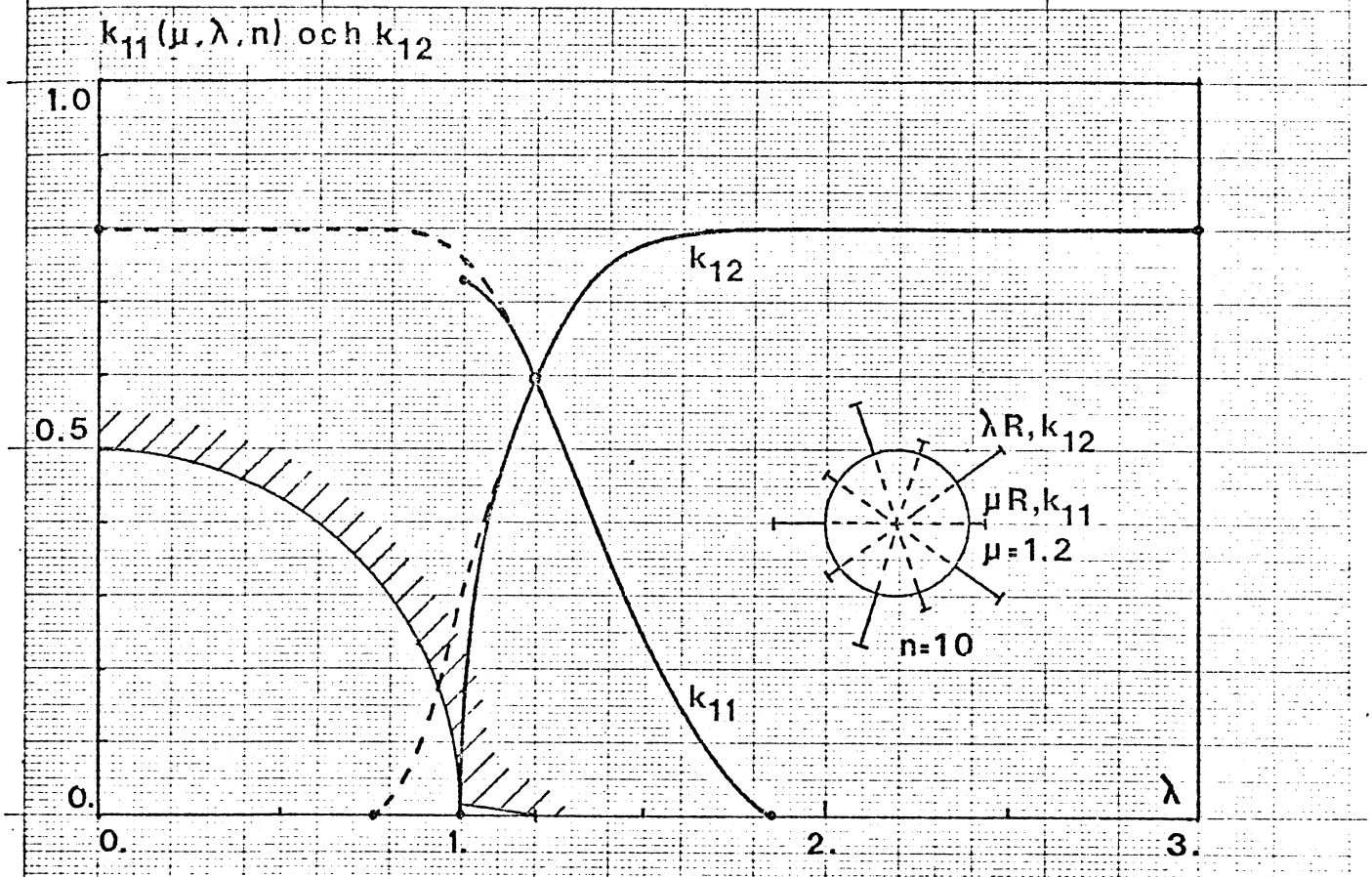


Fig 4.36 n=10 och μ=1.2.

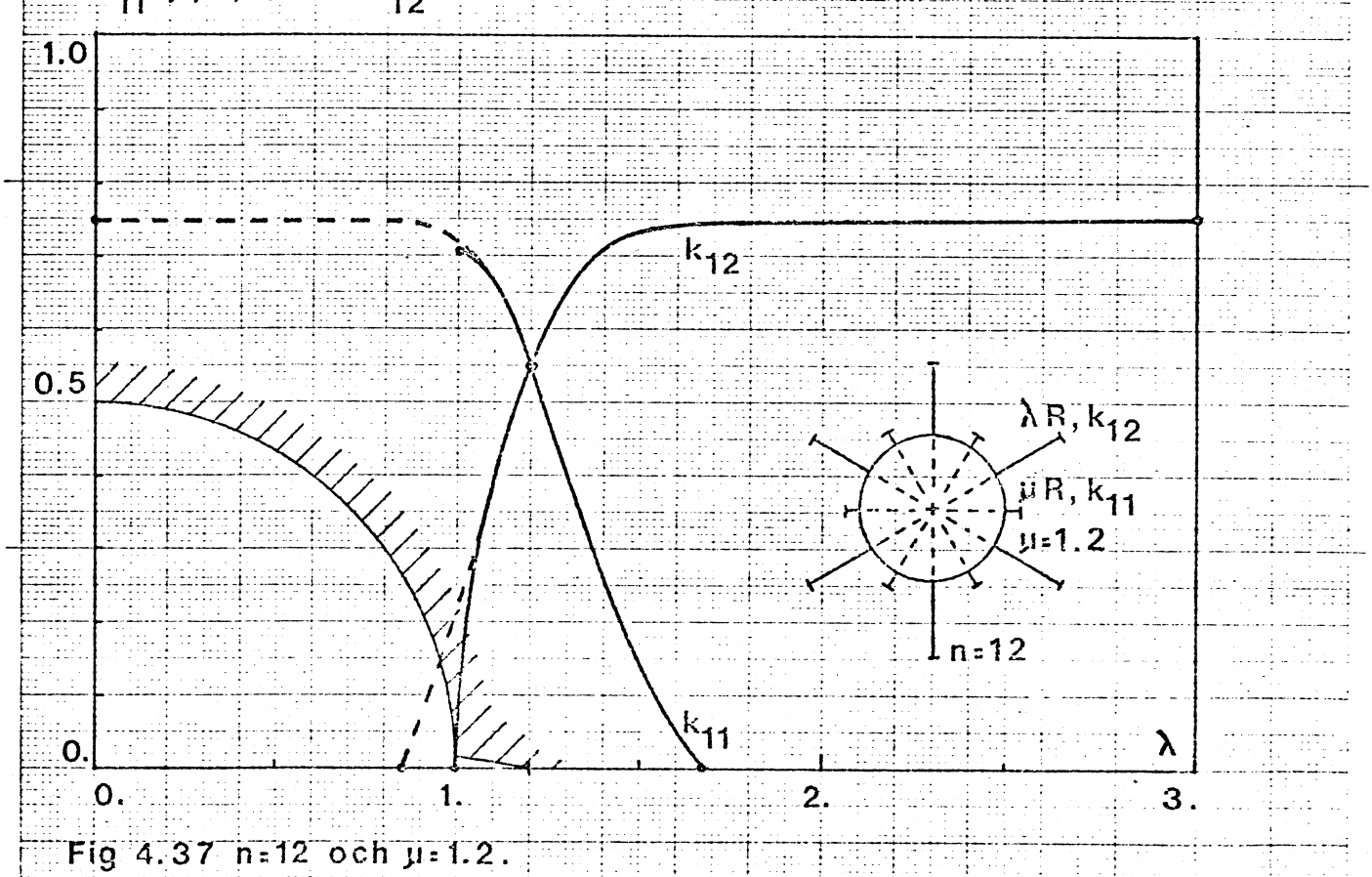


Fig 4.37 n=12 och μ=1.2.

Som fig 4.32 fast värden för ena spetsen. fig 4.38+39
n=2.

FOA 113.

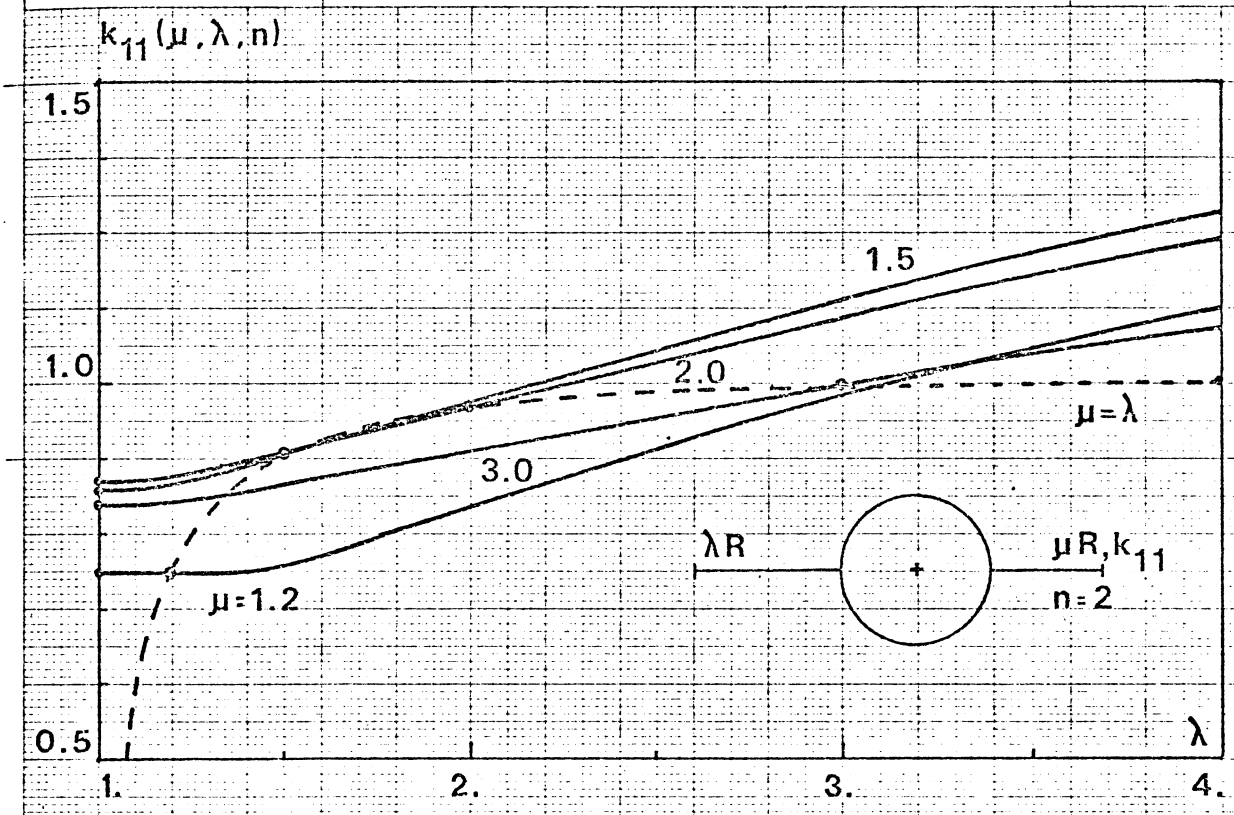


Fig 4.38 Värden för μ-spetsen.

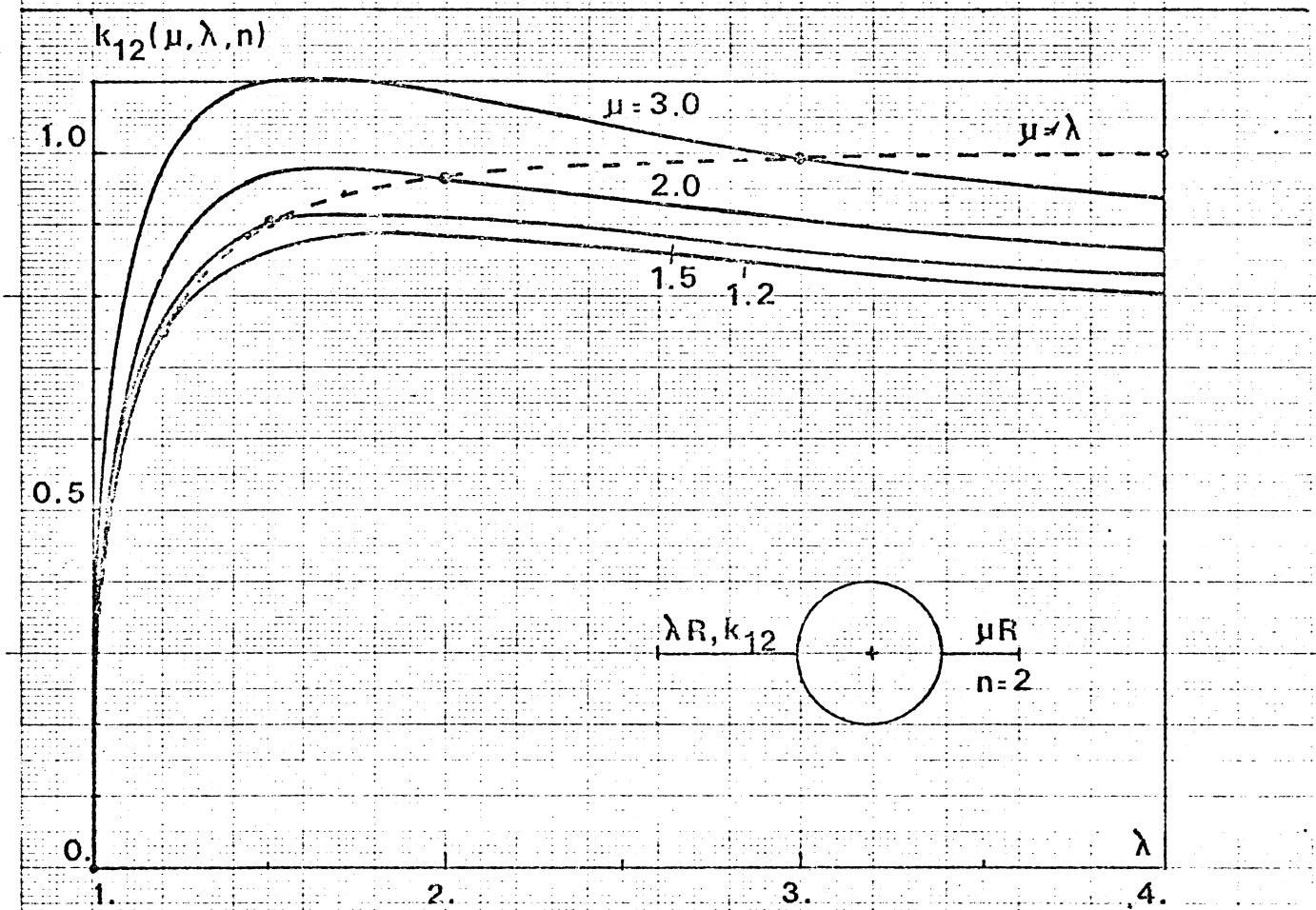


Fig 4.39 Värden för λ-spetsen.

Som fig 4.38÷39 för n=4.

fig 4.40+41

FOu

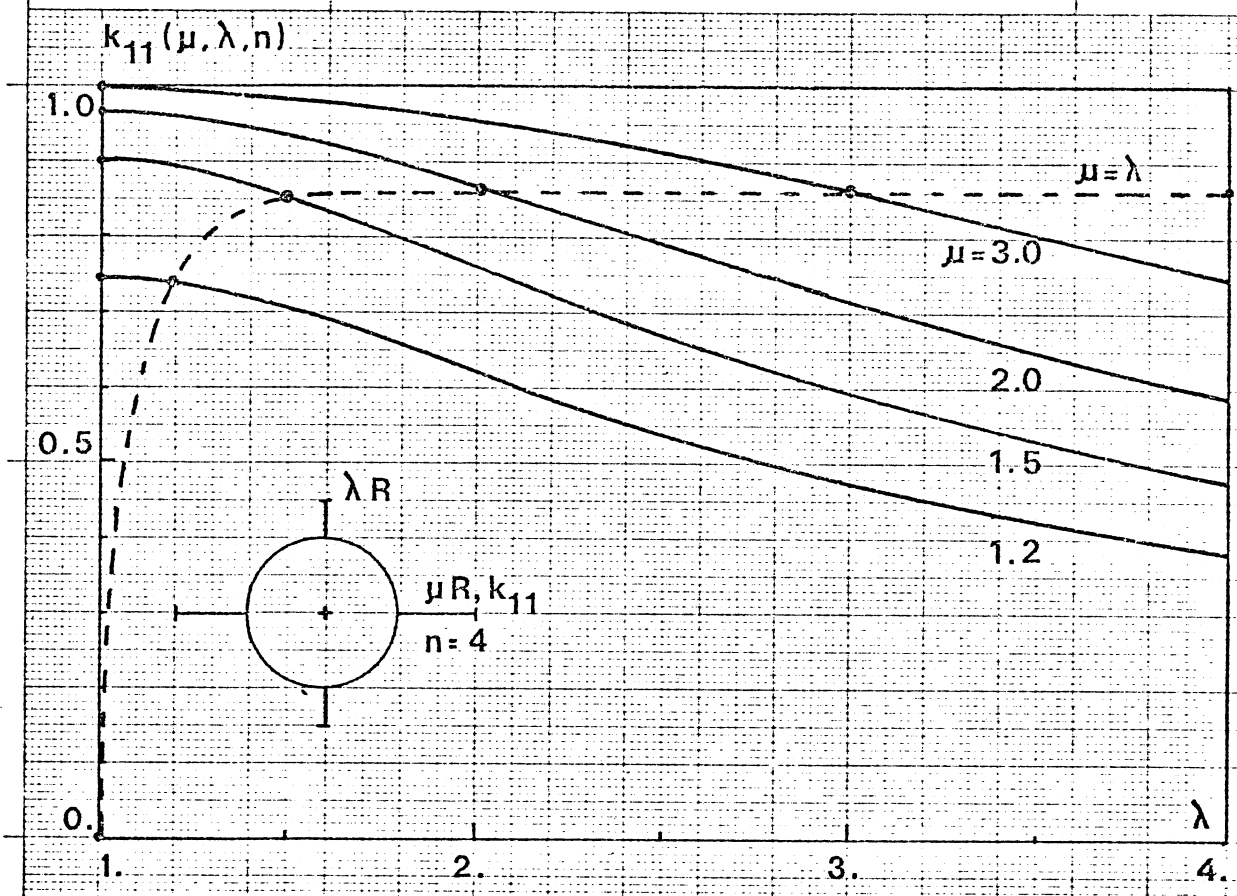


Fig 4.40

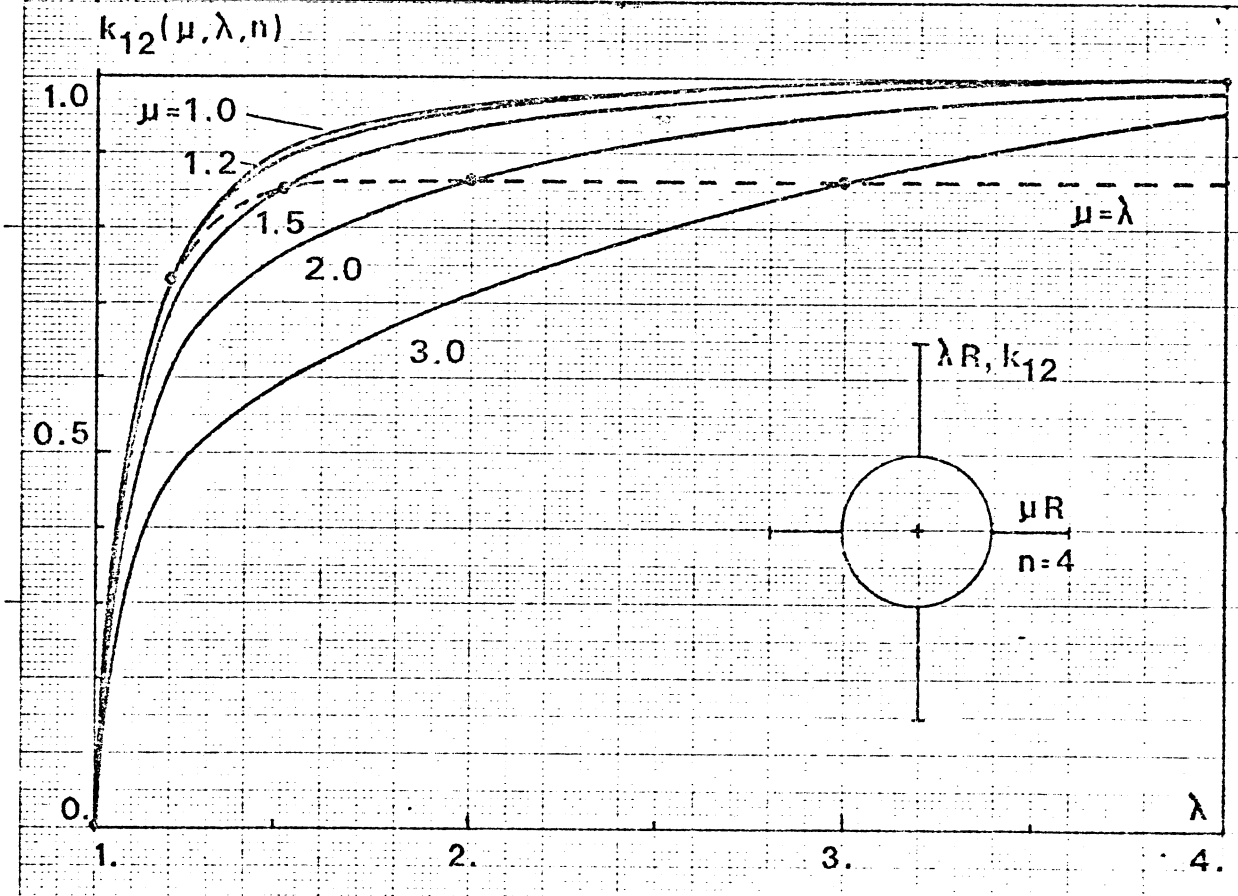


Fig 4.41

Som fig 4.38 +39 för n = 6.

fig 4.42+43

FOu 115.

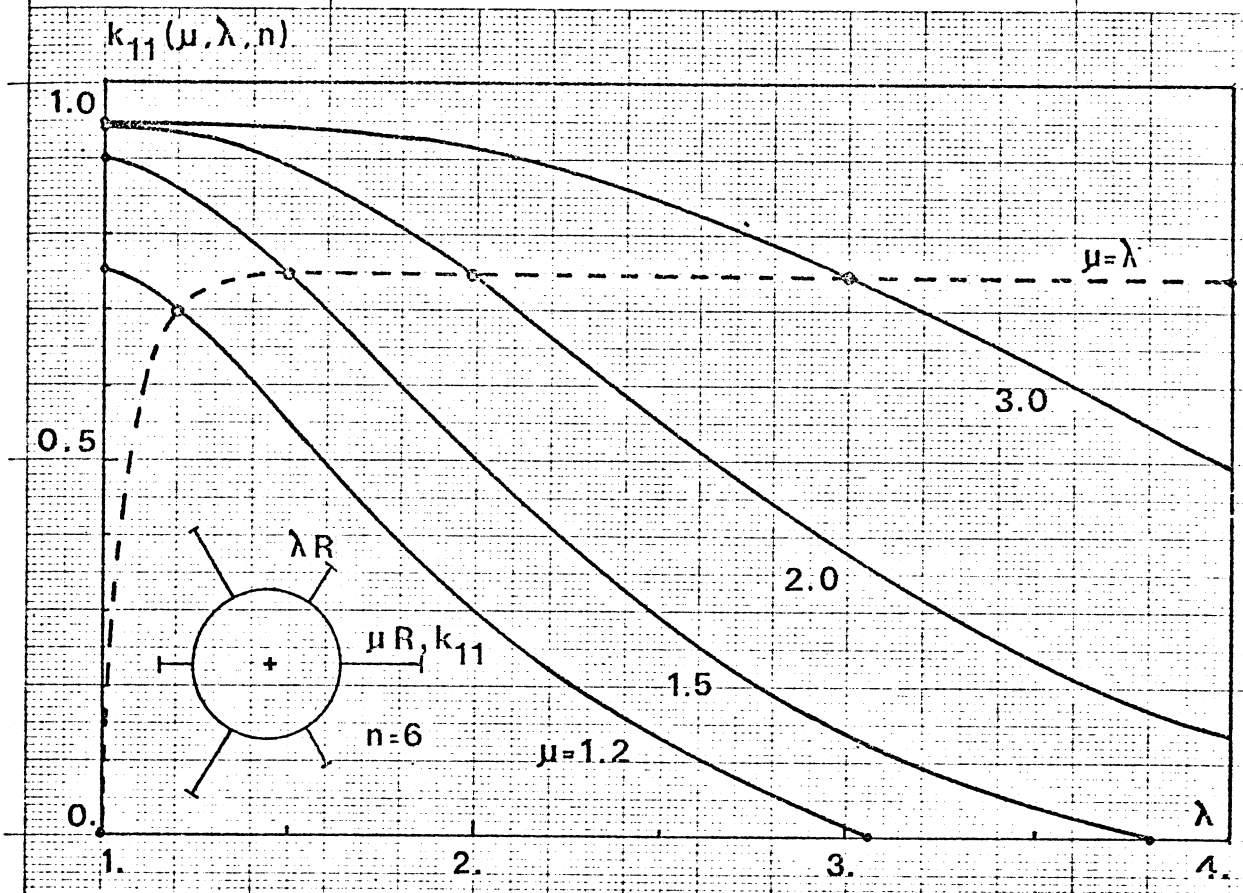


Fig 4.42

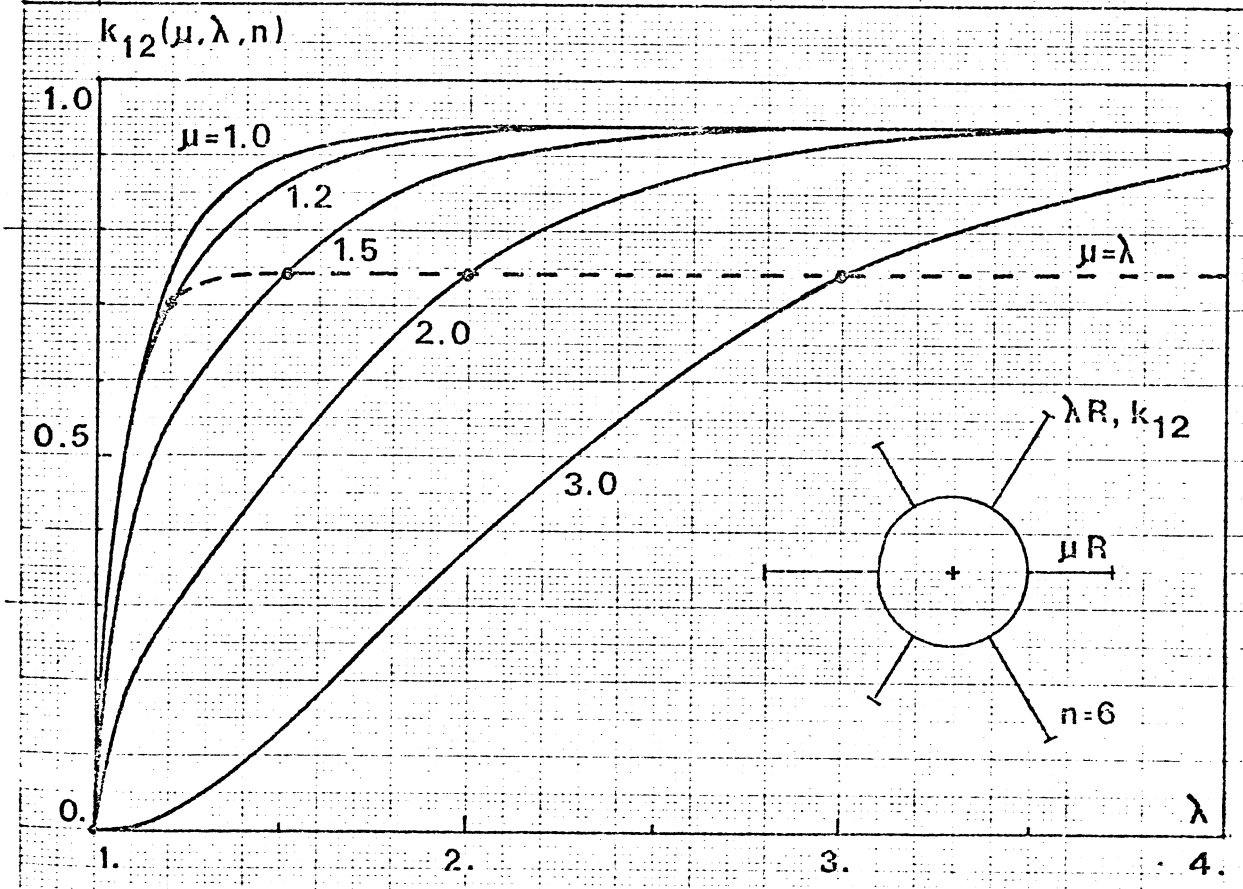


Fig 4.43

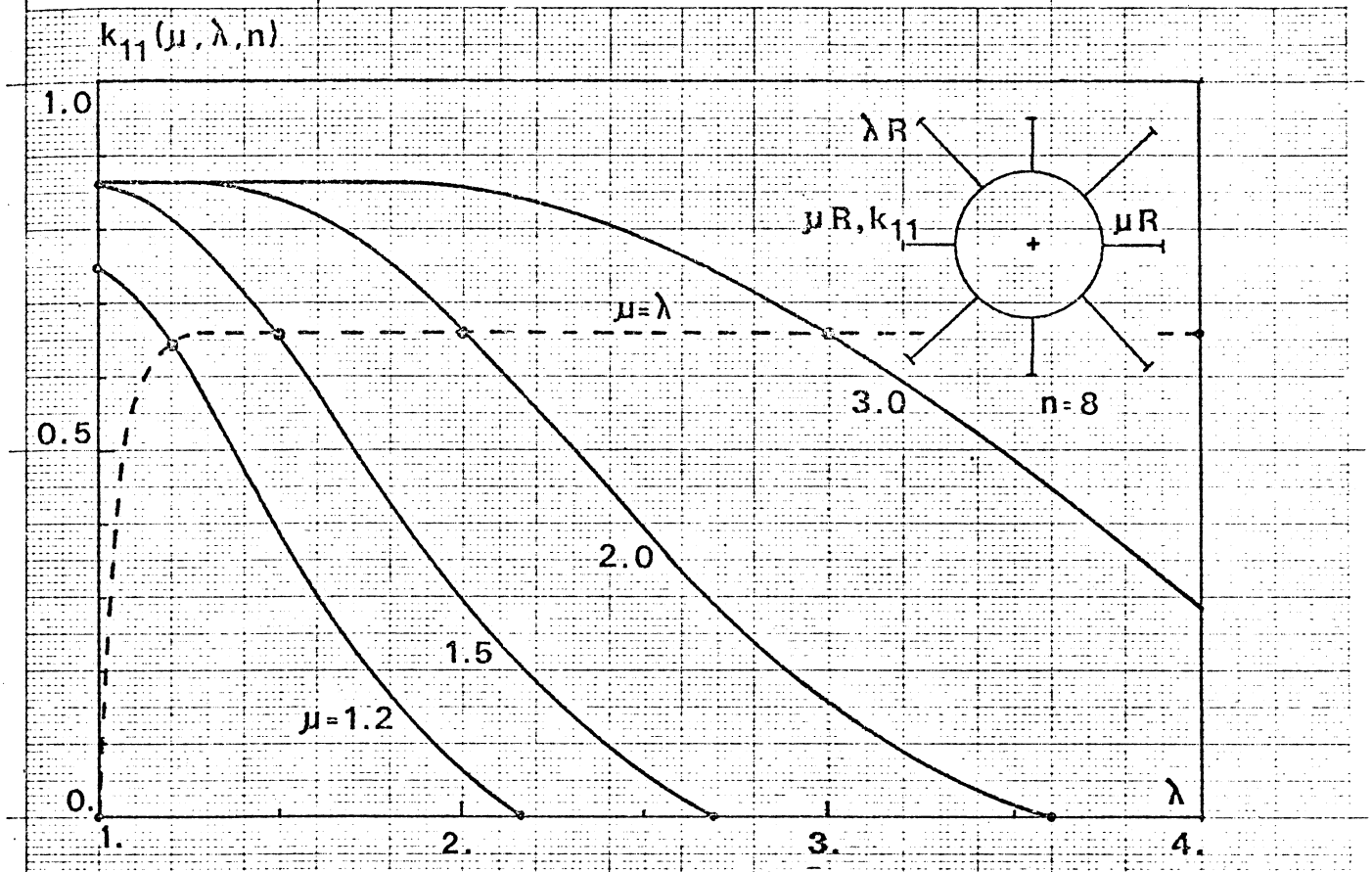


Fig 4.44

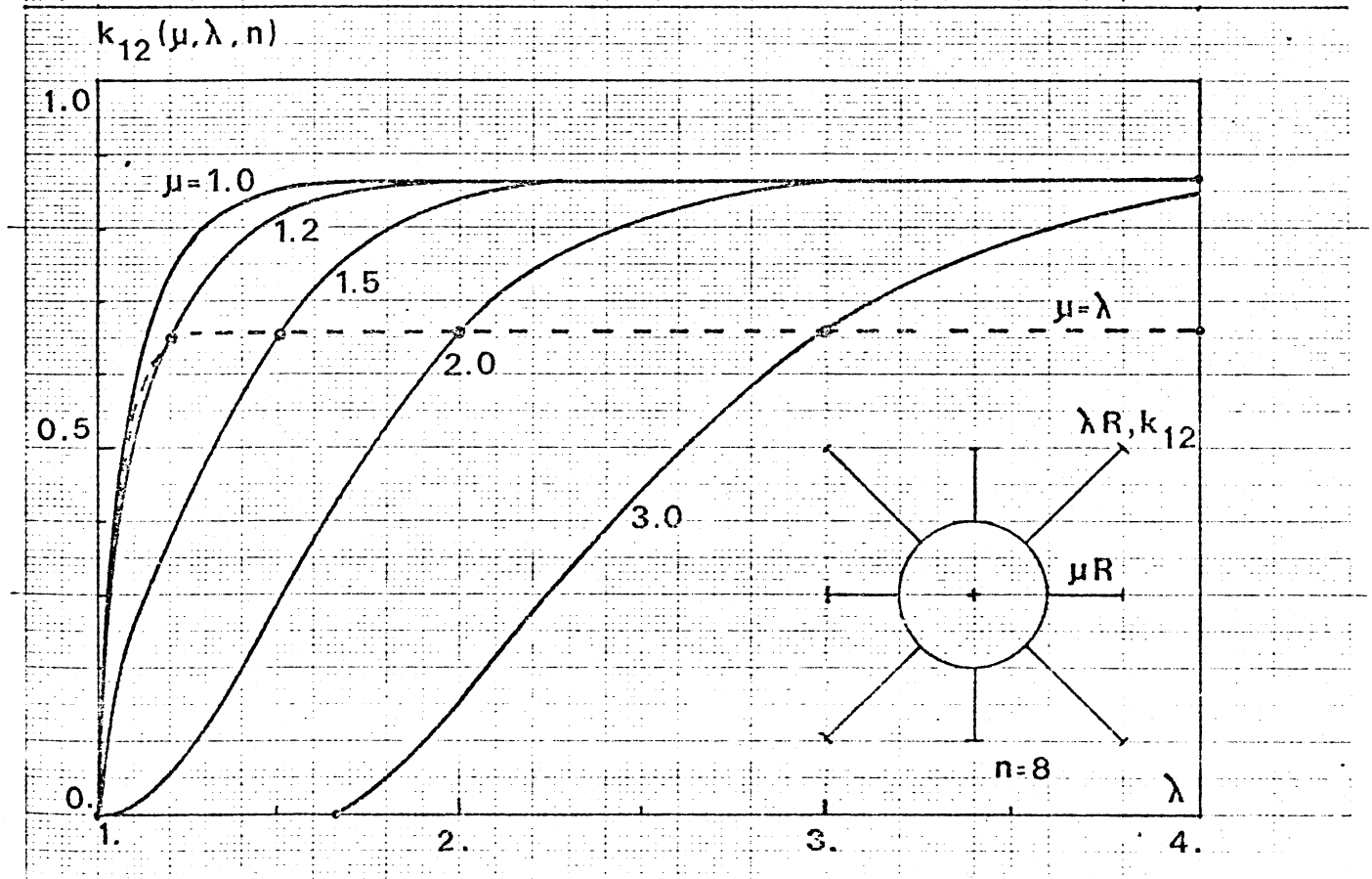


Fig 4.45

Som fig 4.38+39 för n=10.

fig 4.46+47

Fou 117.

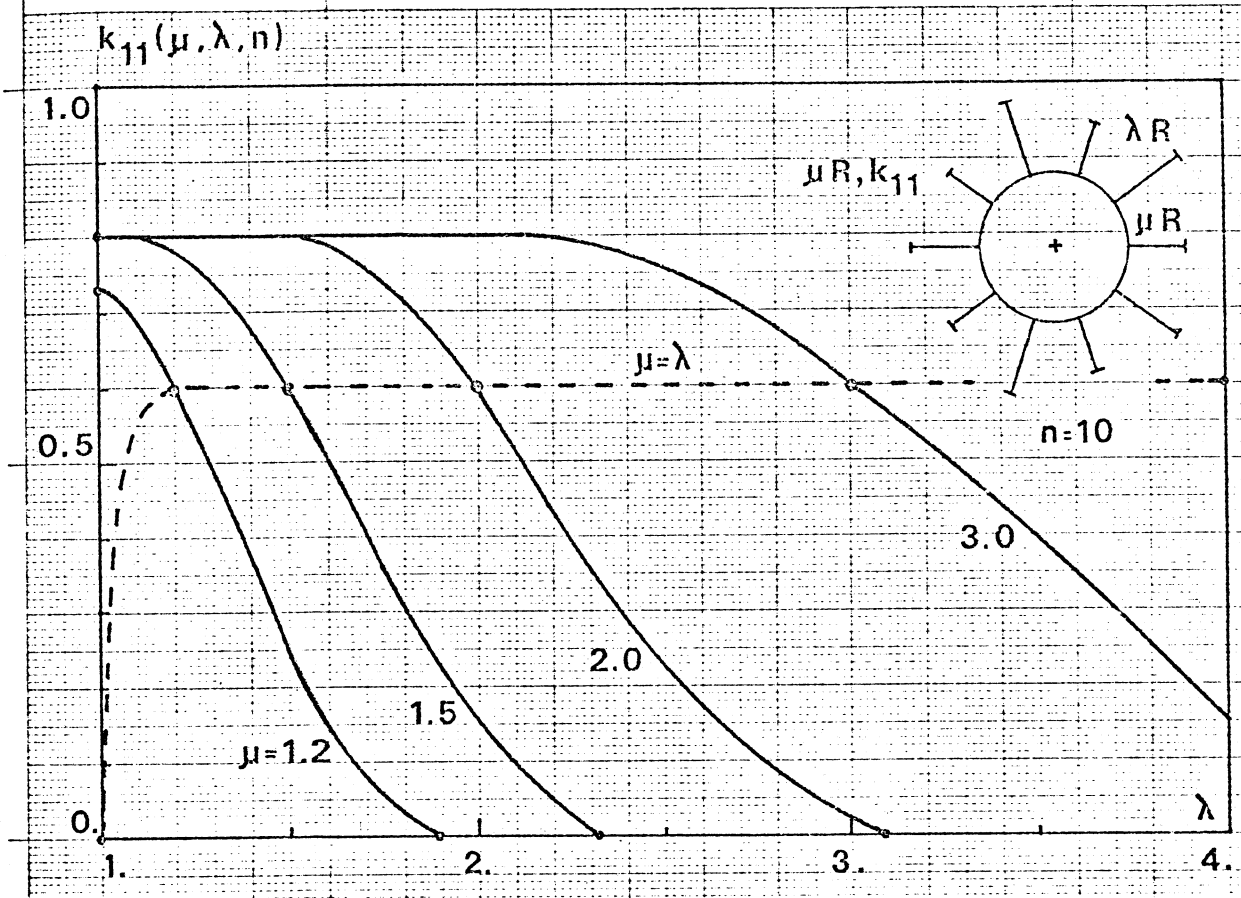


Fig 4.46

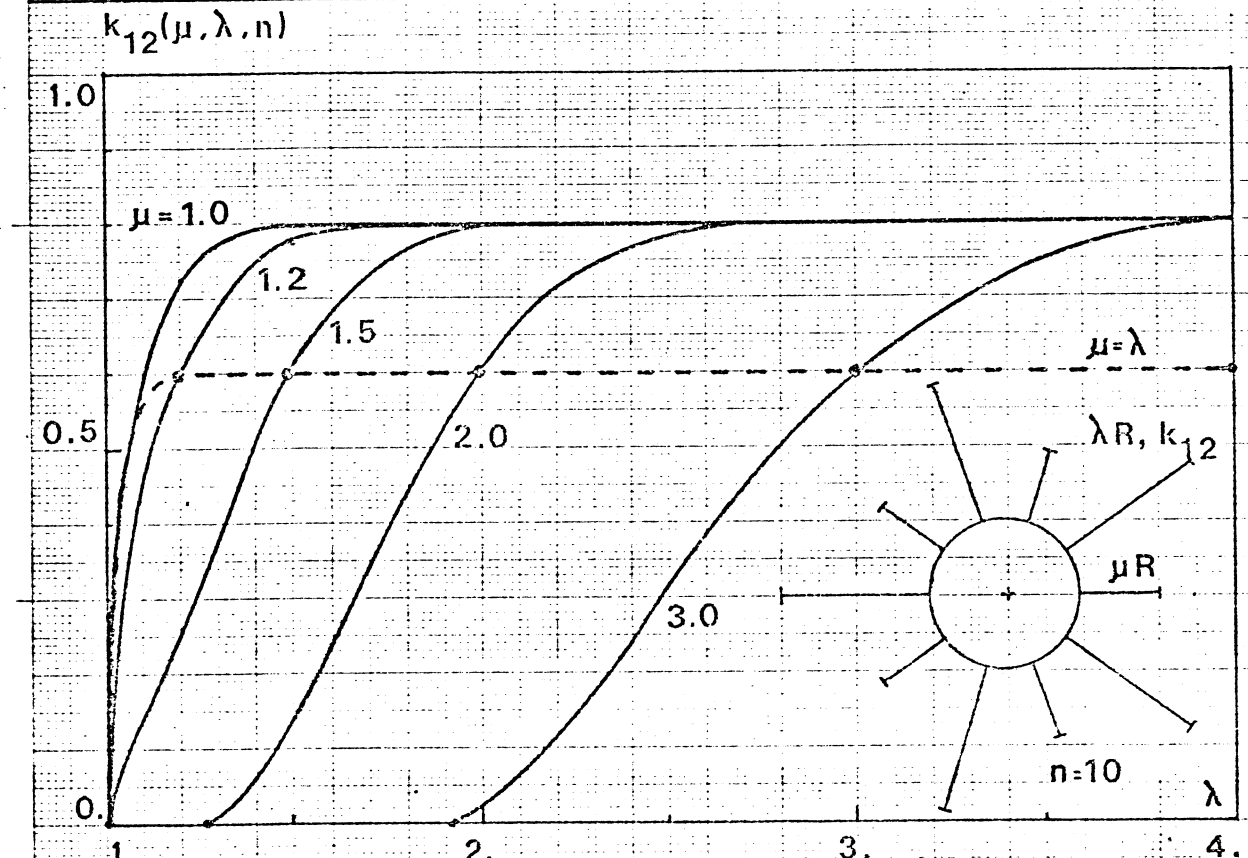


Fig 4.47

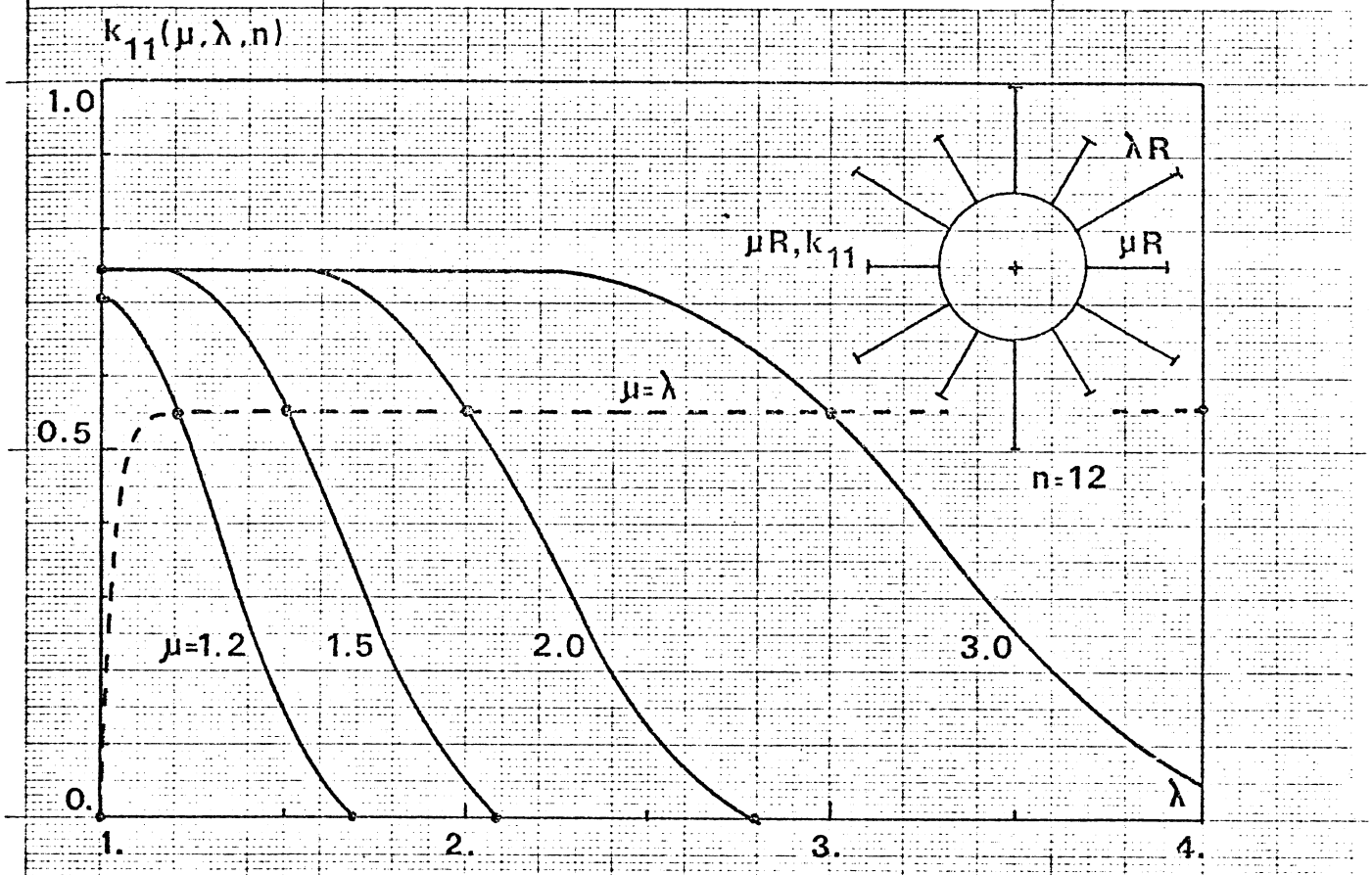


Fig 4.48

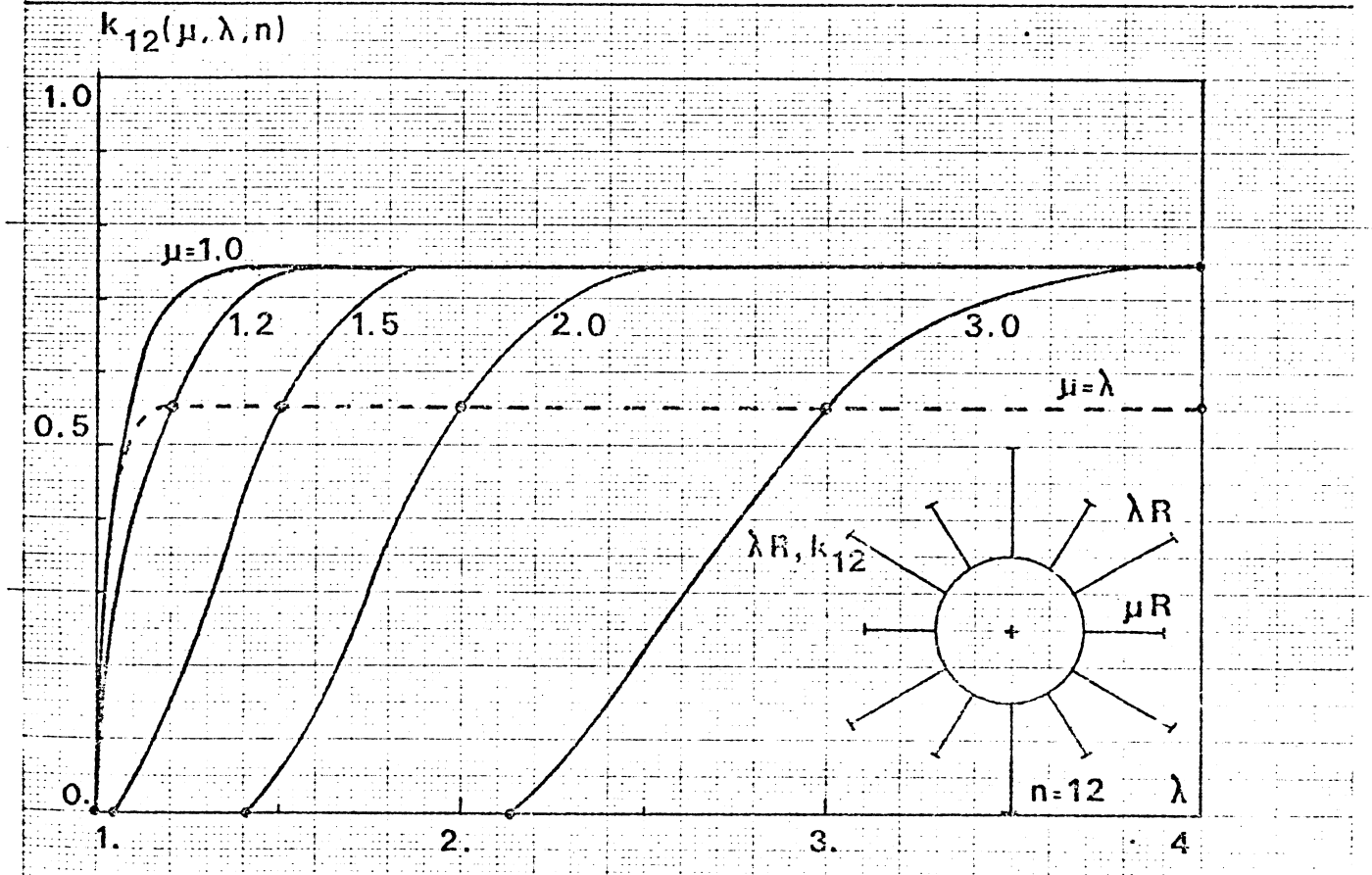


Fig 4.49

4.7. Stjärnsprickan med armar av alternerande längd och centralt angripande krafter.

Det är enbart spänningsintensitetsfaktorerna som bestämts här, K_{I1} för spetsarna med längden a och K_{I2} för spetsarna med längden δ a. Uttrycken för dem ges av (3.233) och (3.234), dimensionslöst med den likarmade plana sprickan som referensgeometri. De betecknas k_{11} och k_{12}

$$\begin{cases} k_{11}(\delta,n) = K_{I1}(\delta,n)/K_{Io1},\ K_{Io1} = 2pR/\sqrt{\pi a} \\ k_{12}(\delta,n) = K_{12}(\delta,n)/K_{Io2},\ K_{Io2} = 2pR/\sqrt{\pi\delta a} \end{cases} \qquad (4.10)$$

Spänningsintensitetsfaktorn $k_{12}(\delta,n)$ relaterad till samma sprickspets, $k_{12}'(\delta,n) = k_{12}(\delta,n)/\sqrt{\delta}$, kan användas för en direkt jämförelse med $k_{11}(\delta,n)$.

I tabell 4.10 finns värdena på $k_{11}(\delta,n)$ och $k_{12}(\delta,n)$ som funktion av förhållandet mellan sprickläng derna δ och antal armar n för $\delta \geq 1$. Värdena för $\delta \leq 1$ ges liksom i avsnitt 4.5 av symmetriskäl av (4.5), $k_{11}(\delta,n) = k_{12}(1/\delta,n)$ och $k_{12}(\delta,n) = k_{11}(1/\delta,n)$. Kurvor över $k_{11}(\delta,n)$. $k_{12}(\delta,n)$ och $k_{12}'(\delta,n)$ som funktion av längdförhållandet δ för n = 2,4,6,8,10 och 12 finns i fig. 4.50-4.57.

Felet i värdena torde för $\delta \approx 1$ vara några enheter i 3:e siffran för att för stora värden på δ uppgå till någon enhet i 2:a siffran för $k_{11}(\delta,n)$ resp. några enheter i 4:e siffran för $k_{12}(\delta,n)$.

När sprickorna är lika långa, $\delta = 1$, är spänningsintensitetsfaktorernas värden alla lika och det ges av stjärnsprickan med lika långa armar, $k_1(n)$ ur tabell 4.6. Därmed gäller att $k_{11}(1,n) = k_{12}(1,n) = k_{12}'(1,n) = k_1(n)$. Vidare inses att när längdförhållandet δ antingen är stort eller litet så är spänningstillståndet vid de längre sprickornas spetsar opåverkat av de korta sprickorna, dvs $\lim_{\delta\to\infty} k_{12}(\delta,n) = \lim_{\delta\to 0} k_{11}(\delta,n) = k_1(n/2)$.

I fig. 4.50 finns kurvor över $k_{11}(\delta,n)$, $k_{12}(\delta,n)$ och $k_{12}'(\delta,n)$ för den plana sprickan med osymmetriskt angripande centrala krafter. Denna spricka är stabil ur tillväxtsynpunkt då spänningsintensitetsfaktorn för den kortare spetsen alltid är störst, dvs $k_{11}(\delta,n) > k_{12}'(\delta,n)$ när $\delta > 1$ och $k_{11}(\delta,n) < k_{12}'(\delta,n)$ när $\delta < 1$. Uttrycken kommer från Sih, Paris och Erdogan /14/ t.ex. Formlerna i kap 3 ger samma uttryck då metoden är exakt för den plana sprickan. Om antalet sprickarmar ökas till n = 4, se fig. 4.51, uppvisar kurvorna en tendens till instabilitet då inom

området $0.27 < \delta < 3.7$ gäller motsatt förhållande, nämligen att spänningsintensitetsfaktorn för de längre spetsarna är störst. Vid värdena $\delta = 0.27$ och 3.7 är armarna i balans och för $\delta < 0.27$ resp. $\delta > 3.7$ är sprickan åter stabil. Vid långsam pålastning skulle man alltså kunna stabilt driva en spricka med längdförhållandet 3.7 mellan armparen. Noggrannheten i de numeriska värden för $k_{12}(\delta, n)$ blir sämre när δ är liten. I fig. 4.51 finns värden för δ = 1/30, 1/40, 1/50 och 1/100 inritade som fyllda cirklar, de finns inte med i tabell 4.10. Extrapoleras kurvan $k_{12}(\delta, 4)$ till $\delta = 0$ erhålles värdet $k_{12}(0,4) = 0.47$. Detta bör jämföras med de värden som Emery, Walker och Williams /22/ samt Bueckner /23/ ger för ett plant halvplan med en kantspricka vinkelrätt mot kanten (fria ytan) vilken öppnas av ett kraftpar i tvärled, $k_{12}(0,4) = 1.29$ resp. 1.32. Kraftkomposanter som verkar i sprickans längdriktning borde inte ge något bidrag till k_{12} för halvplanet då den yta i ett halvplan utan spricka som svarar mot sprickytan är helt spänningsfri. Men då värdena i alla fall är olika för halvplanet och stjärnsprickan när $\delta << 1$ måste man dra den slutsatsen att geometrierna inte är jämförbara i St. Venants mening för en mycket kort spricka.

Tendensen till instabilitet ur tillväxtsynpunkt ökar med ökande antal armar, se fig 4.51-4.55, och för $n \geq 8$ uppträder samma sprickslutnings-effekt som när belastningen utgörs av ett utbrett inre övertryck. Se avsnitt 4.5. Värdet $k_{12}(0,6)$ är troligen skilt från noll, se fig. 4.52.

Instabiliteten är lättare att förstå för utbrett inre övertryck när $K_I \propto \sqrt{a}$ än för centralt angripande krafter. I det senare fallet är $K_I \propto 1/\sqrt{a}$ och ytligt sett en kort spricka alltid farligare än en lång. Förklaringen till instabiliteten finns i det faktum att de central angripande krafterna är resultanter till ett gastryck över en hålrand. Detta medför ju att den totala energi som kan frigöras vid sprickttillväxt är begränsad och att spänningsintensitetsfaktorn $k_1(1,n) = k_1(n)$ avtar med ökande antal armar. Se fig 4.22 och avsn. 4.4.

Tabell 4.10: De dimensionslösa spänningsintensitetsfaktorerna $k_{11}(\delta, n)$ och $k_{12}(\delta, n)$ för stjärnsprickan med armar av alternerande längd och centralt angripande krafter.

$k_{11}(\delta, n) = k_{12}(1/\delta, n)$

n \ δ	1.00[2]	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0	5.0	10.0	20.0
4	0.7772	0.7635	0.7503	0.7261	0.6927	0.6642	0.6256	0.5950	0.5310[1]	0.4862[1]	0.4753[1]	0.5096[1]
6	0.6382	0.6000	0.5712	0.5086	0.4271	0.3578	0.2761	0.2348[1]	0.1433[1]	0.1548[1]	○	
8	0.5523	0.5008	0.4497	0.3600	0.2439	0.1799[1]	0.0954[1]	0.0547[1]	○			
10	0.4935	0.4323	0.3620	0.2626[1]	0.1342[1]	0.0645[1]	0.0006[1]	○				
12	0.4484[1]	0.3741[1]	0.3067[1]	0.1843[1]	0.0525[1]	○						

○ $k_{11}(\delta, n) < 0$ 1 N = 30, annars N = 20 2 värden ur tabell 4.6

$k_{12}(\delta, n) = k_{11}(1/\delta, n)$

n \ δ	1.00[2]	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0	5.0	10.0	20.0
4	0.7772	0.7903	0.8026	0.8252	0.8529	0.8753	0.9035	0.9233	0.9642[1]	0.9864[1]	0.9966[1]	0.9982[1]
6	0.6382	0.6650	0.6906	0.7373	0.7872	0.8209	0.8518	0.8690[1]	0.8875[1]	0.8947[1]	○	
8	0.5523	0.5894	0.6299	0.6854	0.7346	0.7580[1]	0.7733[1]	0.7777[1]	○			
10	0.4935	0.5383	0.5876	0.6446[1]	0.6830[1]	0.6942[1]	0.6978[1]	○				
12	0.4484[1]	0.5118[1]	0.5550[1]	0.6077[1]	0.6333[1]	0.6367○						

0, 1, 2 som ovan

Spänningsintensitetsfaktorerna för en stjärnspricka med armar av alternerande längd och centralt angripande krafter.

fig 4.50+51

FÖu 122.

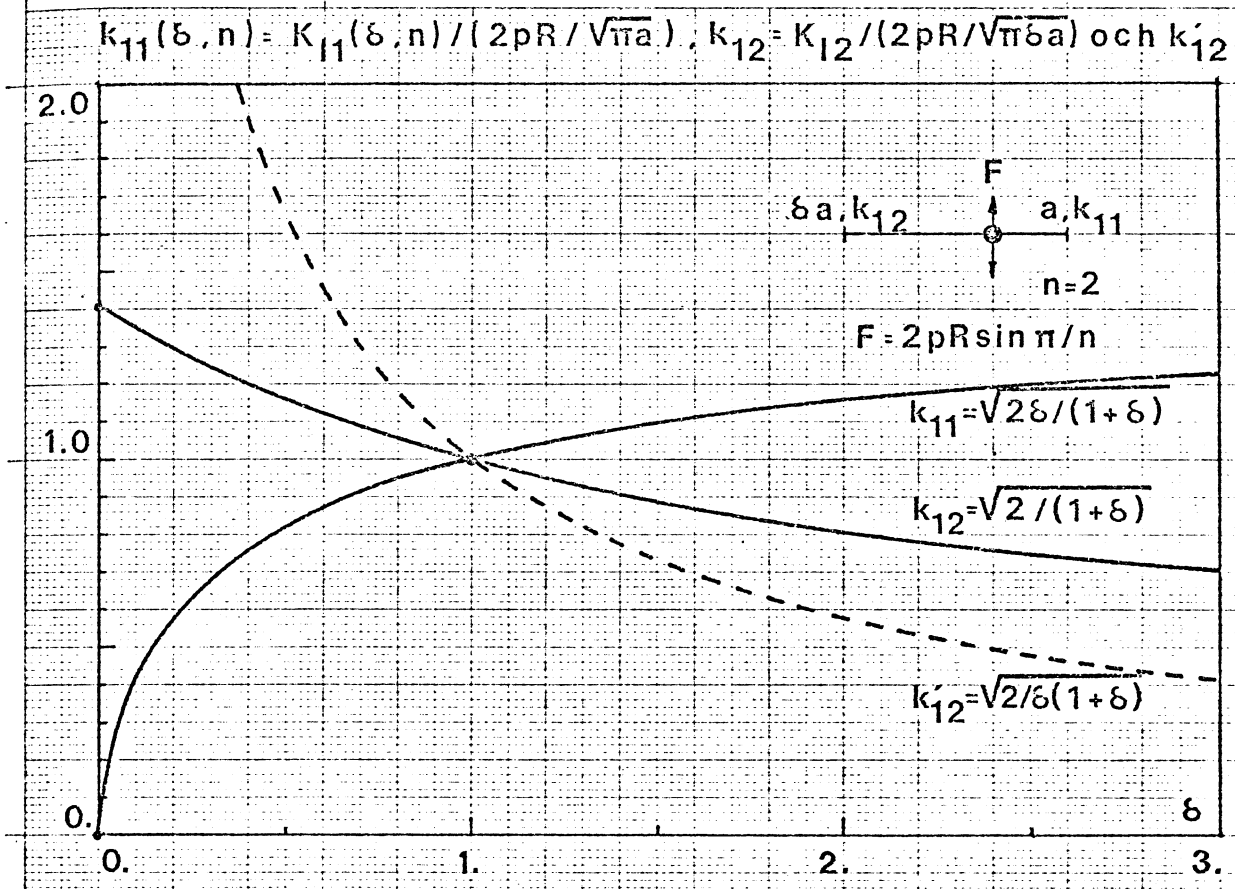


Fig 4.50 Den plana sprickan, n=2.

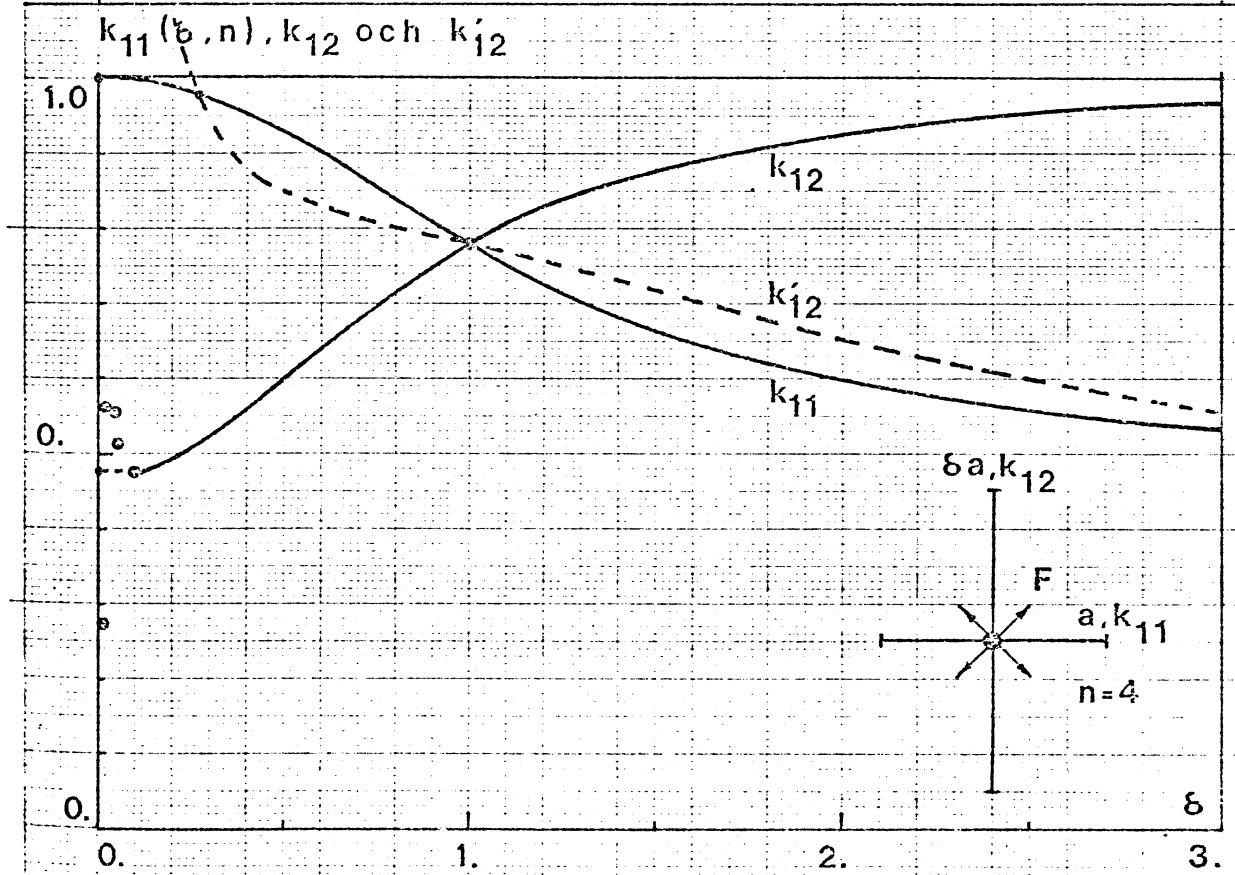


Fig 4.51 n=4 armar.

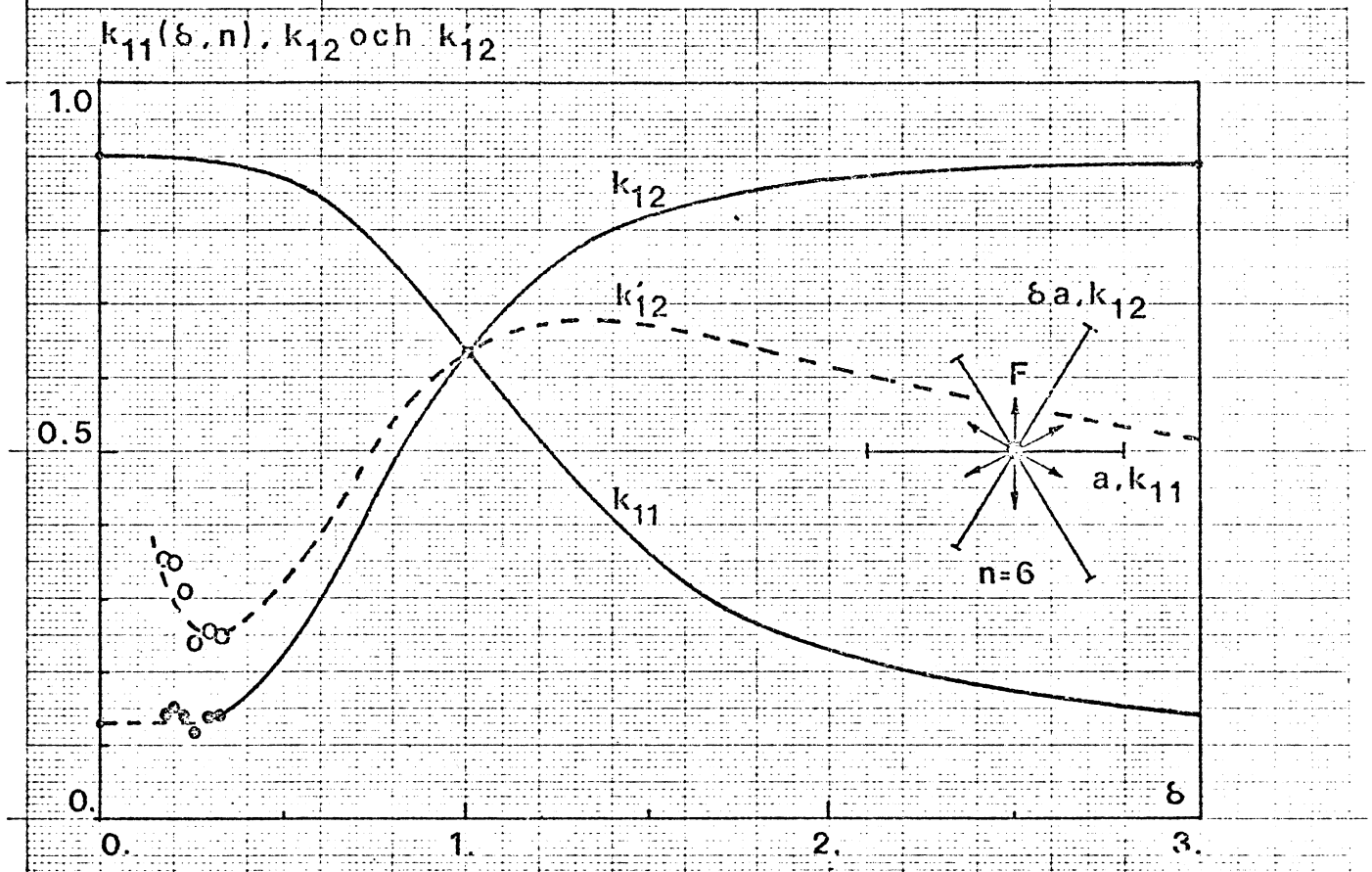


Fig 4.52 n=6 armar.

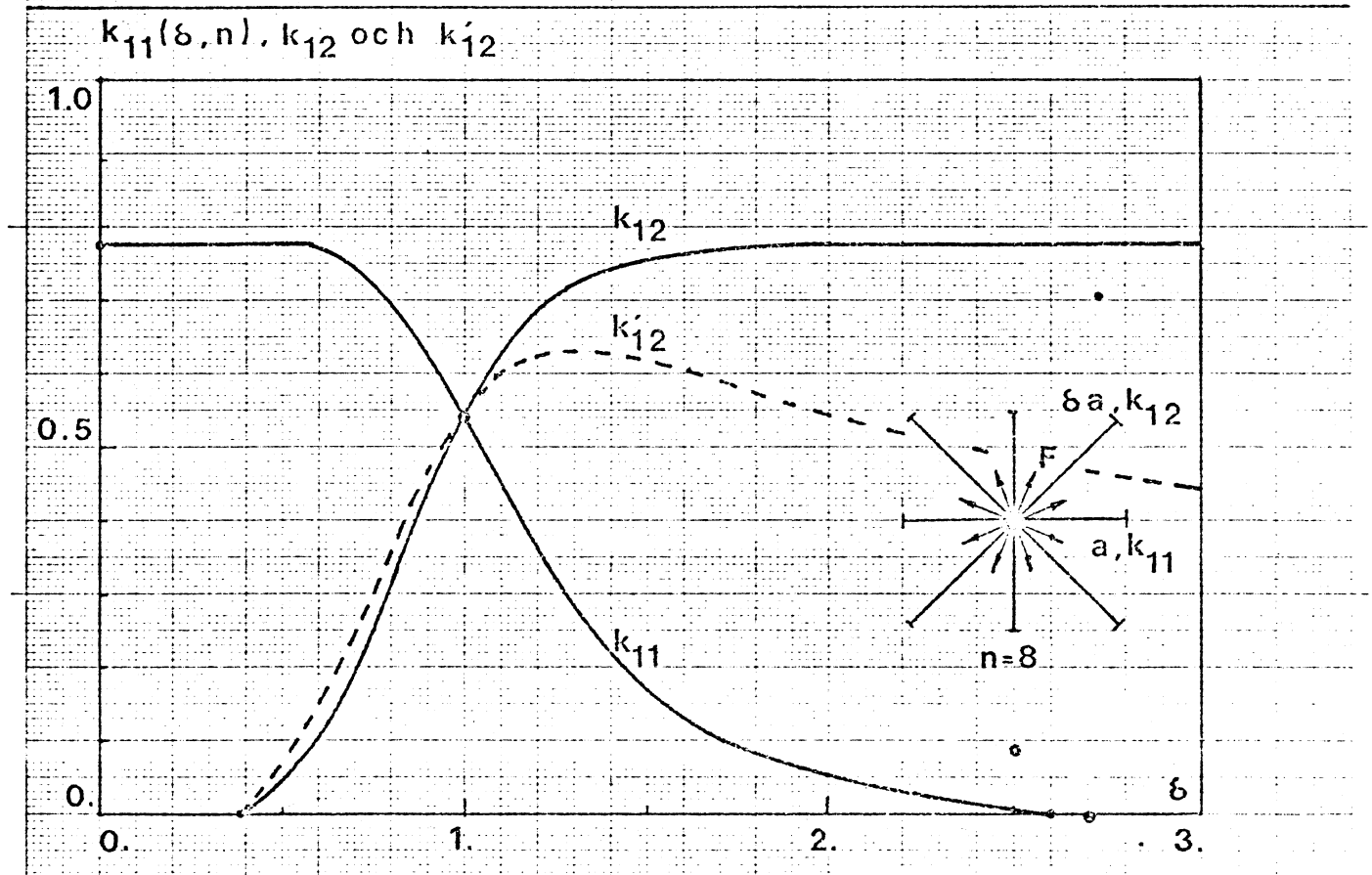


Fig 4.53 n=8 armar.

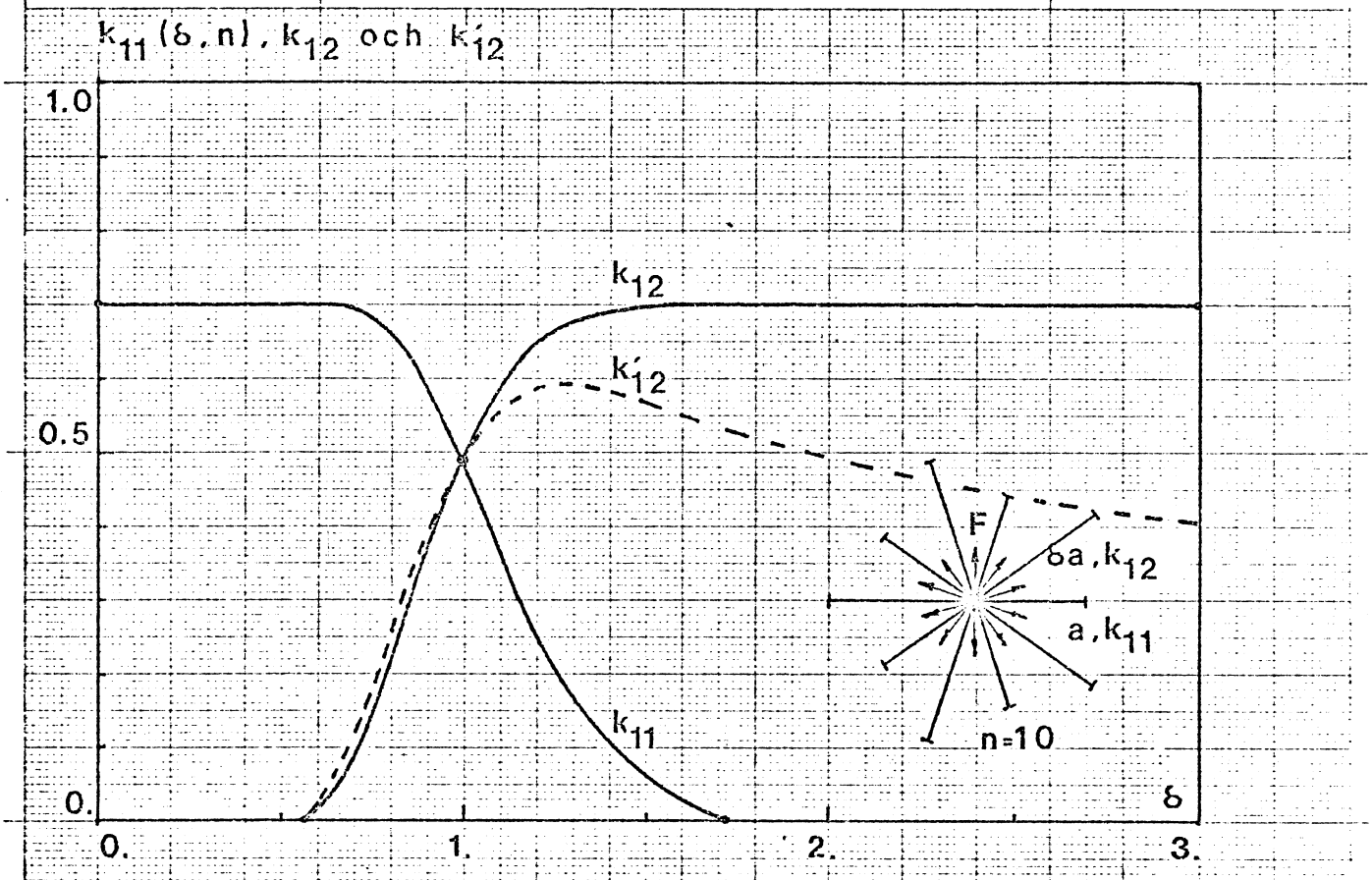


Fig 4.54 n=10 armar.

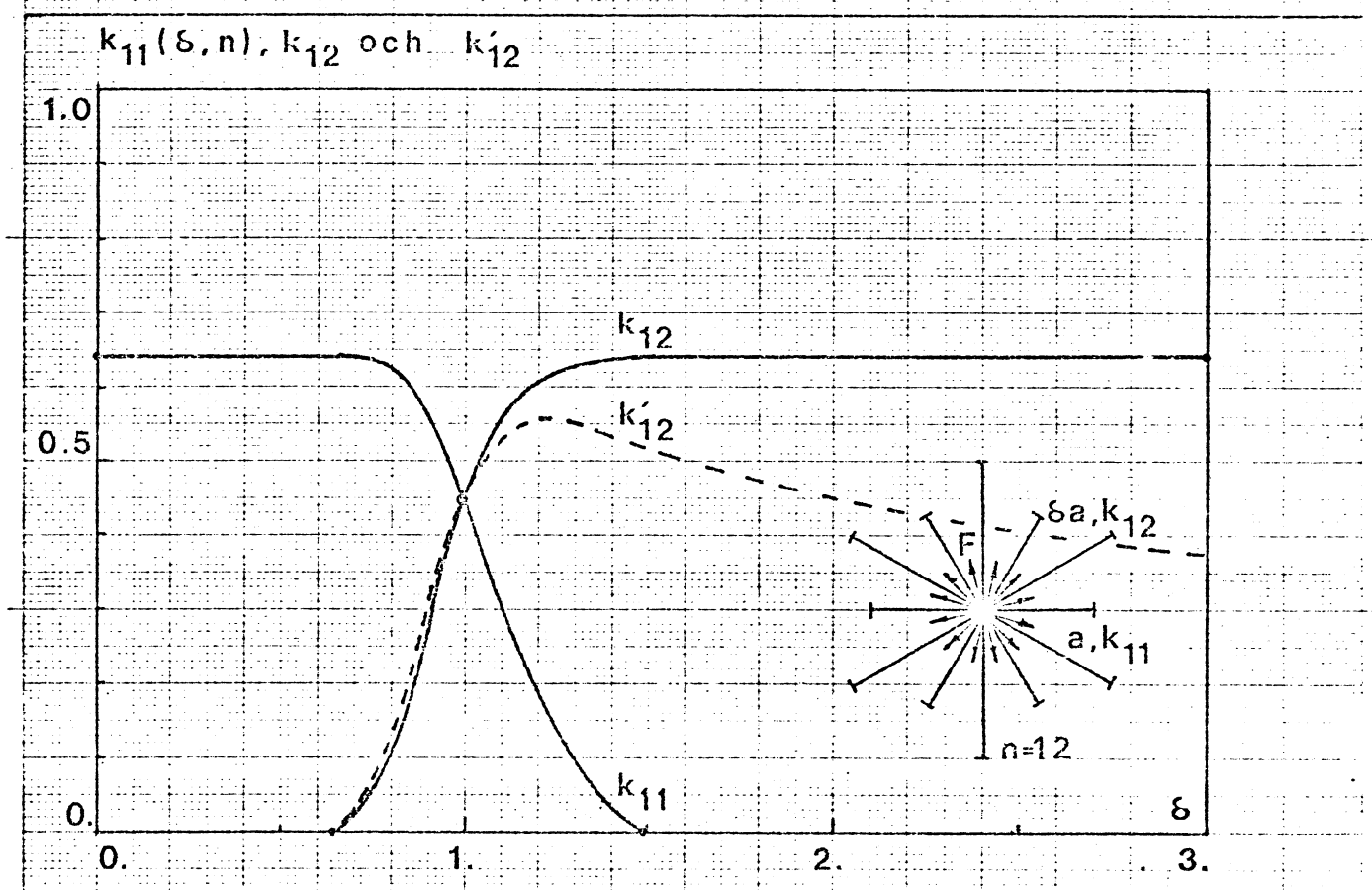


Fig 4.55 n=12 armar.

Som fig 4.50 fast värden för ena spetsen för sig.

fig 4.56÷57

Fou 125.

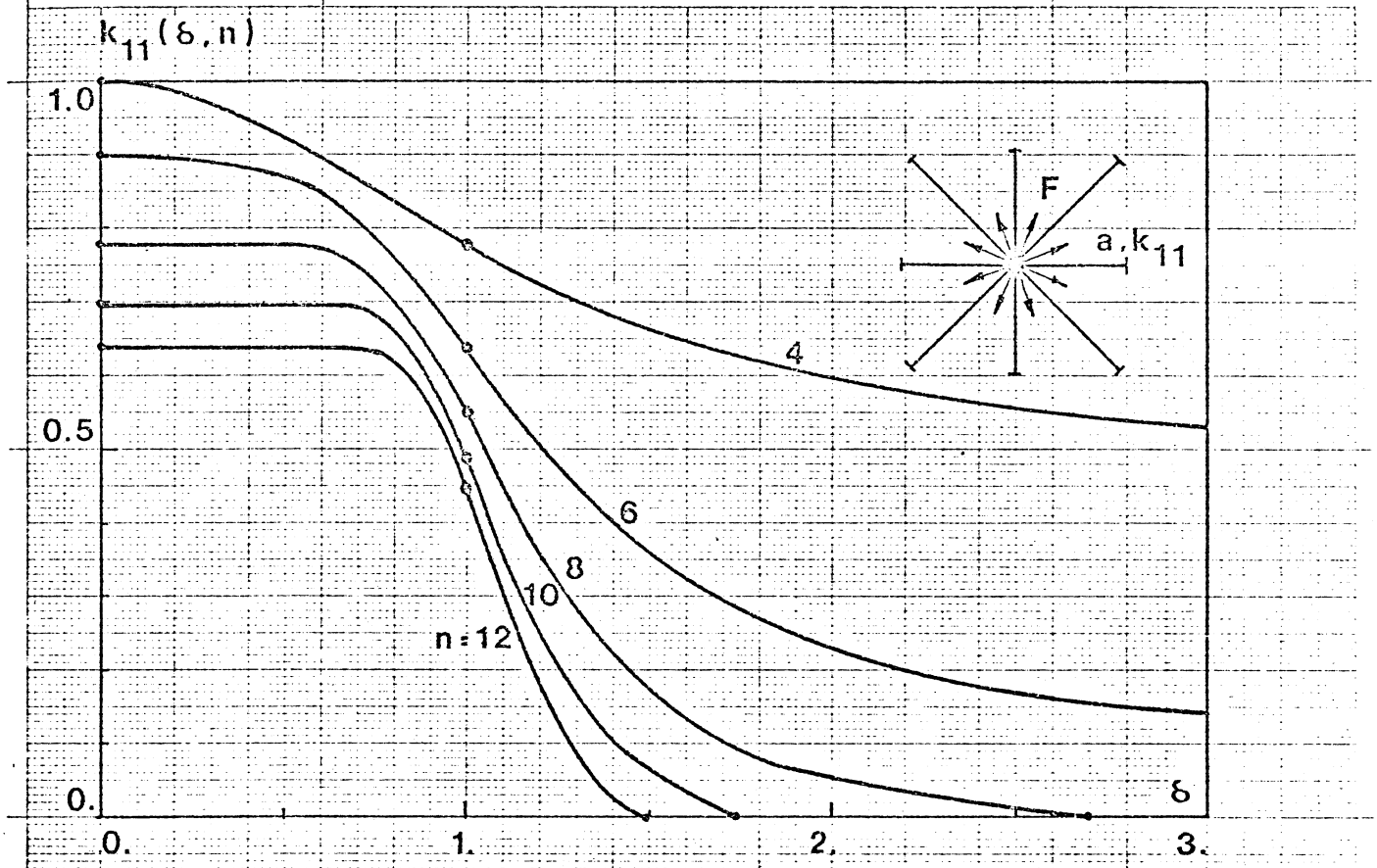


Fig 4.56 Värden för a-spetsen.

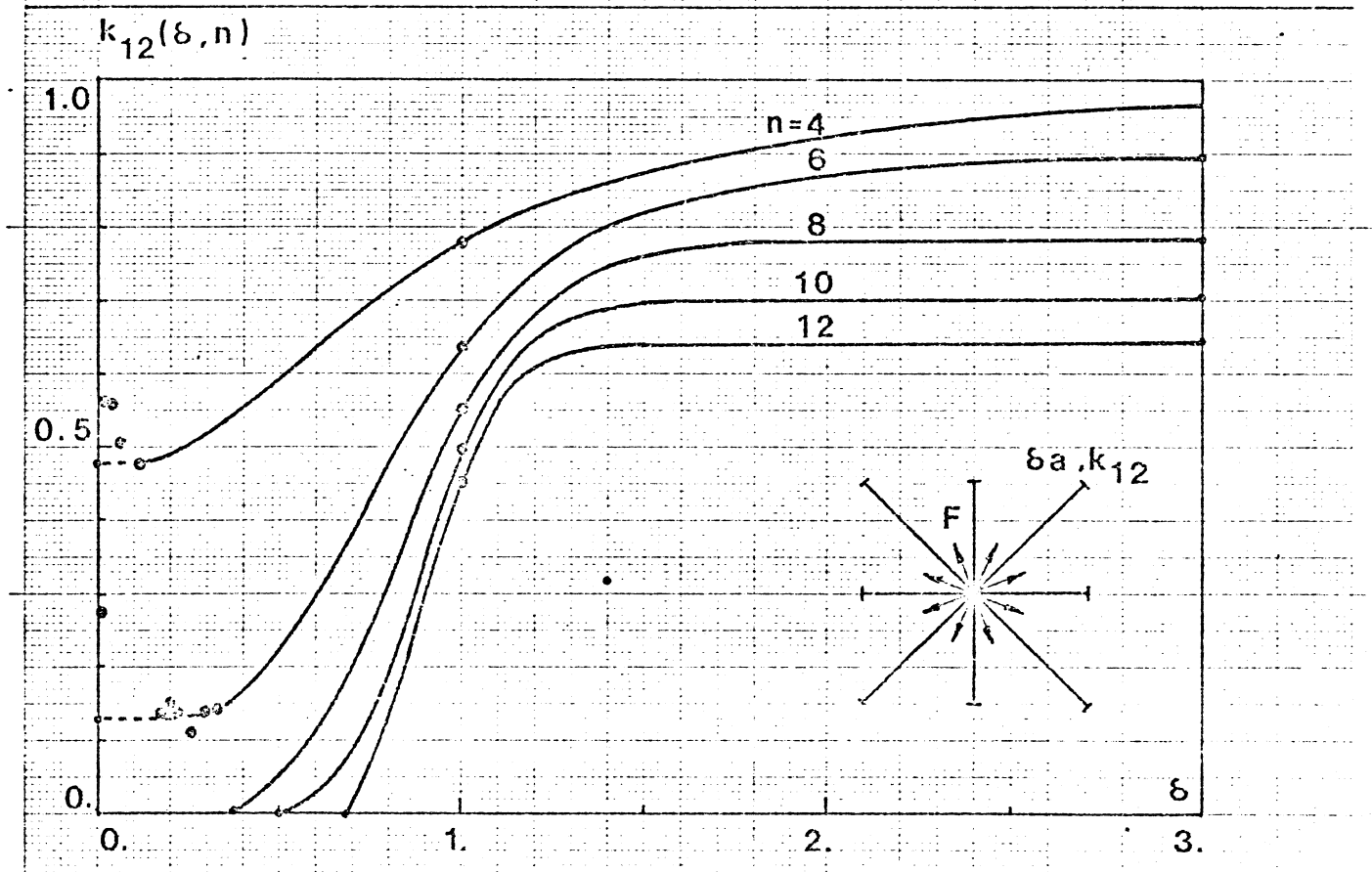


Fig 4.57 Värden för δa-spetsen.

4.8. Det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor under inre övertryck på enbart hålranden.

I detta fall har spänningsintensitetsfaktorn K_I ur (3.237) beräknats på dimensionslös form jämförd med den plana sprickan där dels belastningsfallet utbrett inre övertryck använts vilket ger k_I dels partiellt inre övertryck vilket ger k_I', båda enl.

$$\begin{cases} k_I(\mu,n) = K_I(\mu,n)/K_{Io}\,, \quad K_{Io} = p\sqrt{\pi\mu R} \\ k_I'(\mu,n) = K_I(\mu,n)/K_{Io}'\,, \quad K_{Io}' = 2/\pi \cdot \arcsin(1/\mu)\cdot K_{Io} \end{cases} \tag{4.11}$$

Då avbildningspolynomet avsiktligt valts så att den approximerade konturen i mest möjliga mån skall stämma med den ursprungliga just i sprickspetsarna, se avsnitt 3.3, medför det att konturerna stämmer mindre väl vid hörnpunkterna och därmed vid det cirkulära hålet. Dessa avvikelser blir större med ökande sprickspetsavstånd och antal armar. Räkningarna påverkas särskilt mycket i detta belastningsfall då belastningen verkar på enbart hålranden, se fig. 4.58.

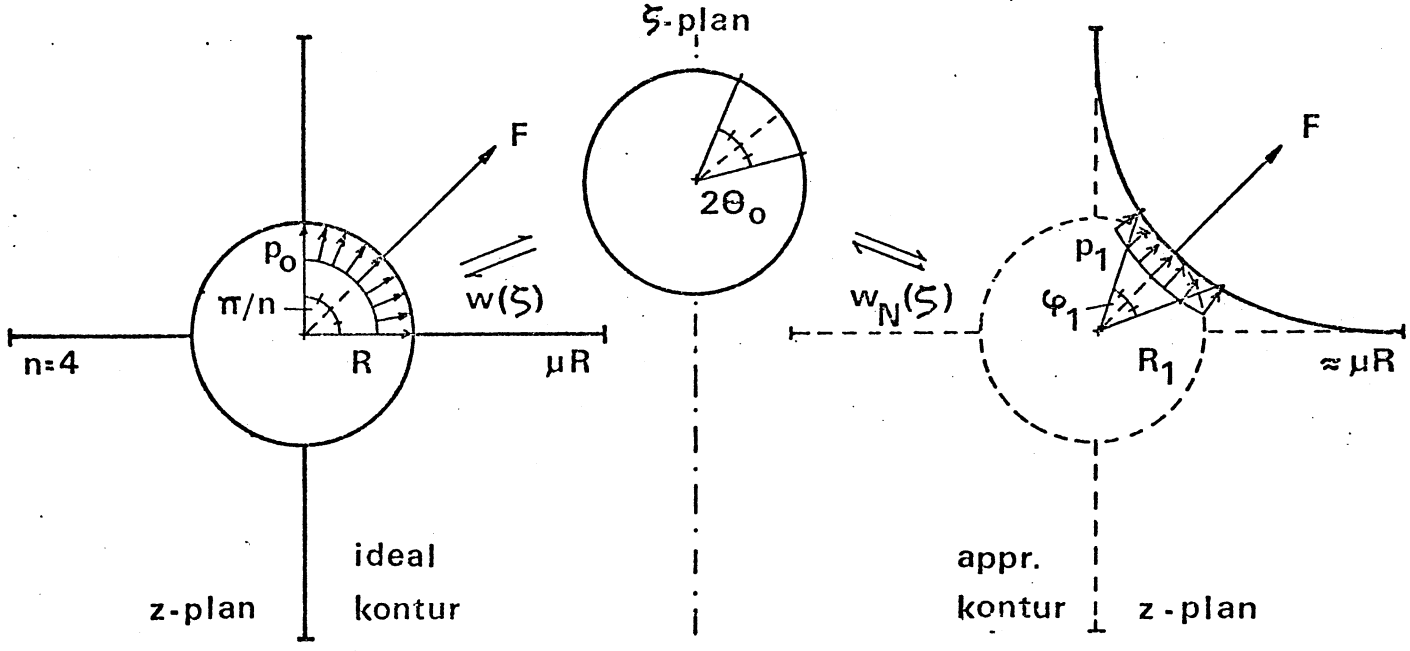


fig 4.58

Den del av hålranden som ligger mellan två närliggande sprickor på den verkliga konturen har centrumvinkeln $2\pi/n$ och den svarar mot en båge på enhetscirkeln i bildplanet med sektorvinkeln $2\theta_o$. Denna båge svarar i sin tur mot en del av hålranden på den approximerade konturen som har en centrumvinkel $2\varphi_1 \neq 2\pi/n$. Detta medför vidare att båglängderna över vilket trycket verkar i den verkliga och den approximerade konturen är olika liksom tryckets över bågarna kraftresultanter, som en första korrektion kräver vi att kraftresultanterna skall vara lika i de bägge fallen. Med beteckningar ur fig. 4.58

$$F = 2pR\sin\pi/n = 2p_1R_1(\theta_o)\sin\varphi_1(\theta_o) \qquad (4.12)$$

dvs. det tryck som måste verka över bågen i den approximerade konturen är inte p utan p_1 där

$$p_1 = k_p p = p \cdot \frac{R\sin\pi/n}{R_1\sin\varphi_1} \qquad (4.13)$$

Ur fig. inses att

$$R_1 e^{i(\pi/n-\varphi_1)} = w_N(e^{i(\pi/n-\theta_o)}) \qquad (4.14)$$

och med uttrycken för $w_N(\zeta)$ ur (3.53) och A ur (3.73) erhålles

$$R_1\, e^{i\varphi_1} = R\,[(\mu^n+1)/2]^{2/n}/\mu \cdot [C_R + iC_1] \qquad (4.15)$$

där

$$\begin{Bmatrix} C_R \\ C_I \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k c_k \begin{Bmatrix} \cos(kn-1)\theta_o \\ -\sin(kn-1)\theta_o \end{Bmatrix} \qquad (4.16)$$

Härigenom erhålles

$$k_p = \frac{\mu\sin\pi/n}{[(\mu^n+1)/2]^{2/n} \cdot C_1} \qquad (4.17)$$

vilket är den faktor med vilken $k_1(\mu,n)$ och $k_1'(\mu,n)$ skall multipliceras om resultantvillkoret (4.12) skall vara uppfyllt.

Genom denna korrektion blir de numeriska resultaten väsentligt bättre men noggrannheten i värdena torde i allmänhet ändå inte vara bättre än någon enhet i 2:a siffran trots att avbildningspolynomets gradtal valts till N = 30. En ytterligare förbättring vore troligen möjlig om hänsyn tages till att avståndet mellan kraftresultantens angreppspunkt och origo också förändrats, $R_1 \neq R$. Jfr. skillnaden mellan hypocykloidsprickans värden och stjärnsprickans med lika långa armar i tabell 4.6, båda

under centralt angripande krafter. Men det har inte gjorts här då tendensen i värdena är riktig.

Beräkningsresultaten, $k_I(\mu,n)$ och $k_I'(\mu,n)$ som funktion av sprickspetsavstånd μ och antal armar n, redovisas i tabell 4.11 och fig. 4.59-4.70. Resultaten visar att spänningsintensitetsfaktorn $k_I(\mu,n)$ som funktion av μ har ett största värde för μ = 1.1-1.3 och att för stora μ $k_I(\mu,n) \sim 1/\mu$, se fig. 4.59. Det asymptotiska beteendet syns ännu klarare i $k_I'(\mu,n)$-värdena då dessa som relaterats till den plana sprickan med ett partiellt inre övertryck för stora μ närmar sig värdena $k_I(n)$ för stjärnsprickan med lika långa armar och centralt angripande krafter, se tabell 4.11 och fig. 4.60-4.61, ur (4.11) för stora μ har man arcsin $(1/\mu) \approx 1/\mu$. Följaktligen gäller $\lim_{\mu \to \infty} k_I'(\mu,n) = k_I(n)$.

Dessa saker innebär i sin tur att $K_I(\mu,n)$ som funktion av μ har ett maximum då $K_{Io} \sim \sqrt{\mu}$, se (4.11).

I fig. 4.61-4.69 visas både $k_I(\mu,n)$ för inre övertryck på hålranden ur (4.11) och $k_I(\mu,n)$ för utbrett inre övertryck ur (4.2). De sistnämnda betecknas här $k_{Ip}(\mu,n)$. Dessutom har asymptoterna $k_I(n)\cdot 2/\pi \cdot \arcsin(1/\mu)$ ritats in och i fig. 4.61 också den kurva som svarar mot den likarmade plana sprickan under centralt angripande krafter. För mycket små sprickor närmar sig $k_I(\mu,n)$ - kurvorna värdet för en kort icke tryckbelastad kantspricka i en plåt under enaxlig dragning, dvs enl. Bowie /8/ gäller $k_I(\mu,n) \approx 1.12\sqrt{1-1/\mu}$ oberoende av n. Det har alltså redan för mycket små sprickor en avgörande betydelse om gasen tränger in i en spricka eller inte, för $\mu-1 \ll 1$ gäller $k_{Ip}(\mu,n) = 2\,k_I(\mu,n)$.

I fig. 4.70 där $k_I'(\mu,n)$ avsatts som funktion av antalet sprickor syns osäkerheten i värdena för litet antal sprickor när μ = 1.05 och 1.10, jfr. fig. 4.19 där övertrycket verkar över hela sprickranden.

Resultaten i avsnitt 4.7, stjärnsprickan med armar av alternerande längd och centralt angripande krafter, och detta avsnitt kan användas för en kvalitativ bedömning av hur spänningsintensitetsfaktorerna $k_{II}'(\mu,\lambda,n)$ och $k_{I2}'(\mu,\lambda,n)$ varierar för ett cirkulärt hål med radiella sprickor av alternerande längd under inre övertryck på enbart hålranden. I analogi med likheten mellan kurvorna för stjärnsprickan i avsnitt 4.5 och 4.7 där enda skillnaden är belastningen som i 4.5 utgörs av ett utbrett inre övertryck kan man förvänta kurvor över $k_{II}'(\mu,\lambda,n)$ och $k_{I2}'(\mu,\lambda,n)$ som liknar dem för ett utbrett inre övertryck i samma geometri, se fig. 4.33-4.37 i avsnitt 4.6.

Härav kan man dra den slutsatsen att för det cirkulära hålet med radiella sprickor av alternerande längd under inre övertryck på enbart hålranden betyder hålets närvaro jämfört med stjärnsprickan med armar av alternerande längd och centralt angripande krafter att:

a. Slutningseffekter uppträder först när sprickorna är tillräckligt långa jämfört med hålet.

b. Hålet förhindrar initiering och tillväxt av nya sprickor från hålranden om sprickor redan finns.

c. Den tendens till stabilitet ur tillväxtsynpunkt som finns för stjärnsprickan med n = 2,4 och 6 armar motverkas.

Detta skärper instabiliteten för det cirkulära hålet med radiella sprickor och tryck på enbart hålranden vilken alltså är likadan som för ett utbrett inre övertryck. Då instabiliten ökar med antalet från början befintliga sprickor finns här en mekanism som medför att från en situation där ett stort antal kortare sprickor initierats på randen till ett cirkulärt hål så kommer endast ett fåtal att växa till större längd oavsett om gasen tränger in i sprickorna eller inte.

Tabell 4.11: De dimensionslösa spänningsintensitetsfaktorerna $k_I(\mu, n)$ och $k_I^{\,l}(\mu, n)$ för det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor under inre övertryck på enbart hålranden. N = 30.

$k_I(\mu, n)$

n \ μ	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0	$\mu \gg 1$
2	0.0338	0.3055	0.3845	0.3824	0.3649	0.3292	0.2967	0.2070	
3	0.2848	0.3268	0.3740	0.3750	0.3567	0.3182	0.2829	0.1902	
4	0.2265	0.3290	0.3638	0.3572	0.3320	0.2878	0.2511	0.1654	
5	0.2739	0.3239	0.3502	0.3332	0.3026	0.2570	0.2229	0.1474	
6	0.2526	0.3161	0.3343	0.3082	0.2753	0.2321	0.2017	0.1347	
8	0.2545	0.2989	0.3012	0.2644	0.2335	0.1983	0.1739	0.1173	
10	0.2501	0.2830	0.2697	0.2320	0.2063	0.1773	0.1560	0.1050	
12	0.2435	0.2659	0.2433	0.2092	0.1880	0.1626	0.1434	0.0958	
15	0.2316	0.2418	0.2131	0.1861	0.1689	0.1466	0.1285	0.0856	

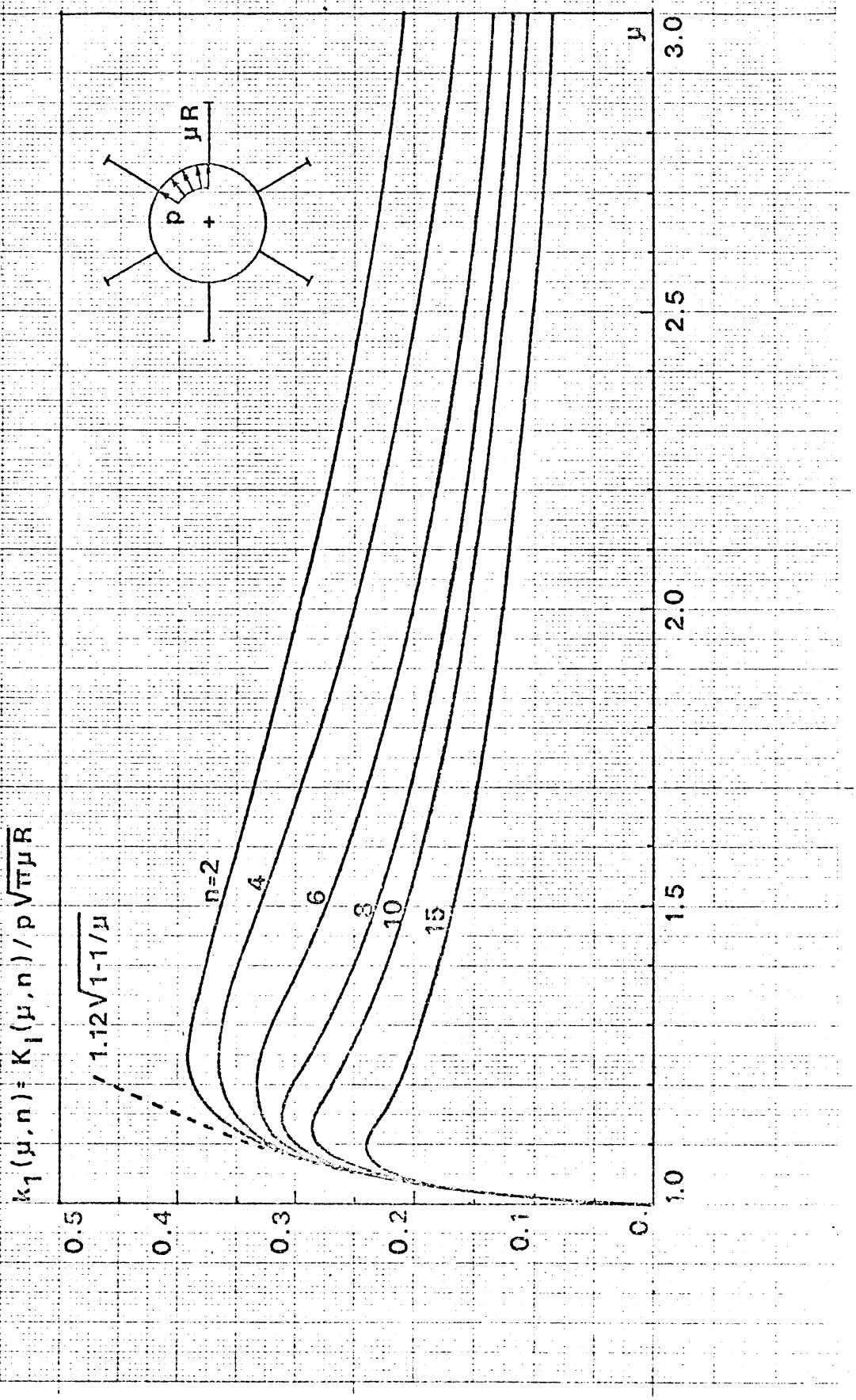
$k_I^{\,l}(\mu, n) = \pi/2 \cdot \arcsin^{-1}(1/\mu) \cdot k_I(\mu, n)$

n \ μ	1.05	1.10	1.20	1.35	1.50	1.75	2.0	3.0	$\mu \gg 1^{\,l}$
2	0.0422	0.4206	0.6131	0.7201	0.7850	0.8502	0.8901	0.9566	1.0000
3	0.3548	0.4498	0.5963	0.7061	0.7678	0.8217	0.8488	0.8791	0.8913
4	0.2821	0.4528	0.5801	0.6726	0.7147	0.7432	0.7532	0.7646	0.7800
5	0.3412	0.4459	0.5584	0.6274	0.6514	0.6637	0.6688	0.6815	0.6990
6	0.3147	0.4351	0.5331	0.5804	0.5925	0.5994	0.6051	0.6224	0.6382
8	0.3170	0.4115	0.4802	0.4978	0.5026	0.5120	0.5217	0.5422	0.5523
10	0.3116	0.3895	0.4301	0.4369	0.4441	0.4580	0.4681	0.4855	0.4935
12	0.3033	0.3661	0.3880	0.3940	0.4046	0.4199	0.4302	0.4429	0.4501
15	0.2885	0.3328	0.3398	0.3504	0.3635	0.3786	0.3854	0.3958	0.4020

I värden från tabell 4.6

Spänningsintensitetsfaktorn $k_1(\mu,n)$ för det cirkulära hålet med lika långa radiella sprickor under inre övertryck på enbart hålranden.

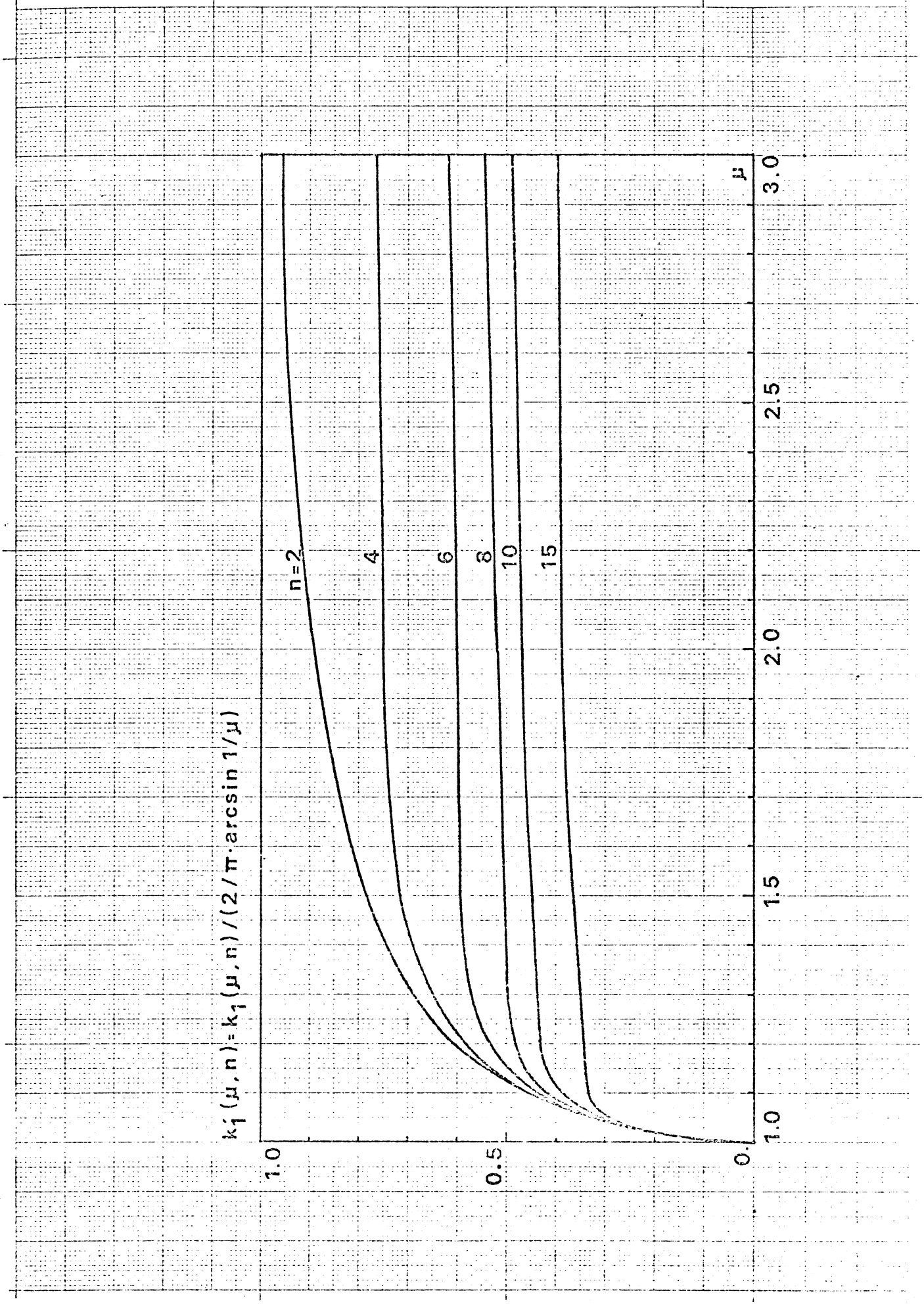
Fou



Som fig 4.59 fast relaterad till den plana sprickan under partiellt inre övertryck.

fig 4.60

FOA



k_1 ur fig 4.59 jfrd med k_{1p} för ett utbrett inre övertryck.

fig 4.61+62

FOu 133.

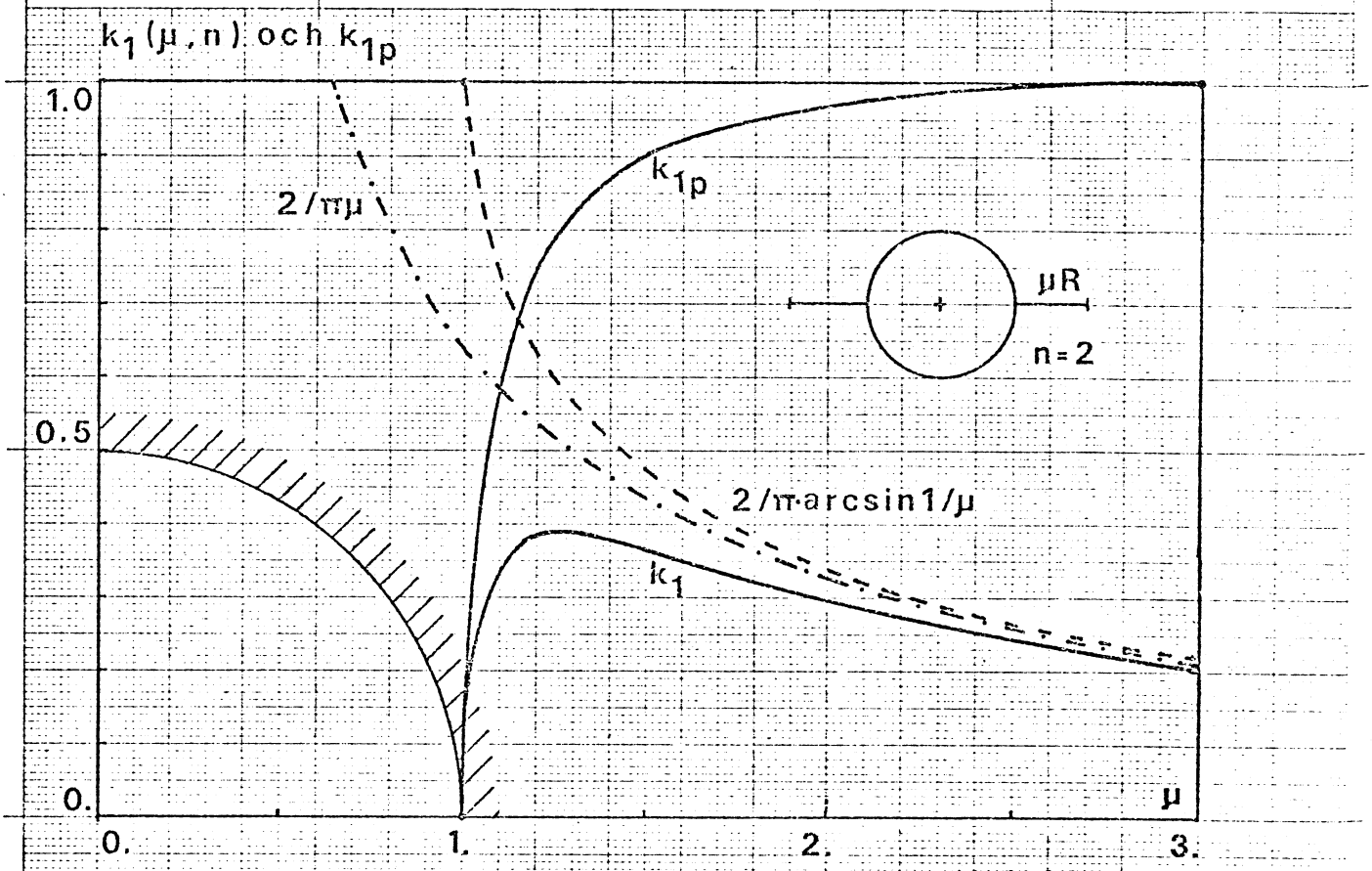


Fig 4.61 n=2 armar.

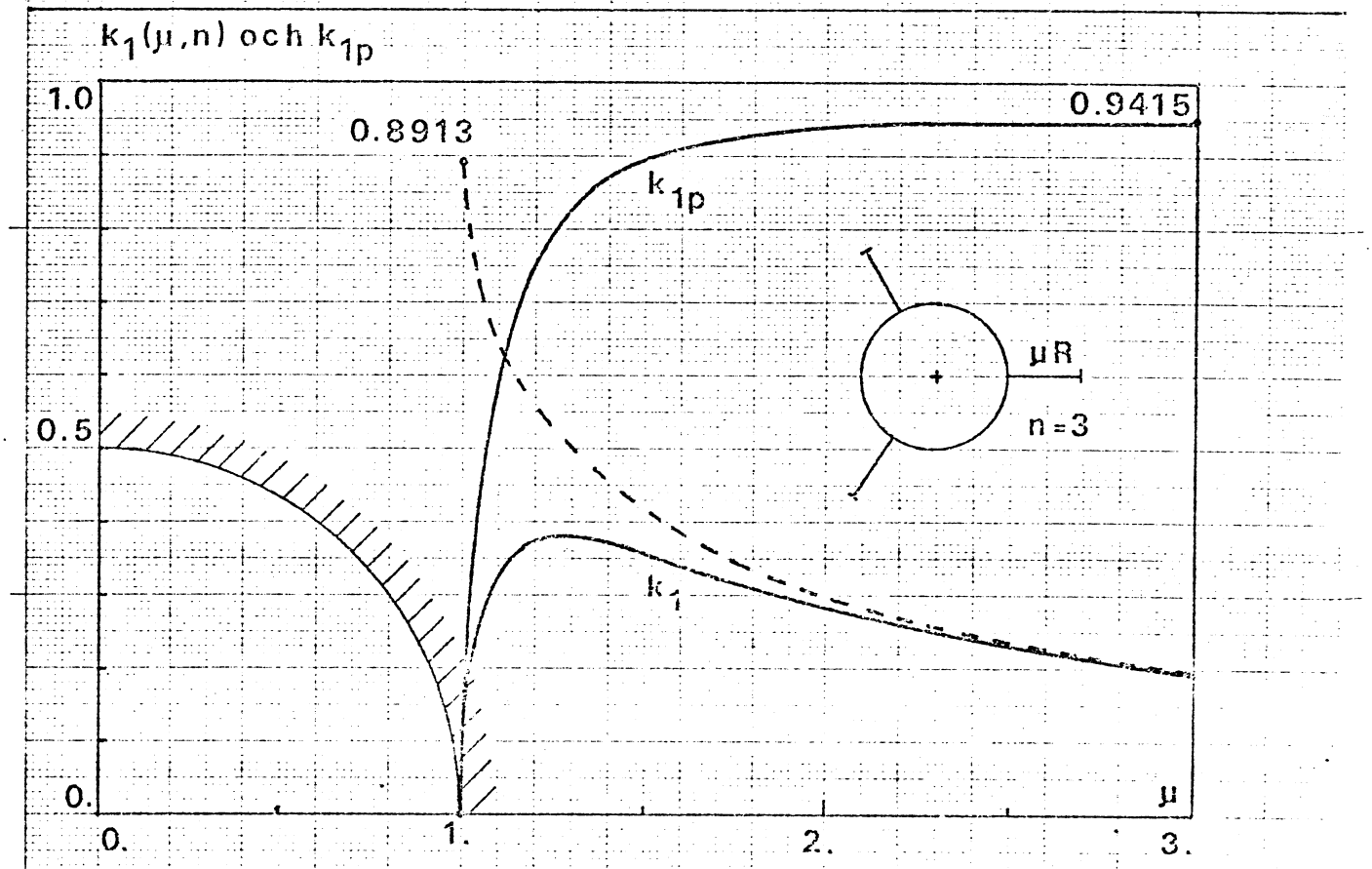


Fig 4.62 n=3 armar.

Som fig 4.61.

fig 4.63+64

for

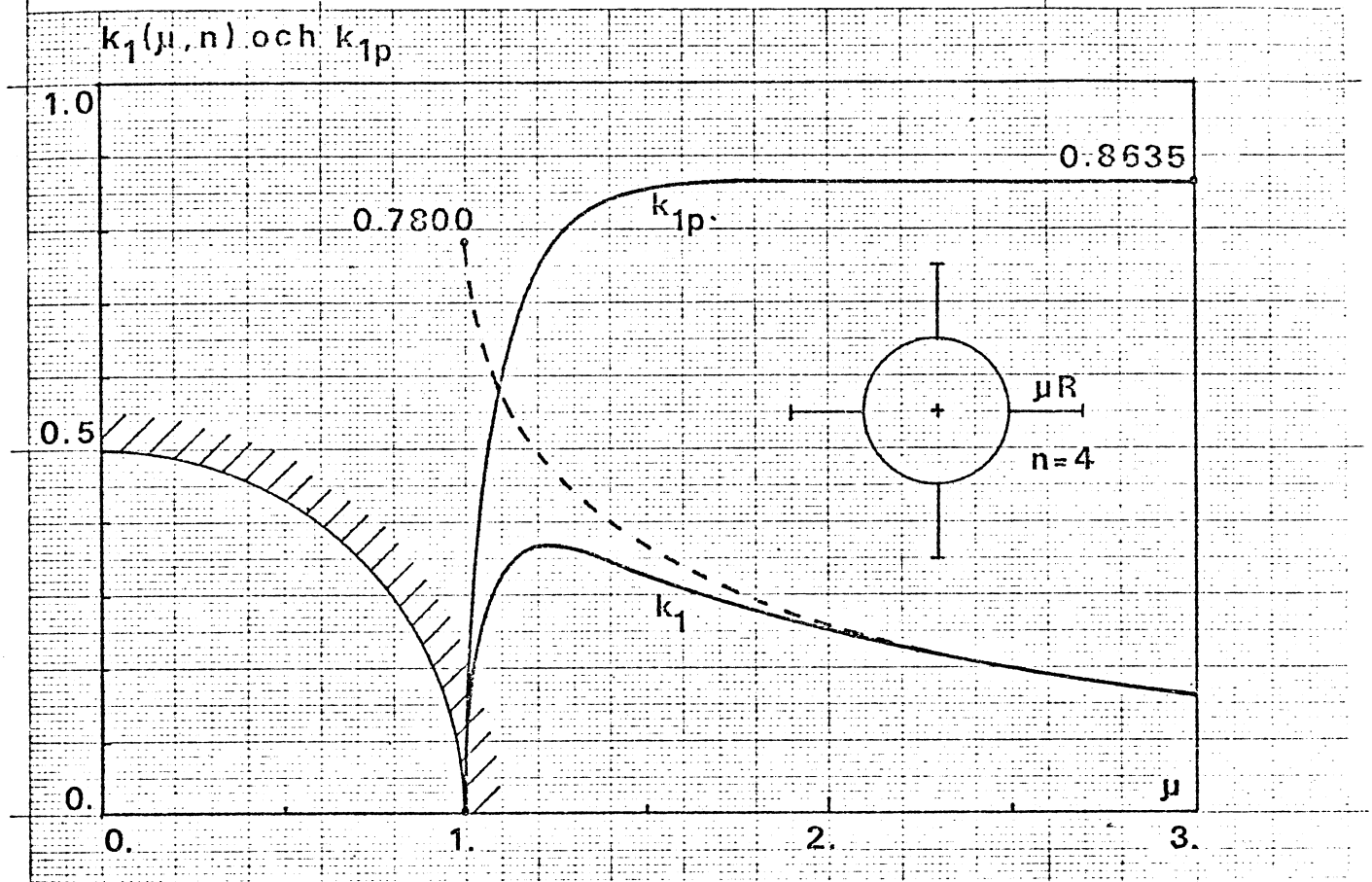


Fig 4.63 n=4 armar.

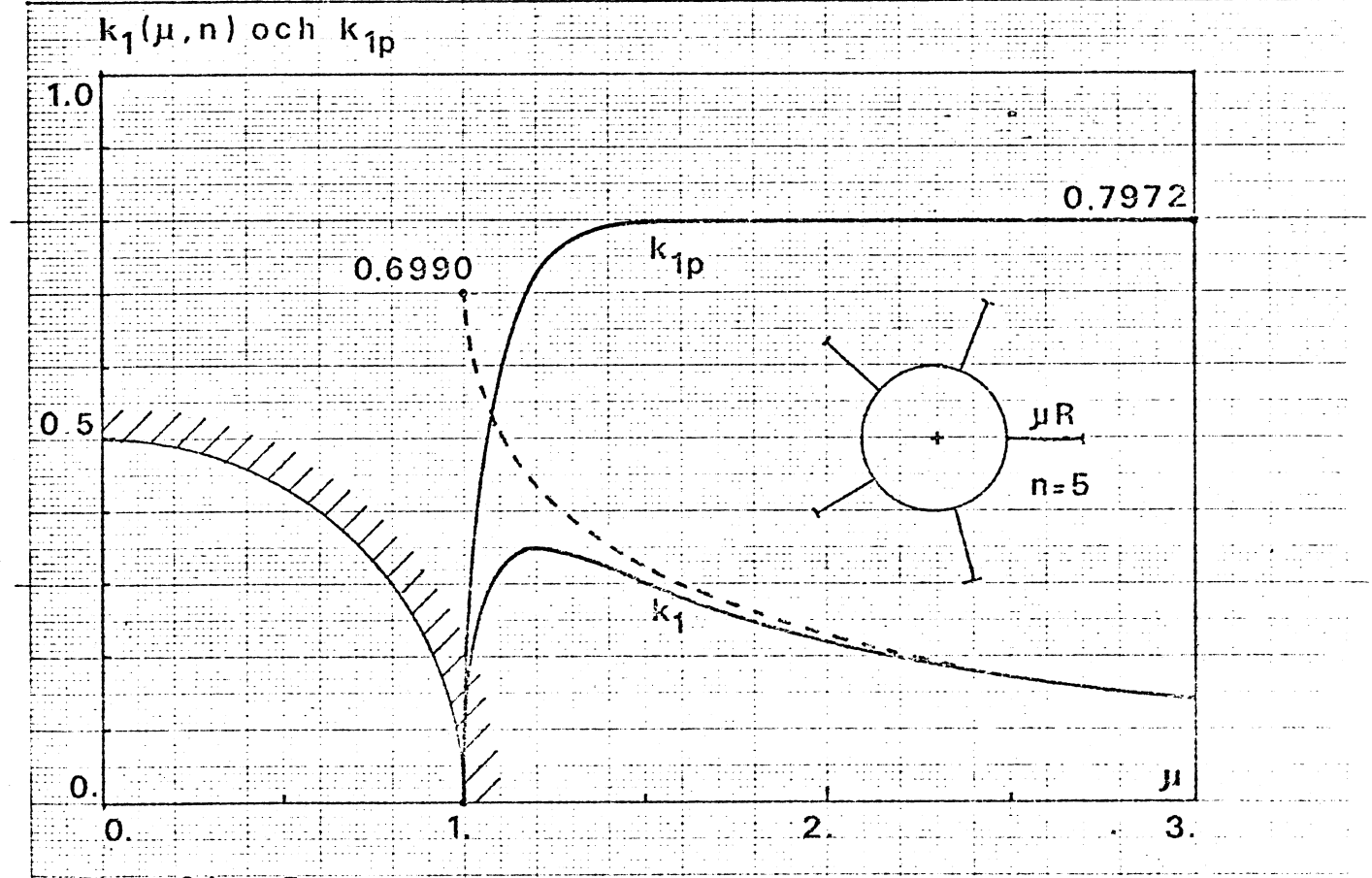


Fig 4.64 n=5 armar.

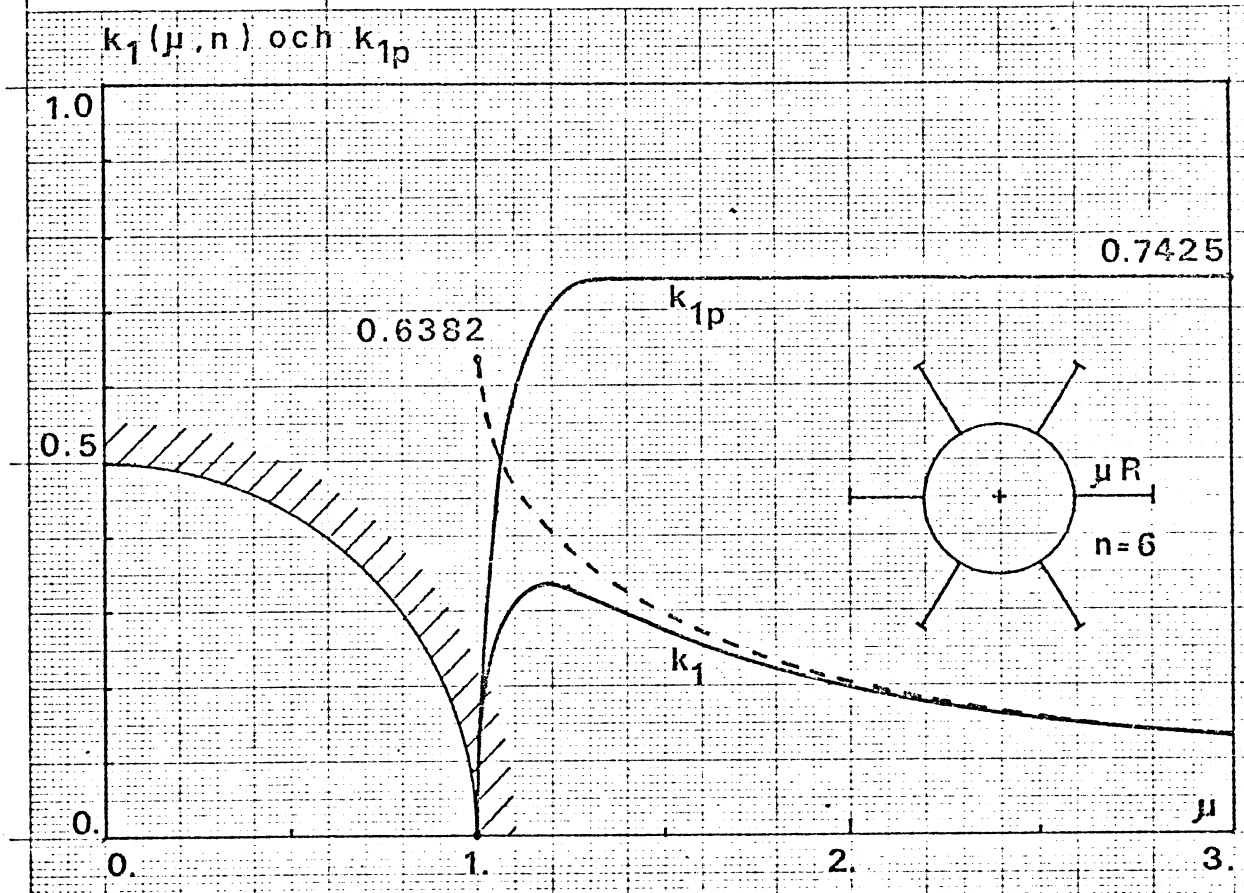


Fig 4.65 n=6 armar.

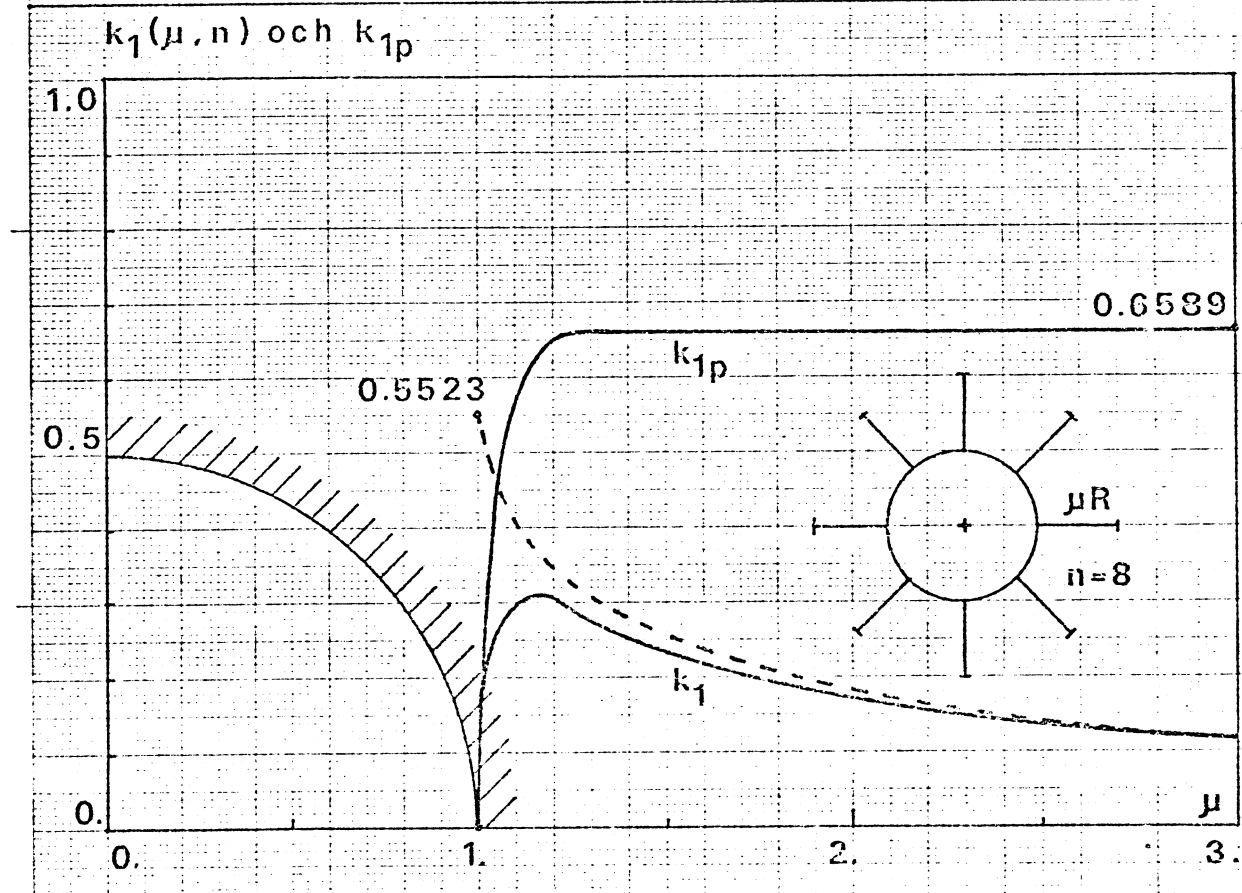


Fig 4.66 n=8 armar.

Som fig 4.61.

fig 4.67+68

FOH 136.

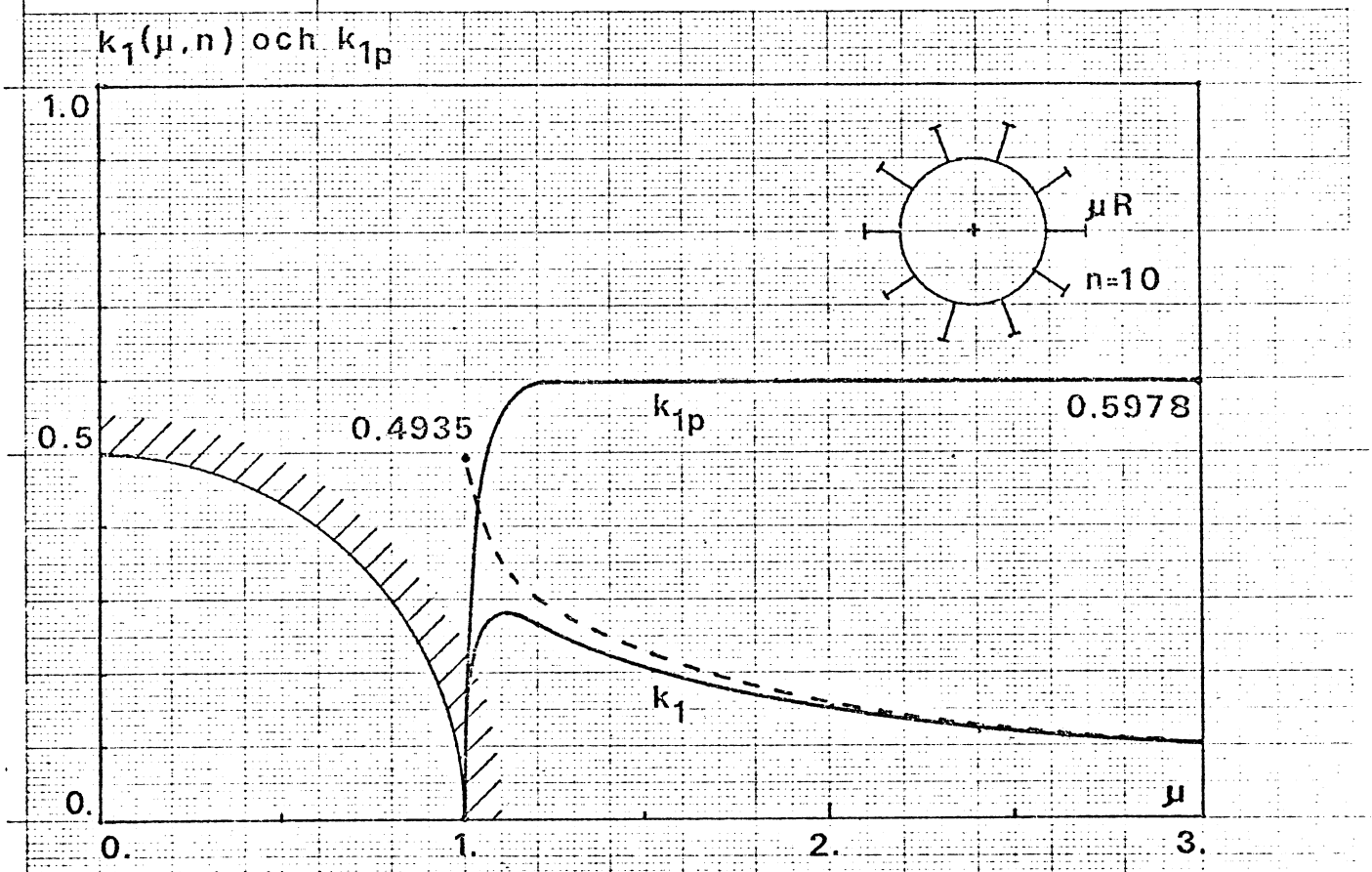


Fig 4.67 n=10 armar.

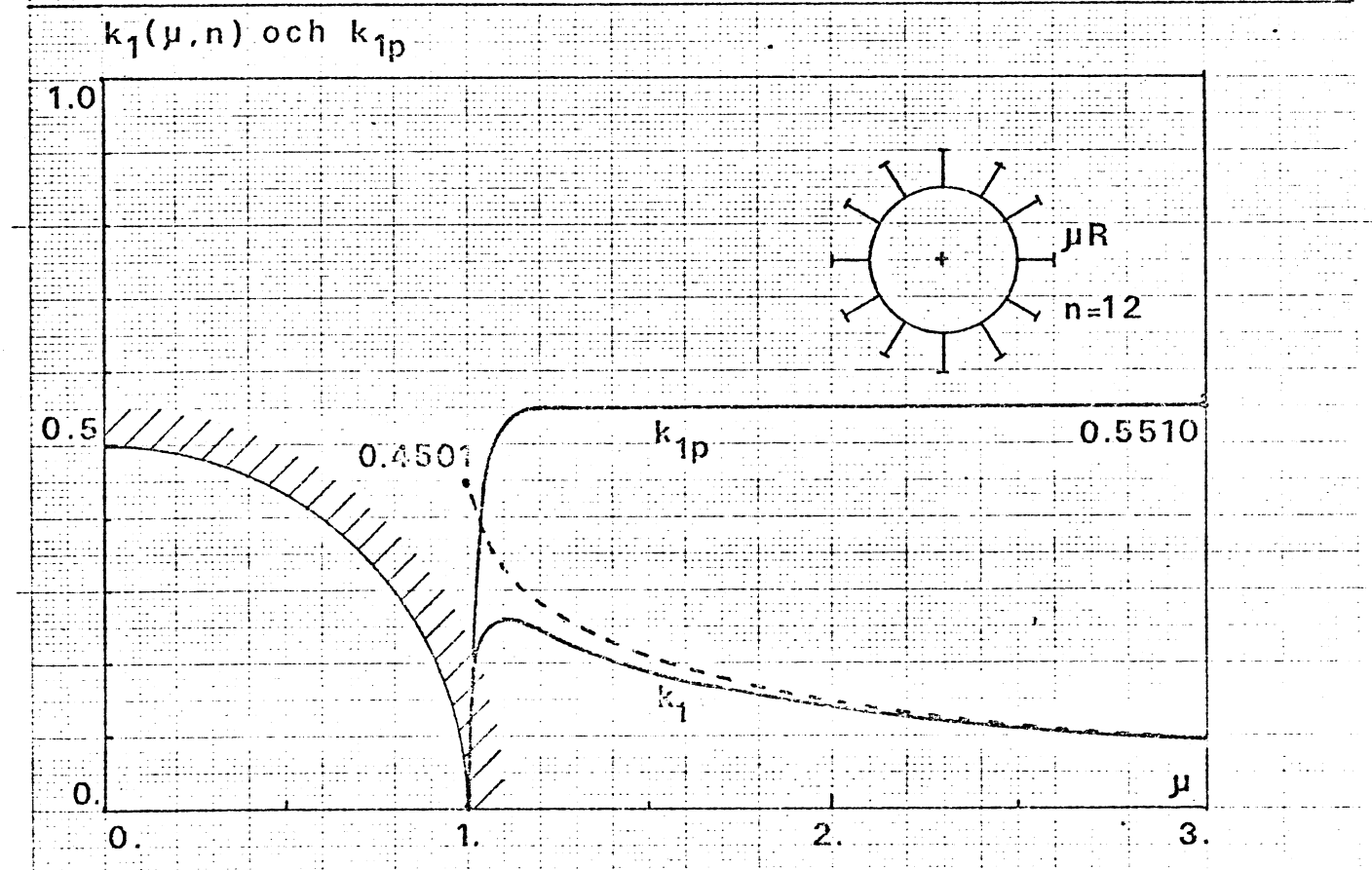


Fig 4.68 n=12 armar.

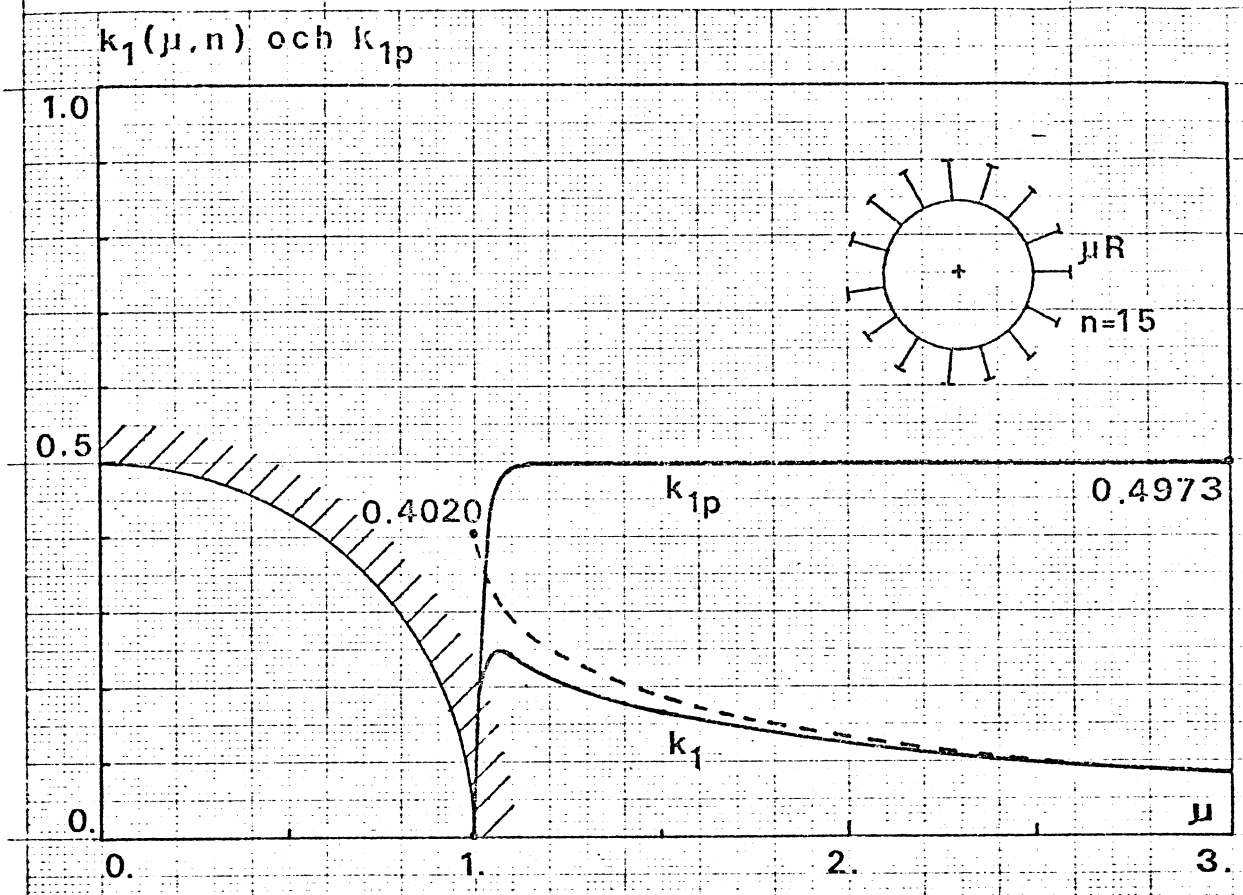


Fig 4.69 Som fig 4.61 men n=15 armar.

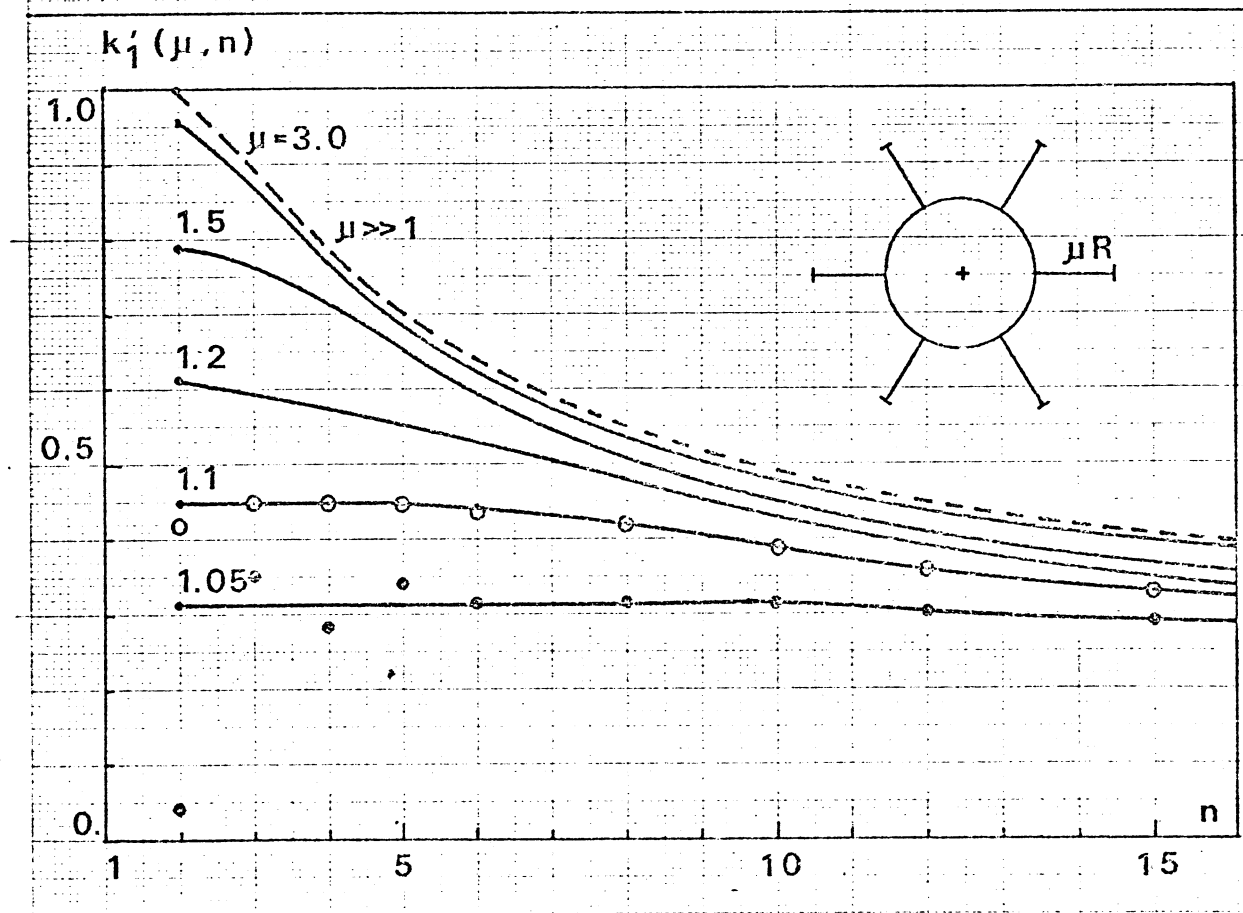


Fig 4.70 Som fig 4.59.

4.9. Vinkelsprickan under utbrett inre övertryck.

För detta fall har dels spänningsintensitetsfaktorerna K_I och K_{II} ur (3.229) beräknats dels gasvolymen V bestämd av randförskjutningarna ur (3.330) och V_k bestämd av spänningsintensitetsfaktorerna ur (3.192). Den plana gasfyllda sprickan är referensgeometri för de dimensionslösa storheterna k_1, k_2, v_o och v_k givna av sambanden

$$\begin{cases} k_1(\alpha) = K_I(\alpha)/K_{Io} \quad K_{Io} = p\sqrt{\pi a} \\ k_2(\alpha) = K_{II}(\alpha)/K_{Io} \\ \\ v_o(\alpha) = V(\alpha)/V_o \quad , \; V_o = 2\pi(1-\nu^2)pa^2/E \\ v_k(\alpha) = V_k(\alpha)/V_o \end{cases} \tag{4.18}$$

Dessutom har sprickans troliga tillväxtriktning φ_o i ett sprött material där brottet följer dragspänningshypotesen bestämts ur (3.179)

$$\varphi_o = -2\operatorname{atan}\left[\left(\sqrt{k_1^2 + 8k_2^2} - k_1\right)/4k_2\right] \tag{4.19}$$

där φ_o räknas moturs relativt sprickspetsplanet.

Resultaten visas i tabell 4.12-4.13 och fig. 4.71-4.73 där motsvarande uttryck för den gasfyllda cirkelbågsprickan medtagits för jämförelsens skull, se fig. 3.13 och (3.214) - (3.216), de betecknas med prim.

I tabell 4.12 och fig. 4.71 finns värdena på $k_1(\alpha)$ och $k_2(\alpha)$ samt $k_1'(\alpha)$ och $k_2'(\alpha)$ som funktion av halva sprickvinkeln α. När $\alpha = 90^o$ kommer både vinkelsprickan och cirkelbågsprickan att vara identiska med den plana sprickan varför $k_1(90) = k_1'(90) = 1$ och $k_2(90) = k_2'(90) = 0$. När $\alpha = 0$ blir värdena för cirkelbågsprickan båda $k_1'(0) = k_2'(0) = 0$. Men för vinkelsprickan som i gränsen bildar en plan spricka av halva längden måste gälla dels $k_2(0) = 0$ eftersom skjuvspänningen är noll i symmetriplanet och dels $k_1(0) = 0.5$ då summan av energigradienterna för de sammanfallande spetsarna i gränsen måste vara lika stor som energigradienten för ena spetsen på den plana sprickan med halva längden mot när $\alpha = 90^o$. Gradienterna beror kvadratiskt av spänningsintensitetsfaktorerna och då $k_2(0) = 0$ medför det att $k_1(0) = 0.5$. Kurvorna i fig. 4.71 visar en god överensstämmelse mellan $k_2(\alpha)$ och $k_2'(\alpha)$ över hela intervallet medan $k_1'(\alpha)$, värdet för cirkelbågsprickan, med minskande sprickvinkel snabbt blir mindre än vinkelsprickans värde $k_1(\alpha)$.

Värden på den troliga tillväxtriktningen $\varphi_o(\alpha)$ och $\varphi_o'(\alpha)$ finns i tabell 4.12 och kurvor i fig. 4.72. För den plana sprickan, $\alpha = 90^o$, är sprickspetsplanet den troliga tillväxtriktningen. Både vinkel- och cirkelbågsprickan tenderar att plana ut vid tillväxt då $\varphi_o(\alpha)$ och $\varphi_o'(\alpha) > 0$ när $\alpha \neq 0$ och 90^o. Vid små avvikelser från den plana sprickan, $\alpha \approx 90^o$, är φ_o så stor att den med en gång planar ut helt och hållet dvs. $\varphi_o \approx 90 - \alpha$. Med minskande sprickvinkel är detta inte längre fallet då $\varphi_o < 90 - \alpha$. $\varphi_o(\alpha)$ har ett största värde när $\alpha \approx 35^o$ och för mindre sprickvinklar minskar tendensen att plana ut snabbt.

Den numeriska noggrannheten tycks vara tillfredsställande för $\alpha \geq 40^o$, mindre än en enhet i 3:e siffran när $\alpha \geq 60^o$ för $k_1(\alpha)$ och $k_2(\alpha)$. När $\alpha < 40^o$ däremot blir den snabbt sämre vilket bör ses mot den approximerade konturens utseende, se fig 4.13-14. Avvikelsen mellan volymvärdena $v_o(\alpha)$ och $v_k(\alpha)$ i tabell 4.13 är också mindre än två enheter i 3:e siffran när $\alpha \geq 40^o$. Man inser att $v_o(90) = v_k(90) = 1$ och att $v_o(0) = v_k(0) = 0.25$. Kurvor för båda sprickтyperna visas i fig. 4.73.

Av fig. och tabeller syns att cirkelbågsprickan är en mycket god approximation av vinkelsprickan när sprickvinkeln är nära 90^o. Om man tolererar en avvikelse mellan jämförliga storheter på 10% för de båda geometrierna så gäller den ned till $\alpha = 60^o$.

abell 4.12: De dimensionslösa spänningsintensitetsfaktorerna $k_1(\alpha)$ och $k_2(\alpha)$ och sprickans troliga utbredningsriktning relativt sprickspetsen $\varphi_o(\alpha)$ för vinkelsprickan under utbrett inre övertryck och motsvarande för cirkelbågsprickan. N = 30.

inkelsprickan:

α	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$k_1(\alpha)$	0.500 I	- *	0.735	0.589	0.702	0.777	0.858	0.930	0.981	1.000
$k_2(\alpha)$	0.000 I	-	-0.124	-0.225	-0.223	-0.224	-0.202	-0.155	-0.085	0.000
$\varphi_o(\alpha)$	0.0 I	-	18.2	34.3	30.3	28.3	24.2	18.0	9.7	0.0

irkelbågsprickan:

$k_1^I(\alpha)$	0.000	0.094	0.211	0.347	0.494	0.644	0.784	0.898	0.974	1.000
$k_2^I(\alpha)$	0.000	-0.079	-0.148	-0.200	-0.231	-0.234	-0.210	-0.159	-0.084	0.000
$\varphi_o^I(\alpha)$	53.1	50.3	47.0	43.2	38.7	33.3	26.7	18.9	9.9	0.0

* orimliga värden för N = 30 I upskattade gränsvärden

abell 4.13: Den dimensionslösa gasvolymen $v_o(\alpha)$ och $v_k(\alpha)$ för vinkelsprickan under utbrett inre övertryck och motsvarande för cirkelbågsprickan. N = 30.

inkelsprickan:

α	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$v_o(\alpha)$	0.250 I	- **	0.760	0.351	0.544	0.652	0.776	0.889	0.970	1.000
$v_k(\alpha)$	0.250 I	-	0.556	0.397	0.543	0.654	0.776	0.889	0.970	1.000

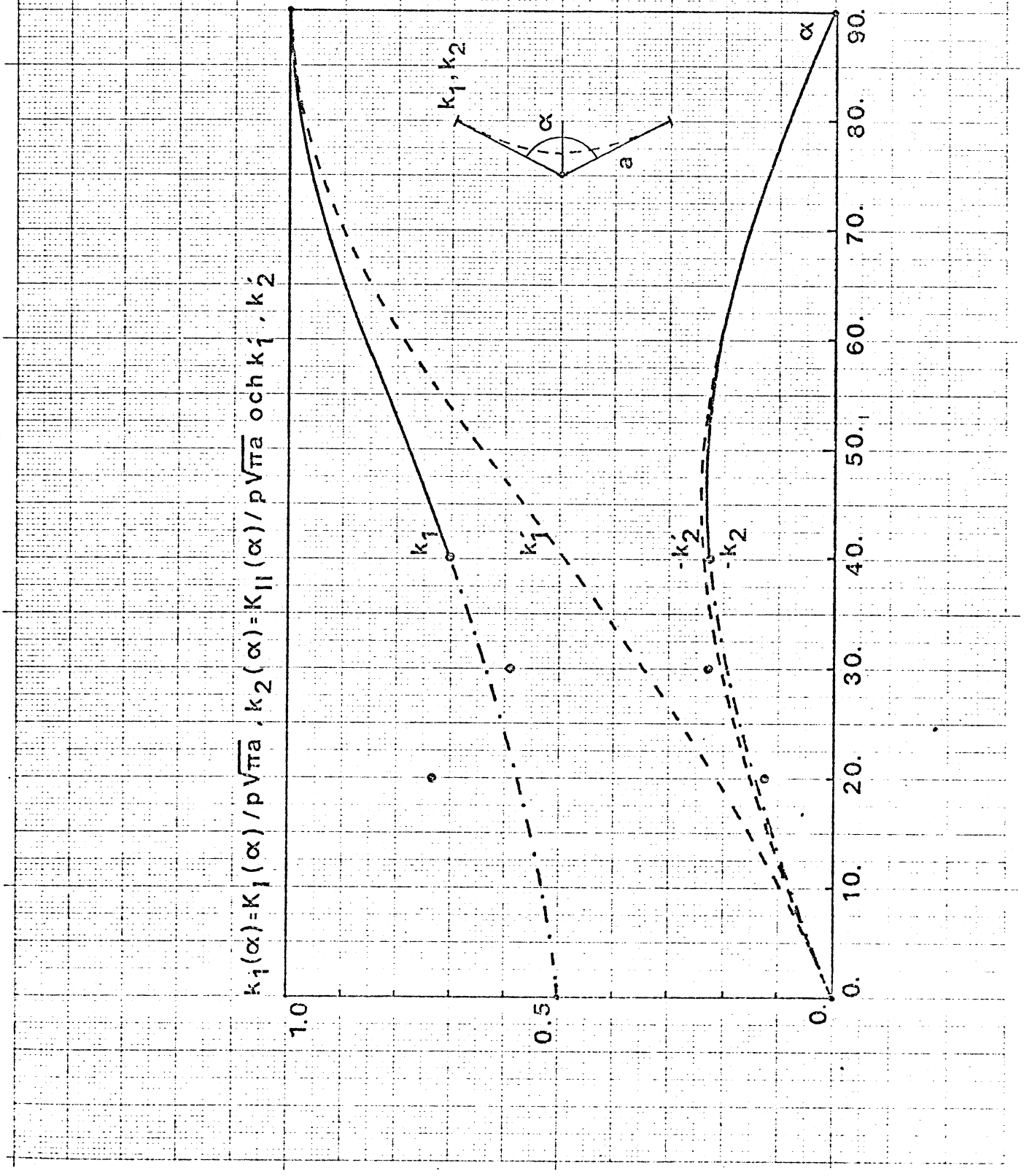
irkelbågsprickan:

$v_o^I(\alpha)$	0.000	0.036	0.131	0.267	0.427	0.595	0.753	0.884	0.970	1.000

* orimliga värden för N = 30 I upskattade gränsvärden

Spänningsintensitetsfaktorerna $k_1(\alpha)$ och $k_2(\alpha)$ för vinkel- och cirkelbågsprickan under ett utbrett inre övertryck.

fig 4.71



Trolig tillväxtriktning och gasvolym for samma fall som fig 4.71.

fig 4.72 + 73

FOU 142.

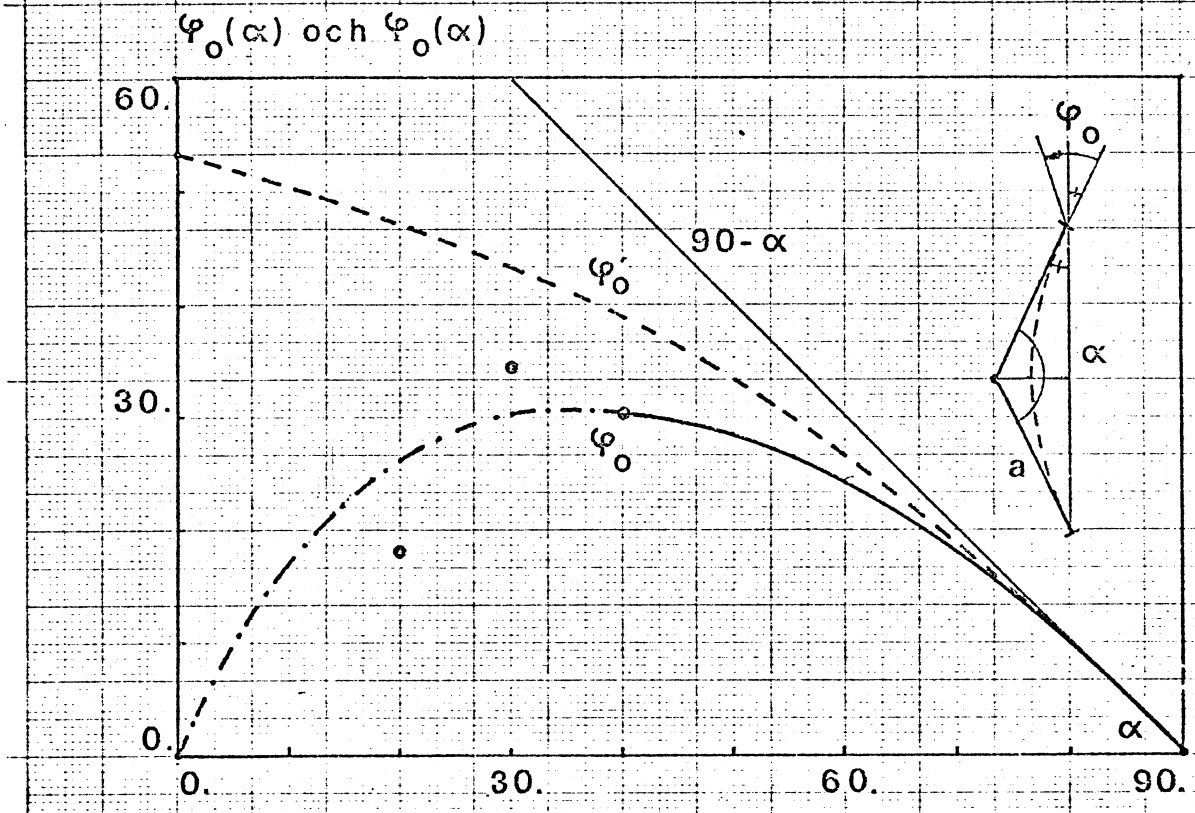


Fig 4.72 Trolig tillväxtriktning.

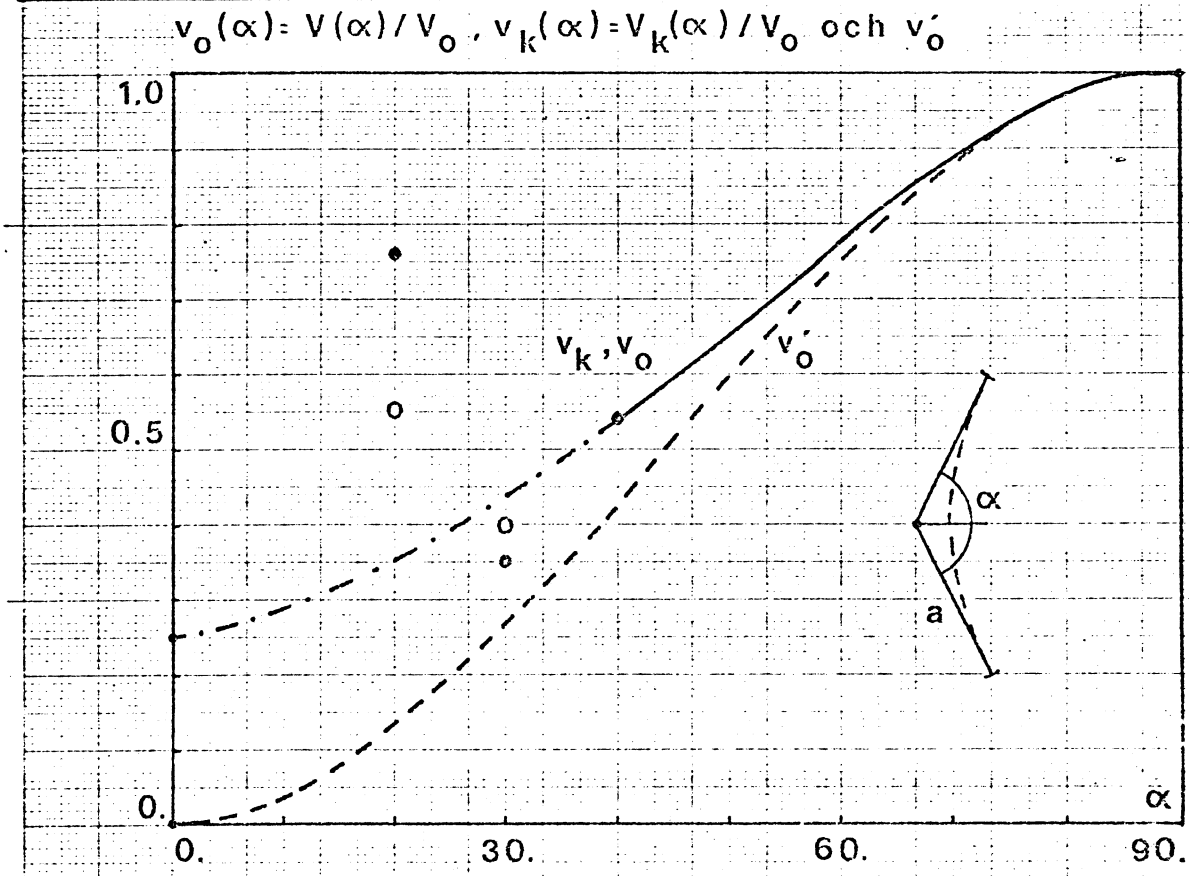


Fig 4.73 Gasvolymen.

4.10. Vinkelsprickan med centralt angripande krafter.

För det sista belastningsfallet har enbart spänningsintensitetsfaktorerna K_I och K_{II} ur (3.235) beräknats och de redovisas med den plana sprickan med centralt angripande krafter som referensgeometri . Storheterna k_1 och k_2 erhålles ur

$$\begin{cases} k_1(\alpha) = K_I(\alpha)/K_{Io}, \; K_{Io} = F/\sqrt{\pi a} \\ k_2(\alpha) = K_{II}(\alpha)/K_{Io} \end{cases} \tag{4.20}$$

och ur dessa fås även sprickans troliga tillväxtriktning φ_o räknat moturs relativt sprickspetsplanet, se (4.19). Resultaten finns i tabell 4.14 och fig. 4.74-4.75 tillsammans med cirkelbågsprickans värden. Den numeriska noggrannheten synes vara mindre än någon enhet i andra siffran för $k_1(\alpha)$ och $k_2(\alpha)$ när $\alpha \geq 40^o$.

I fig. 4.74 finns spänningsintensitetsfaktorerna $k_1(\alpha)$ och $k_2(\alpha)$ som funktion av halva sprickvinkeln α . Både vinkelsprickans och cirkelbågsprickans värden visar ett likartat beteende. I gränsen till den plana sprickan, $\alpha = 90^o$, gäller $k_1(90^o) = k_1'(90^o) = 1.$ och $k_2(90^o) = k_2'(90^o) = 0.$ $k_1(\alpha)$ och $k_1'(\alpha)$ - värdena minskar med α och när $\alpha = 25^o$ för vinkelsprickan resp. $\alpha = 19.5^o$ för cirkelbågsprickan uppträder den slutning av sprickspetsen som omnämns i avsnitt 3.7.2 och även uppträtt för de bägge andra geometrierna. Det finns alltså en minsta medelpunktsvinkel $2\alpha_{min} \approx 50^o$ för vilken en vinkelspricka kan drivas tillväxa med öppna spetsar under inverkan av centralt angripande krafter. En jämförelse med cirkelbågsprickans värden, se Ouchterlony /17/ fig. 7, visar att om belastningen utgörs av ett partiellt inre övertryck i stället kan gasen fylla ut ända till halva sprickan utan att $2\alpha_{min}$ minskar med mer än c:a 10^o. Detta är storleken på den ändring i $2\alpha_{min}$ som är betingad av skillnaden i geometri mellan vinkelsprickan och cirkelbågsprickan.

Båda geometrierna visar samma tendens att plana ut vid tillväxt, se fig. 4.75 där den troliga tillväxtriktningen $\varphi_o(\alpha)$ visas. För både $\varphi_o(\alpha)$ och $\varphi_o'(\alpha)$ gäller att $\varphi_o, \varphi_o' > 90-\alpha$ och att de antar störst möjliga värden, $\varphi_o, \varphi_o' = 70.53^o$, just när spetsarna sluts. Man kan säga att kvalitativt över hela det aktuella vinkelintervallet så är cirkelbågsprickan en bättre approximation till vinkelsprickan när belastningen utgörs av centralt angripande krafter än när den utgörs av ett utbrett inre övertryck som i avsnitt 4.9.

Tabell 4.14: De dimensionslösa spänningsintensitetsfaktorerna $k_1(\alpha)$ och $k_2(\alpha)$ samt den troliga utbredningsriktningen relativt sprickspetsen $\varphi_o(\alpha)$ för vinkelsprickan med centralt angripande krafter och motsvarande för cirkelbågsprickan. N = 30.

vinkelsprickan:

α	20	30	40	50	60	70	80	90
$k_1(\alpha)$	- *	0.226	0.340	0.536	0.710	0.855	0.955	1.000
$k_2(\alpha)$	-	-0.979	-0.917	-0.796	-0.646	-0.459	-0.239	0.000
$\varphi_o(\alpha)$	-	66.2	63.6	58.4	51.6	41.7	25.4	0.0

cirkelbågsprickan:

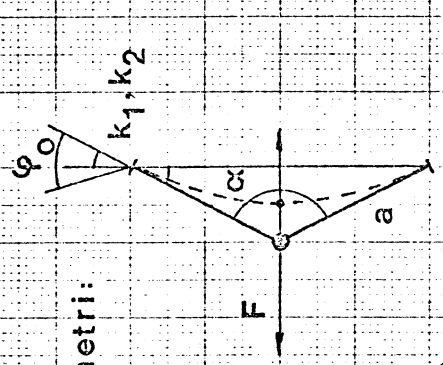
$k_1^{\prime}(\alpha)$	0.000 !	0.400	0.613	0.758	0.865	0.940	0.985	1.000
$k_2^{\prime}(\alpha)$	2.067 !	1.386	1.011	0.751	0.542	0.353	0.175	0.000
$\varphi_o^{\prime}(\alpha)$	70.5 !	65.1	59.5	53.0	44.9	34.0	19.0	0.0

* värden saknas ! $\alpha = 19.47^{\circ}$

Spänningsintetsfaktorer och trolig tillväxtriktning for vinkel- och cirkelbågsprickan med centralt angripande krafter.

fig 4.74+75

FOU



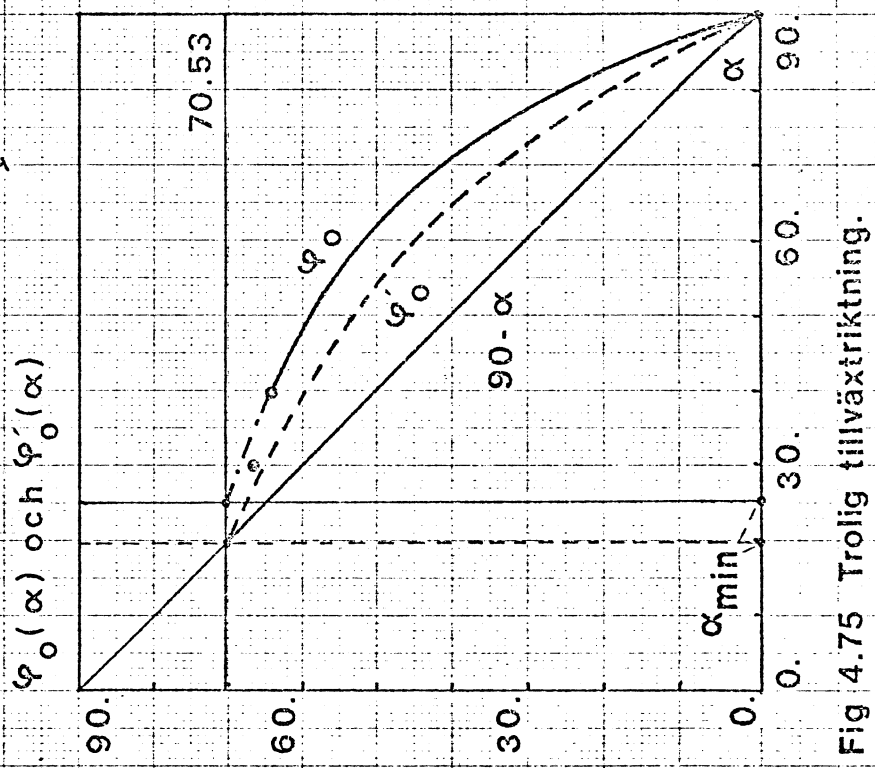


Fig 4.75 Trolig tillväxtriktning.

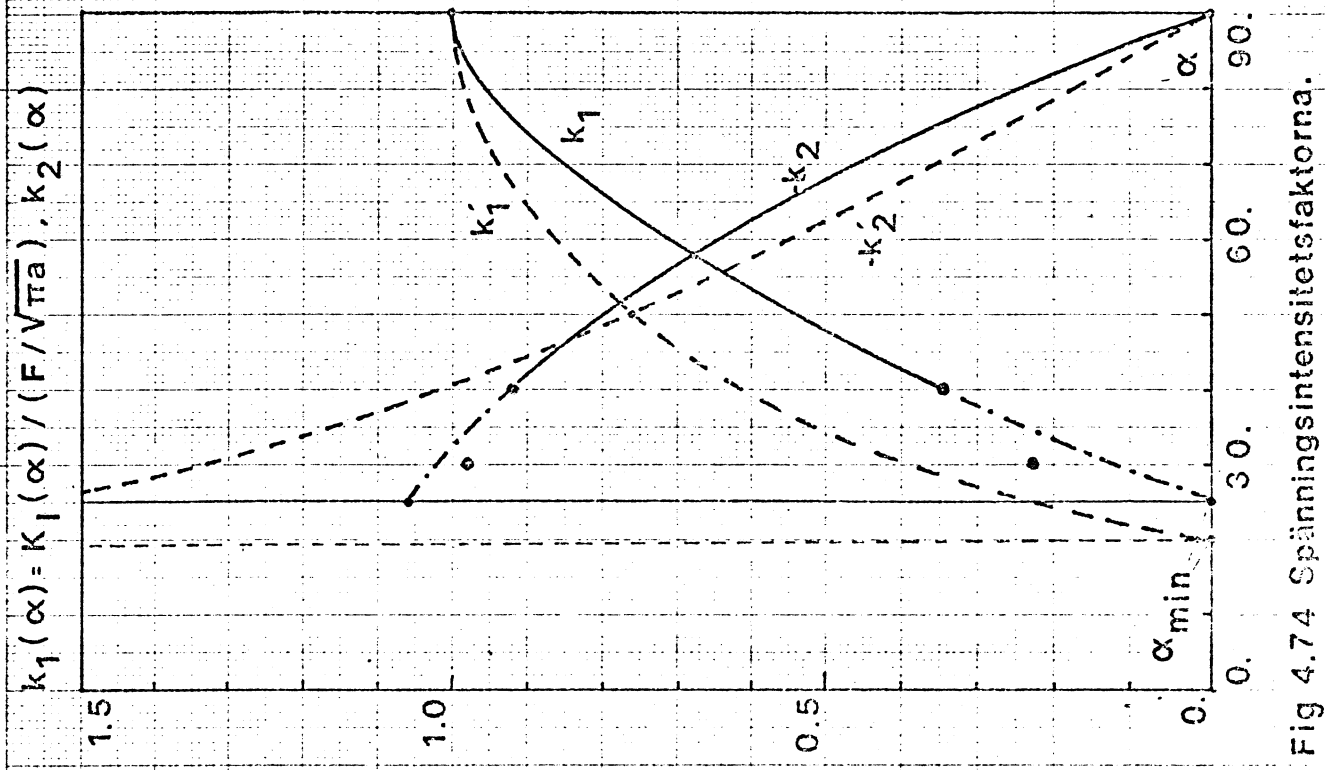


Fig 4.74 Spänningsintensitetsfaktorna.

5. Referenser

1. Muskhelishvili, N.I. — Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity.- Nordhoff, Groningen (1953), (1963).

2. Persson, A. — Plana tillstånd inom elastomekaniken.- CTH inst. för hållfasthetslära publ. nr 17, (1965).

3. Kutter, H.K. — The Interaction Between Stress Wave and Gas Pressure in the Fracture Process of an Underground Explosion in Rock, with Particular Application to presplitting.- PhD thesis Univ. Minn. (1967).

4. Kutter, H.K. — Stress Analysis of a Pressurized Circular Hole with Radial Cracks in an Infinite Elastic Plate.- Int. J. Fracture Mech., vol 6 s 233-247 (1970).

5. Darwin, C. — Some Conformal Transformations Involving Elliptic functions.- Phil. Mag., vol 41 s 1-11 (1950).

6. Andersson, H. — Stress Intensity Factors at the Tips of a Star-Shaped Contour in an Infinite Tensile Sheet.- J. Mech. Phys. Solids., vol 17 s 405-417 (1969).

7. Bowie, O.L. — Analysis of an Infinite Plate Containing Radial Cracks Originating at the Boundary of an Internal Cicular Hole.- J. Math. Physics, vol 35 s 60-71(1956).

8. Bowie, O.L. — Rectangular Tensile Sheet with Symmetric Edge Cracks.- J. Appl. Mech., vol 31 s 208-212 (1964).

9. Abramowitz, M., Stegun, I.A. — Handbook of Mathematical Functions.- Dover, N.Y. (1969).

10. Ryshik, I.M., Gradstein, I.S. — Tables of Series, Products and Integrals.- VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, DDR (1963).

11. Westmann, R.A. — Pressurized Star Crack.- J. Math. Physics, vol 43 s 191-198 (1964).

12. Williams, W.E. — A Star-Shaped Crack Deformed by an Arbitrary Internal Pressure.- Int. J. Engng. Sci., vol 9 s 705-712 (1971).

13. Ouchterlony, F. — Betydelsen av gasens fördelning i en plan spricka.- Rapport DS 1970:50.

14. Sih, G.C., Paris, P.C., Erdogan, F. — Crack-Tip, Stress-Intensity Factors for Plane Extension and Plate Bending Problems.- J. Appl. Mech., vol 29 s 306-312 (1962).

15. Sih, G.C., Liebowitz, H. — Mathematical Theories of Brittle Fracture.- Fracture: An Advanced Treatise, vol 2 Mathematical Fundamentals, ed H. Liebowitz s 68-192 - Academic Press N.Y. (1968).

16. Ouchterlony, F. — Spänningstillståndet kring en helt eller delvis gasfylld plan spricka som ligger längs en fri yta.- Rapport DS 1971:22.

17. Ouchterlony, F. — Om en slutningseffekt som uppträder för cirkelbågsprickan och sprickutbredningsriktningen vid pallsprängning.- Rapport DS 1972:7.

18. Rice, J.R. — Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture.- Fracture: An Advanced Treatise, vol 2 Mathematical Fundamentals, ed H. Liebowitz s 192-314 - Academic Press N.Y. (1968).

19. Ouchterlony, F. — Diskussion om sprickutbredning för en plan spricka i ett sprött material under inverkan av ett inre gastryck.- Rapport DS 1972:4.

20. Rooke, D.P., Sneddon, I.N. — The Crack Energy and the Stress Intensity Factor for a Cruciform Crack Deformed by Internal Pressure.- Int. J. Engng, Sci, vol 7 s 1079-1089 (1969).

21. Stallybrass, M.P. — A Pressurized Crack in the Form of a Cross.- Quart. J. Mech. Appl. Math., vol 23 s 35-48 (1970).

22. Emery, A.F., Walker, G.E., Williams, J.A. — A Green's Function for the Stress-Intensity Factors of Edge Cracks and It's Application to Thermal Stresses.- ASME, Journal of Basic Engineering, Trans ASME, Series D, vol 91 s 618-624 (1969).

23. Bueckner, H.F. — Weight Functions for the Notched Bar.- ZAMM, vol 51 s 97-109 (1971).

24. Persson, P.A., Lundborg, N., Johansson, C.H. — The Basic Mechanisms in Rock Blasting.- Proc. Sec. Congr. Int. Soc. Rock Mechanics, Subject 5 no 3, Beograd (1970)

25. Knauss, W.G., Palaniswamy, K. — Propagation of a Crack under General, In-Plane Tension.- Int. J. Frac. Mech. vol 8 s 114-117,(1972).

26. Andersson, H. — Erratum till /6/.- J. Mech. Phys. Solids. vol 18 s 437,(1970).