

SPÄNNINGSTILLSTÅNDET KRING EN HELT ELLER
DELVIS GASFYLLD PLAN SPRICKA SOM LIGGER
LÄNGS EN FRI YTA

Finn Ouchterlony.

DS 1971:22

25.5.1971

STIFTELSEN
SVENSK DETONIKFORSKNING
SWEDISH DETONIC RESEARCH FOUNDATION

VINTERVIKEN — 117 48 STOCKHOLM
SWEDEN

SPÄNNINGSTILLSTÅNDET KRING EN HELT ELLER
DELVIS GASFYLLD PLAN SPRICKA SOM LIGGER
LÄNGS EN FRI YTA

Finn Ouchterlony

DS 1971:22

25.5.1971

Sammanfattning

Rapporten innehåller en analys av hur spänningstillståndet kring en plan spricka påverkas av en fri yta som ligger parallellt med sprickan. Belastningen utgörs av ett konstant inre övertryck som helt eller delvis fyller ut sprickan. Eftersom huvudsyftet med arbetet är att ge underlag till en bedömning av hur den fria ytan inverkar på sprickbilden och sprickutbredningen vid pallsprängning med en utbredd laddning och därmed också öka förståelsen för sprängningsförloppet beräknas följande storheter: spänningsintensitetsfaktorer, riktningen för största tangentiell dragspänning i sprickspetsen, sprickbredden och gasvolymen beroende av försättning dvs avståndet till den fria ytan och gasens fyllnadsgrad dvs lastens utbredning. Resultaten presenteras i tabeller och figurer.

Det finns även möjlighet att på grundval av analysen och en enkel förändring av ett datorprogram som finns i rapporten beräkna spänningstillståndet kring en spricka i ett flerskiktat material. Detta bör vara av intresse t.ex. för studier av brott i olika typer av sprängfogade kompositmaterial.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1. Inledning
2. Teckenförklaring
3. Analys
 - 3.1 Fouriertransformering vid plana tillstånd
 - 3.2 Härledning av den grundläggande integralekvationen
 - 3.3 Transformering av integralekvationen till ett oändligt ekvationssystem genom serieansats
 - 3.4 Lösningens egenskaper
 - 3.5 Koefficientmatrisens element uttryckt i elliptiska integraler
 - 3.6 Uttryck för de sökta storheterna
 - 3.7 Gränsfallet när försättningen blir liten
4. Numerisk behandling
 - 4.1 Gauss-Laguerre kvadratur
 - 4.2 Noggrannheten i den numeriska integrationen
 - 4.3 Datorprogram för beräkning av storheter
 - 4.4 Utförda beräkningar
 - 4.5 Tabeller
 - 4.6 Figurer
5. Diskussion
 - 5.1 Diskussion av resultat
 - 5.2 Ytterligare användningsområden
6. Referenser
7. Appendix

I några tidigare rapporter har problemställningar rörande sprickor och sprickutbredning kring borrhål i berg behandlats /1-3/. Analysen grundar sig huvudsakligen på elasticitetsteori och den linjära brottmekaniken. Det visade sig bl.a. möjligt att beräkna spricklängdens variation med hålpåsprängning vid sprängning med en konstant sprängämnesmängd per meter /3/ och att direkt överföra detta på den maximala försättnings variation vid påsprängning med fri botten.

I den analysen försummas den fria ytans inverkan på spänningsstillståndet och sprickförplantningen i den bärkraften att en mycket flack utslagsvinkel förutsattes. Ett antal arbeten, t.ex. /4-5/ visar ändå att den fria ytan på ett avgörande sätt påverkar sprickutbredningen åtminstone i initialskedet. Traditionellt /6/ har den fria ytans inverkan som ovan kommit med i antagandet om en utslagsvinkel av en given storlek.

Huvudsyftet med detta arbete är så att ge ett underlag till en direkt bedömning av hur den fria ytan inverkar på sprickbildningen och sprickutbredningen vid påsprängning och rapporten innehåller en analys av spänningsstillståndet kring en plan spricka som ligger längs en fri yta. Belastningen utgörs av ett konstant tryck i sprickan som på grundval av tidigare resultat /3/ helt eller delvis tyller ut denna.

Analysen bygger på Fourierransformering av de elastiska grundekvationerna och av Airy's spänningsfunktion. Vidare utnyttjas en teknik där kontinuerliga dislokationer används för att uttrycka Greenfunktioner för spänningar på sprickans rand vilket resulterar i ett system singulara integral-ekvationer. Denna teknik används bl.a. av Erdogan och Gupta /7/. För att lösa detta system gör de en serieansats som bevarar lösningens singulara karaktär i sprickspetsarna. Singulariteterna är känd genom fysikaliska överläggningar och genom att ansatsen uttrycks i ett polynomsystem som är ortogonalt med avseende på den på sprickytan reduceras systemet av de singulara integral-ekvationerna till ett ekvationssystem i oändligt många obekanta. Förutom i /7/ redovisas denna teknik utförligt av Erdogan i /8/. Analysen bygger alltså till stor del på dessa artiklar.

Det visar sig under vissa förutsättningar möjligt att för analysen längre än Erdogan gjort och uttrycka koefficienterna i ekvationssystemet i form av integraler över ett oändligt intervall. Dessa integraler kan alternativt uttryckas med de fullständiga elliptiska integralerna av första och andra slaget.

För den numeriska beräkningen av integralerna används Gauss-Laguerres kvadraturformel och de "slutna uttrycken" används till att uppskatta felet. Termerna i serieansatsen blir snabbt försumbara utom när avståndet till den fria ytan är litet. Detta gränsfall studeras med balkteori.

2. Teckenförklaring

$\Phi(x, y)$	=	Airy's spänningsfunktion i rektangulära koordinater
σ_x, σ_y	=	normalspänningar
τ_{xy}	=	skjuvspänning
Δ	=	Laplaceoperatorn
$F\{f(x)\}$	=	Fourierintegralen av en funktion $f(x)$
$\tilde{f}(s)$	=	Fouriertransformen av samma funktion
$\tilde{f}_c, \tilde{f}_s$	=	Fouriercosinus- och Fouriersinustransformerna
$A_1 - A_4$	=	konstanter
$f, _x$	=	kommat uttrycker derivering i den variabel som utgör index
u_x, v_y	=	förskjutningar
E	=	elasticitetsmodul N/m^2
ν	=	Poisson's tal
$A-D$	=	konstanter
$\mathcal{E}$	=	$3-4\nu$ vid plant deformationstillstånd (P.D.)
p	=	gastryck N/m^2
a	=	halva spricklängden m
b	=	halva gasutbredningen m
h	=	försättningen el. avståndet till den fria ytan m
f_1, f_2	=	kontinuerliga dislokationsfördelningar
δ	=	Dirac's deltafunktion
index $\pm$	=	anger definitionsområde
$h_{11} - h_{22}$	=	influensfunktioner i spänningsuttryck
$k_{11} - k_{22}$	=	kärnfunktioner i integralekvationen
T_n, U_n	=	Tschebyscheff-polynom av n:te ordningen
A_n	=	koefficient i serieansats
H_n, G_n	=	funktioner som innehåller kärnfunktionerna
P_n	=	koefficient som beror av lasten
Q_{nj}, R_{nj}	=	koefficienter som beror av H_n, G_n
$F_{11} - F_{22}$	=	funktioner som ingår i kärnfunktionerna $k_{11} - k_{22}$
$J_n(s)$	=	Besselfunktion av första slaget och ordning n
$\{M\}$	=	koefficientmatris av oändlig storlek
M_{mj}	=	element i $\{M\}$, $m, j = 1, 2, \dots$
$\{E\}$	=	enhetsmatris
A	=	vektor av oändlig storlek vars element är $A_n, n = 1, 2, \dots$
IP	=	lastvektor vars element är P_n
$P_2(x)$	=	polynom av andra graden
D_n	=	koefficient som är besläktad med A_n
K_I, K_{II}	=	spänningsintensitetsfaktorer mod I och II $N/m^{3/2}$

φ_0	=	riktningen för största tangentiella dragspänning i sprickspetsen
$B(x)$	=	sprickbredd m
V	=	gasvolym m^3/m
γ	=	fyllnadsgrad el. relativ lastutbredning
$'$	=	anger normaliserade storheter
index ∞	=	anger referenstillståndet mycket stor försättning, $\frac{h}{a} \gg 1$
$M(x)$	=	momentfördelning Nm/m
U	=	elastisk energi Nm/m
I	=	yttröghetsmoment m^4/m
R	=	borrhålsradie m
W_i	=	term i numerisk kvadraturformel
Δ_{m_j}	=	relativfel vid numerisk beräkning av M_{m_j}
D.E.	=	förkortning av differentialekvation
P.D.	=	-"- plant deformationstillstånd
P.S.	=	-"- plant spänningstillstånd
R.V.	=	-"- randvillkor

3. Analys

3.1 Fouriertransformering vid plana tillstånd

Försök att lösa randvärdesproblem inom elastomekaniken resulterar vid plana fall och tredimensionella fall med rotationssymmetri ofta i integralekvationer /9/. Särskilt vid plana fall där det är naturligt att arbeta i rektangulära koordinater har Fouriertransformering kommit till användning. Många exempel på det finns i ett översiktsarbete av Sneddon och Lowengrub /10/. I det följande skall Fouriertransformeringen vid plana tillstånd presenteras närmare.

Airy's spänningsfunktion $\Phi(x,y)$ definieras så att de allmänna jämviktsekvationerna blir uppfyllda.

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (3.1)$$

För ett linjärt elastiskt material resulterar insättning i de allmänna kompatibilitetsekvationerna i den biharmoniska differentialekvationen (D.E.)

$$\Delta \Delta \Phi = 0 \quad (3.2)$$

Fouriertransformering, se appendix I, av denna i x-variabeln ger

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta \Delta \Phi e^{-isx} dx = \left(\frac{d^2}{dy^2} - s^2 \right)^2 \tilde{\Phi}(y,s) = 0 \quad (3.3)$$

Den allmänna lösningen till den linjära D.E. med konstanta koefficienter i Airy's transformerade spänningsfunktion $\tilde{\Phi}(y,s)$ är

$$\tilde{\Phi}(y,s) = (A_1(s) + A_2(s)y)e^{-sy} + (A_3(s) + A_4(s)y)e^{sy} \quad (3.4)$$

Konstanterna A_1 - A_4 bestäms av randvillkoren (R.V.). För att erhålls dessa transformeras uttrycken för spänningarna

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_y(y,s) = -s^2 \tilde{\Phi}(y,s) \\ \tilde{\sigma}_x(y,s) = \tilde{\Phi}_{,yy} \\ \tilde{\tau}_{xy}(y,s) = -is \tilde{\Phi}_{,y} \end{cases} \quad (3.5)$$

Inverstransformering ger spänningarna uttryckt i $\tilde{\Phi}$

$$\begin{cases} \sigma_y(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \tilde{\Phi}(y,s) e^{isx} ds \\ \sigma_x(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_{,yy} e^{isx} ds \\ \tau_{xy}(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} is \tilde{\Phi}_{,y} e^{isx} ds \end{cases} \quad (3.6)$$

Hooke's lag ger förskjutningarna för plant deformationstillstånd (P.D.)

$$\begin{cases} E u_x(x,y) = \frac{1+\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(1-\nu) \tilde{\Phi}_{,yy} + \nu s^2 \tilde{\Phi}] \frac{e^{isx}}{sx} ds \\ E v_y(x,y) = \frac{1+\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(1-\nu) \tilde{\Phi}_{,yyy} + (\nu-2)s^2 \tilde{\Phi}_{,y}] \frac{e^{isx}}{s^2} ds \end{cases} \quad (3.7)$$

För en geometri med belastning som är symmetrisk kring y-axeln måste $\tilde{\Phi}(x,y)$ vara en jämn funktion i x varför

$$\tilde{\Phi}(y,s) = 2\tilde{\Phi}_c(y,s) \quad (3.8)$$

Spänningar och förskjutningar kan då uttryckas i Fourier-cosinustransformen $\tilde{\Phi}_c$.

$$\begin{cases} \sigma_y(x,y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s^2 \tilde{\Phi}_c \cos sxdx \\ \sigma_x(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}_{c,yy} \cos sxdx \\ \tau_{xy}(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s \tilde{\Phi}_{c,y} \sin sxdx \\ E u_x(x,y) = \frac{2(1+\nu)}{\pi} \int_0^{\infty} [(1-\nu) \tilde{\Phi}_{c,yy} + \nu s^2 \tilde{\Phi}_c] \frac{\sin sx}{s} ds \\ E v_y(x,y) = \frac{2(1+\nu)}{\pi} \int_0^{\infty} [(1-\nu) \tilde{\Phi}_{c,yyy} + (2-\nu) s^2 \tilde{\Phi}_{c,y}] \frac{\cos sx}{s^2} ds \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} E u_x(x,y) = \frac{2(1+\nu)}{\pi} \int_0^{\infty} [(1-\nu) \tilde{\Phi}_{c,yy} + \nu s^2 \tilde{\Phi}_c] \frac{\sin sx}{s} ds \\ E v_y(x,y) = \frac{2(1+\nu)}{\pi} \int_0^{\infty} [(1-\nu) \tilde{\Phi}_{c,yyy} + (2-\nu) s^2 \tilde{\Phi}_{c,y}] \frac{\cos sx}{s^2} ds \end{cases} \quad (3.10)$$

Integranden i första integralen i (3.10) har samma form som (3.4)

varför man som Erdogan och Gupta /7/ lika gärna kan ta följande uttryck som utgångspunkt för insättning i R.V.

$$u_x(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(A+By)e^{-sy} + (C+Dy)e^{sy}] \sin s x ds \quad (3.11)$$

Övriga uttryck för spänningar och förskjutningar erhålles som

$$v_y(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ [(A+By) + \frac{\nu}{s} B] e^{-sy} - [(C+Dy) - \frac{\nu}{s} D] e^{sy} \right\} \cos s x ds \quad (3.12)$$

och

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1+\nu}{E} \sigma_y(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [s(A+By) + 2(1-\nu)B] e^{-sy} - [s(C+Dy) - 2(1-\nu)D] e^{sy} \cos s x ds \\ \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [s(A+By) + (1-2\nu)B] e^{-sy} + [s(C+Dy) - (1-2\nu)D] e^{sy} \sin s x ds \end{aligned} \right. \quad (3.13)$$

Uttrycken (3.4), (3.8)-(3.10) eller (3.11)-(3.13) räcker för att uttrycka R.V. Sambanden mellan konstanterna A_1 - A_4 och A-D ges av

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1+\nu}{2E} [s A_1 - 2(1-\nu) A_2] \\ B &= \frac{1+\nu}{2E} s A_2 \\ C &= \frac{1+\nu}{2E} [s A_3 + 2(1-\nu) A_4] \\ D &= \frac{1+\nu}{2E} s A_4 \end{aligned} \right. \quad (3.14)$$

I avsnitt 3.2 utnyttjas dessa samband till att ställa upp en integral-ekvation för den aktuella geometrin såsom Erdogan och Gupta /7/ gjort.

3.2 Härledning av den grundläggande integralekvationen

Den geometri som skall studeras framgår av fig. 1. Det är en helt eller delvis gasfylld plan spricka som ligger vid en fri yta i ett linjärt elastiskt material.

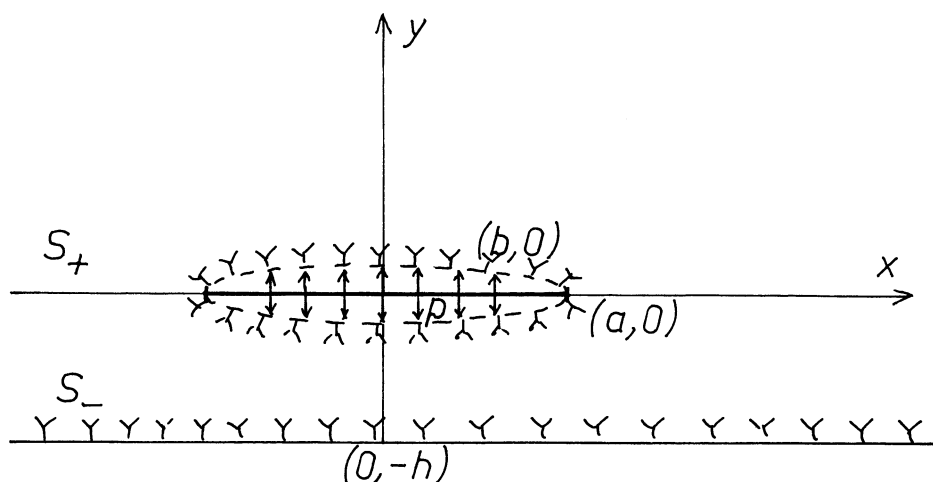


Fig. 1.

Geometrin delas upp i två skikt S_+ och S_- definierade av

$$\begin{cases} S_+ : y \in [0, \infty) \times (-\infty, \infty) \\ S_- : y \in [-h, 0] \times (-\infty, \infty) \end{cases} \quad (3.15)$$

Uttrycken för spänningar och deformationer (3.11)–(3.13)

innehåller då 8 okända konstanter, 4 för varje skikt. De R.V. som dessa skall tillfredsställa är

$$\begin{cases} 1.2 \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \sigma_y^+, \tau_{xy}^+ = 0 \\ 3. \quad \sigma_y^+(x, 0) = \sigma_y^-(x, 0) \\ 4. \quad \tau_{xy}^+(x, 0) = \tau_{xy}^-(x, 0) \\ 5.6 \quad \sigma_y^-(x, -h) = \tau_{xy}^-(x, -h) = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

alltså dels att spänningarna skall vara begränsade när $|y| \rightarrow \infty$, dels jämvikt i gränsytan mellan de två skikten $y = 0$ och slutligen att den fria ytan $y = -h$ skall vara obelastad.

För att erhålla de två ytterligare R.V. som krävs införs kontinuerliga symmetriska dislokationsfördelningar $f_2(t)$ och $f_1(t)$ belägna vid $x = \pm t$ i gränsytan $y = 0$ mellan sikten. Gränsytan förutsätts i övrigt vara hel, se fig. 2.

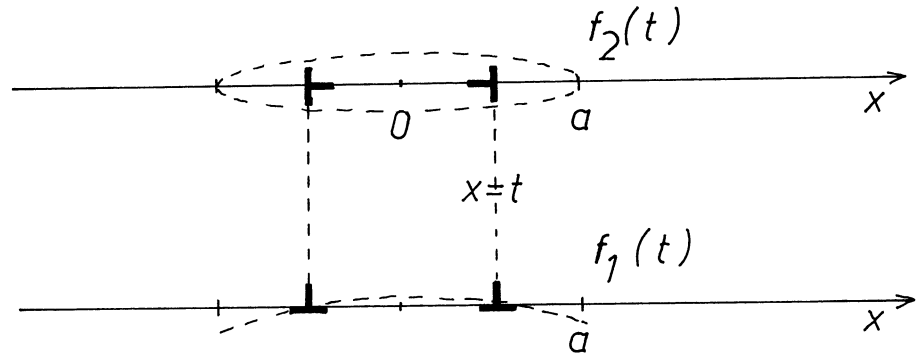


Fig. 2.

Med Dirac's deltafunktion $\delta(x-t)$ definieras dislokationsfördelningarna på x-axeln

$$\begin{cases} 7. \frac{\partial}{\partial x} [u_x^+ - u_x^-] = f_1(t) \delta(x-t), |x| \leq a \\ 8. \frac{\partial}{\partial x} [v_y^- - v_y^+] = f_2(t) \delta(x-t), |x| \leq a \end{cases} \quad (3.17)$$

På resten av x-axeln gäller som ovan sagts

$$\begin{cases} 7. \frac{\partial}{\partial x} [u_x^+ - u_x^-] = 0, |x| > a \\ 8. \frac{\partial}{\partial x} [v_y^+ - v_y^-] = 0, |x| > a \end{cases} \quad (3.18)$$

Med (3.17) och (3.18) är de två sökta R.V. uttryckta i dislokationsfördelningarna f_1 och f_2 vilket utgör en alternativ beskrivning av den last som påverkar kroppen. f_1 och f_2 har följande egenskaper

$$\begin{cases} f_1(-t) = f_1(t) \\ f_2(-t) = -f_2(t) \end{cases} \quad (3.19)$$

och

$$\begin{cases} u_x^+ - u_x^- = \int_{-a}^a f_1(x) dx = 0, |x| > a \\ v_y^+ - v_y^- = \int_{-a}^a f_2(x) dx = 0, |x| > a \end{cases} \quad (3.20)$$

Med beteckningar ur (3.11)

$$u_x^+(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(A_+ + B_+ y) e^{-sy} + (C_+ + D_+ y) e^{sy}] \sin s x ds \quad (3.21)$$

ger R.V. 1 och 2

$$C_+ = D_+ = 0 \quad (3.22)$$

Fouriertransformering av (3.13) ger med R.V. 3-6

$$\begin{cases} -[s(A_- - B_- h) + \frac{\chi+1}{2} B_-] e^{sh} + [-s(C_- - D_- h) + \frac{\chi+1}{2} D_-] e^{-sh} = 0 \\ -[s(A_- - B_- h) + \frac{\chi-1}{2} B_-] e^{sh} + [s(C_- - D_- h) - \frac{\chi-1}{2} D_-] e^{-sh} = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

och

$$\begin{cases} -[sA_- + \frac{\chi+1}{2} B_-] + [-sC_- + \frac{\chi+1}{2} D_-] = -[sA_+ + \frac{\chi+1}{2} B_+] \\ -[sA_- + \frac{\chi-1}{2} B_-] + [sC_- - \frac{\chi-1}{2} D_-] = -[sA_+ + \frac{\chi-1}{2} B_+] \end{cases} \quad (3.24)$$

Derivering av (3.11) och (3.12) samt Fouriertransformering ger med R.V. 7 och 8

$$\begin{cases} s(A_+ - A_- - C_-) = f_1 \cos st \\ s(A_+ - A_- - C_-) + \chi(B_+ - B_- - D_-) = -f_2 \sin st \end{cases} \quad (3.25)$$

Uttrycken (3.23)-(3.25) ger konstanternas värden men de enda som behövs för att uttrycka spänningarna på gränssytan är A_+ och B_+ ty

$$\begin{cases} \frac{1+\nu}{E} \tilde{\sigma}_{yc}^+(y, s) = (sA_+ + \frac{\chi+1}{2} B_+) e^{-sy} \\ \frac{1+\nu}{E} \tilde{\tau}_{xyc}^+(y, s) = (sA_+ + \frac{\chi-1}{2} B_+) e^{-sy} \end{cases} \quad (3.26)$$

Räkningar där övriga konstanter elimineras och den oberoende variabeln t införs ger

$$\begin{cases} \frac{1+\nu}{E} \tilde{\sigma}_{yc}^+(y, s, t) = \tilde{h}_{11}(s|t) e^{-sy} f_1(t) + \tilde{h}_{12}(s|t) e^{-sy} f_2(t) \\ \frac{1+\nu}{E} \tilde{\tau}_{xyc}^+(y, s, t) = \tilde{h}_{21}(s|t) e^{-sy} f_1(t) + \tilde{h}_{22}(s|t) e^{-sy} f_2(t) \end{cases} \quad (3.27)$$

där

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{h}_{11}(s_1 t) = -2s_1^2 h^2 e^{-2sh} \cos st \\ \tilde{h}_{12}(s_1 t) = [(2s_1^2 h^2 + 2sh + 1)e^{-2sh} - 1] \sin st \\ \tilde{h}_{21}(s_1 t) = [(2s_1^2 h^2 - 2sh + 1)e^{-2sh} - 1] \cos st \\ \tilde{h}_{22}(s_1 t) = 2s_1^2 h^2 e^{-2sh} \sin st \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Inverstransformering ger liknande uttryck

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+\nu}{E} \sigma_y^+(x, y, t) = h_{11}(x_1 y_1 t) f_1(t) + h_{12}(x, y, t) f_2(t) \\ \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}^+(x, y, t) = h_{21}(x, y, t) f_1(t) + h_{22}(x, y, t) f_2(t) \end{array} \right. \quad (3.29)$$

som kan användas som Greenfunktioner för att uttrycka spänningarna i materialet.

Utnyttjas detta erhålles med tryckfördelningen $p(x)$ på sprickranden.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{4(1-\nu^2)}{E} p(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_2(t) dt}{t-x} + \int_{-a}^a [k_{11}(x_1 t) f_1(t) + k_{12}(x_1 t) f_2(t)] dt \\ 0 = \frac{1}{\pi} \int_a^a \frac{f_1(t) dt}{t-x} + \int_a^a [k_{21}(x_1 t) f_1(t) + k_{22}(x_1 t) f_2(t)] dt \end{array} \right. \quad (3.30)$$

ett system kopplade singulära integralekvationer i dislokationsfördelningen f_1 och f_2 , se appendix 2. För tryckfördelningen $p(x)$ gäller enligt förutsättningarna

$$p(x) = \begin{cases} p & |x| \leq b, \quad 0 < b \leq a \\ 0 & |x| > b \end{cases} \quad (3.31)$$

och kärnfunktionerna ges av

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{11}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 4s^2 h^2 e^{-2sh} \cos s(t-x) ds \\ k_{12}(x,t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [1 + (1+2sh)^2] e^{-2sh} \sin s(t-x) ds \\ k_{21}(x,t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [1 + (1-2sh)^2] e^{-2sh} \sin s(t-x) ds \\ k_{22}(x,t) = -k_{11}(x,t) \end{array} \right. \quad (3.32)$$

För att underlätta den fortsatta analysen görs ett variabelbyte enligt (3.33), längddimensionen görs dimensionslös med spricklängden

$$\left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow at', \quad x \rightarrow ax' \\ s \rightarrow \frac{s'}{a} \\ h \rightarrow ah' \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Införs detta i (3.30) och (3.32) kommer om primbeteckningen slopas endast integrationsgränserna att ändras i (3.30) och kärnfunktionerna oförändrat kunna skrivas som i (3.32)

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{4(1-\nu^2)}{E} p(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_2(t) dt}{t-x} + \int_{-1}^1 [k_{11}(x,t) f_1(t) + k_{12}(x,t) f_2(t)] dt \\ 0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_1(t) dt}{t-x} + \int_{-1}^1 [k_{21}(x,t) f_1(t) + k_{22}(x,t) f_2(t)] dt \end{array} \right. \quad (3.34)$$

där

$$p(x) = \begin{cases} p & |x| \leq \frac{b}{a}, \quad 0 < \frac{b}{a} \leq 1 \\ 0 & |x| > \frac{b}{a} \end{cases} \quad (3.35)$$

I avsnitt 3.3 skall (3.34) lösas med den metod som Erdogan /8/ samt Erdogan och Gupta /7/ utnyttjat.

3.3 Transformering av integralekvationen till ett ändligt ekvationssystem genom serieansats.

Genom variabelbytet i avsnitt 3.3 ligger sprickspetsarna nu i $x = \pm 1$. Singulariteten i f_1 och f_2 är av typen $(1-t^2)^{-1/2}$ vilket är viktsfunktionen på $(-1,1)$ för Tschebyscheffpolynomen av första slaget $T_n(t)$. Den inverterade singulariteten $(1-t^2)^{1/2}$ är viktsfunktion på samma interval för Tschebyscheffpolynomen av andra slaget $U_n(t)$. Båda polynomsystemen är fullständiga på intervallet. Se vidare appendix 3.

Mot bakgrund av dislokationsfördelningarnas symmetriegenskaper och (3.20) görs en ansats som bevarar singularitetens karaktär.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E}{4(1-\nu^2)} f_1(t) = - \frac{p}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} T_{2n}(t) \\ \frac{E}{4(1-\nu^2)} f_2(t) = - \frac{p}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} T_{2n-1}(t) \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Utnyttjas sambandet (A17) inses att

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_1(t) dt}{t-x} = - \frac{4(1-\nu^2)p}{E} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j} U_{2j-1}(x) \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_2(t) dt}{t-x} = - \frac{4(1-\nu^2)p}{E} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j-1} U_{2j-2}(x) \end{array} \right. \quad (3.37)$$

Liksom ovan kan övriga termer i (3.34) skrivas på serieform

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x)/p = \sum_{j=1}^{\infty} [A_j H_j(x) + A_{2j-1} U_{2j-2}(x)] \\ 0 = \sum_{j=1}^{\infty} [A_j G_j(x) + A_{2j} U_{2j-1}(x)] \end{array} \right. \quad (3.38)$$

Funktionerna $H_j(x)$ och $G_j(x)$ definieras av

$$\left\{ \begin{aligned} H_j(x) &= \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{l} k_{11}(x,t) \\ k_{12}(x,t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{jämna } j \\ \text{udda } j \end{array} \right\} T_j(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ G_j(x) &= \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{l} k_{21}(x,t) \\ k_{22}(x,t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{jämna } j \\ \text{udda } j \end{array} \right\} T_j(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \right. \quad (3.39)$$

Om alla led i (3.38) multipliceras med $(1-x^2)^{1/2}$ och integreras över $[-1,1]$ erhålles med utnyttjande av ortogonaltetssambandet (A16)

$$\left\{ \begin{aligned} P_n &= \left\{ \begin{array}{l} A_{n+1} \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{jämna } n \\ \text{udda } n \end{array} + \sum_{j=1}^{\infty} Q_{nj} A_j \\ 0 &= \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ A_{n+1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{jämna } n \\ \text{udda } n \end{array} + \sum_{j=1}^{\infty} R_{nj} A_j, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \right. \quad (3.40)$$

där P_n , Q_{nj} och R_{nj} definieras av

$$\left\{ \begin{aligned} P_n &= \frac{2}{\pi p} \int_{-1}^1 p(x) U_n(x) \sqrt{1-x^2} dx \\ \left\{ \begin{array}{l} Q_{nj} \\ R_{nj} \end{array} \right\} &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{l} H_j(x) \\ G_j(x) \end{array} \right\} U_n(x) \sqrt{1-x^2} dx, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \right. \quad (3.41)$$

(3.40) utgörs av två oändliga ekvationssystem vars lösning ger koefficienterna A_j .

De integraler som definierar $H_j(x)$ och $G_j(x)$ uppfyller villkoren för att integrationsordningen skall få bytas, se appendix 4. Med de trigonometriska additionssatserna och symmetriegenskaperna för $T_n(t)$ erhålles med beteckningarna

$$\left\{ \begin{aligned} F_{11}(2sh) &= (2sh)^2 \\ F_{12}(2sh) &= -[1 + (1+2sh)^2] \\ F_{21}(2sh) &= -[1 + (1-2sh)^2] \\ F_{22}(2sh) &= -(2sh)^2 \end{aligned} \right. \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} H_{2j-1}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_{12} e^{-2sh} \cos sx ds \int_{-1}^1 T_{2j-1}(t) \frac{\sin st}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ H_{2j}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_{11} e^{-2sh} \cos sx ds \int_{-1}^1 T_{2j}(t) \frac{\cos st}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.43)$$

De två integralerna över $[-1, 1]$ kan uttryckas med Besselfunktioner, se appendix 5.

$$\begin{cases} H_{2j-1}(x) = \frac{(-1)^{j-1}}{2} \int_0^{\infty} F_{12}(2sh) e^{-2sh} J_{2j-1}(s) \cos sx ds \\ H_{2j}(x) = \frac{(-1)^j}{2} \int_0^{\infty} F_{11}(2sh) e^{-2sh} J_{2j}(s) \cos sx ds, \quad j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.44)$$

För $G_j(x)$ erhålles på liknande sätt

$$\begin{cases} G_{2j-1}(x) = \frac{(-1)^{j-1}}{2} \int_0^{\infty} F_{22}(2sh) e^{-2sh} J_{2j-1}(s) \sin sx ds \\ G_{2j}(x) = \frac{(-1)^j}{2} \int_0^{\infty} F_{21}(2sh) e^{-2sh} J_{2j}(s) \sin sx ds, \quad j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.45)$$

Liksom för $H_j(x)$ och $G_j(x)$ är villkoren för att integrationsordningen i uttrycken för Q_{nj} och R_{nj} skall få bytas uppfyllad med (3.44) och (3.45). Integralerna över $[-1, 1]$ får formen

$$\begin{cases} Q_{nj} \sim \int_{-1}^1 U_n(x) \cos sx \sqrt{1-x^2} dx \\ R_{nj} \sim \int_{-1}^1 U_n(x) \sin sx \sqrt{1-x^2} dx \end{cases} \quad (3.46)$$

och även de kan uttryckas med Besselfunktioner, se appendix 5.

Ur (3.46) inses att $Q_{nj} = 0$ för udda n och att $R_{nj} = 0$ för jämna n , (3.40) blir härigenom ett oändligt ekvationssystem i koefficienterna A_j där varannan ekvation bestäms av övre raden i (3.40) och varannan av undre raden. Uttrycken för Q_{nj} och R_{nj} blir

$$\begin{cases} Q_{2n,j} \sim (-1)^n 2(2n+1)s^{-1} J_{2n+1}(s) \\ R_{2n+1,j} \sim (-1)^n 2(2n+2)s^{-1} J_{2n+2}(s) \\ Q_{2n+1,i} = R_{2n,i} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (3.47)$$

I strävan att uttrycka (3.40) på matrisform noteras att index j svarar mot kotumnummer och att index n efter lämplig transformering kan fås att svara mot radnummer.

$$n \rightarrow \frac{m-1}{2} \quad (3.48)$$

Q_{nj} och R_{nj} får definiera en koefficientmatris $\{M\}$ med elementen M_{mj} enligt

$$M_{mj} = \begin{cases} Q_{m-1,j} & \text{udda } m \\ R_{m-1,j} & \text{jämna } m, \quad m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

De fullständiga uttrycken för Q_{nj} och R_{nj} blir

$$\begin{cases} Q_{2n,j} = (-1)^{n+\text{int}(\frac{j}{2})} (2n+1) \int_0^\infty \left\{ \begin{matrix} F_{12}(2sh) & \text{udda } j \\ F_{11}(2sh) & \text{jämna } j \end{matrix} \right\} e^{-2sh} J_{2n+1}(s) J_j(s) \frac{ds}{s} \\ R_{2n+1,j} = (-1)^{n+\text{int}(\frac{j}{2})} (2n+2) \int_0^\infty \left\{ \begin{matrix} F_{22}(2sh) & \text{udda } j \\ -F_{21}(2sh) & \text{jämna } j \end{matrix} \right\} e^{-2sh} J_{2n+2}(s) J_j(s) \frac{ds}{s} \end{cases} \quad (3.49)$$

Varför M_{mj} kan skrivas

$$\begin{cases} M_{mj} = (-1)^{\text{int}(\frac{m-1}{2}) + \text{int}(\frac{j}{2})} \int_0^\infty \left\{ \begin{matrix} F_{12} & \text{udda } m & \text{udda } j \\ F_{11} & \text{"-"} & \text{jämn } j \\ F_{22} & \text{jämn } m & \text{udda } j \\ -F_{21} & \text{"-"} & \text{jämn } j \end{matrix} \right\} e^{-2sh} J_m(s) J_j(s) \frac{ds}{s} \\ m, j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.50)$$

Den första termen i H.L. i (3.40) som svarade mot den singulära delen i integralekvationen kommer också att definiera en koefficientmatris. Med valda index m och j blir dess element = 1 längs diagonalen och = 0 i övrigt, det är alltså enhetsmatrisen $\{E\}$.

Elementen P_n definierar en lastvektor $\{P\}$, enl. (3.41) då $p(x)$ är en jämn funktion blir $P_n = 0$ för udda n .

$$P_m = \frac{2}{\pi p} \int_{-1}^1 p(x) U_{m-1}(x) \sqrt{1-x^2} dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.51)$$

Koefficienterna A_j i serieansatsen (3.36) får definiera den sökta vektorn $\mathbf{A}$ där

$$\mathbf{A}^* = (A_1, A_2, \dots) \quad (3.52)$$

Hela ekvationssystemet (3.40) skrivs så på kompaktast möjliga form

$$[\{\mathbf{M}\} + \{\mathbf{E}\}]\mathbf{A} = \mathbf{P} \quad (3.53)$$

I och med (3.53) är $\mathbf{A}$, dvs koefficienterna A_n i (3.36) i princip kända och därmed dislokationsfördelningarnas utseende. Spänningar och förskjutningar är då i princip också kända överallt med (3.29) och uttrycken i avsnitt 3.1. För att beräkna spänningsintensitetsfaktorer sprickbredd, sprickvolym och riktningen för största tangentiell normalspänning i sprickspetsarna räcker det dock att känna $\mathbf{A}$. Först skall lösningens $\mathbf{A}$ egenskaper studeras.

3.4 Lösningens egenskaper

Av (3.42) och (3.50)–(3.52) framgår att i det oändliga ekvations-systemet (3.53) beroendet av försättningen h enbart kommer in i $\{M\}$ och att beroendet av lastens utbredning enbart kommer in i $\{P\}$. Varje element M_{mj} i $\{M\}$ kan med (3.50) betraktas som en funktion av h . Integralerna i (3.50) konvergerar likformigt för alla m och j när $h \rightarrow \infty$, vilket inses med Besselfunktionernas egenskaper, se appendix 6. Dessutom är $\{M\}$ symmetrisk kring diagonalen i den meningen att

$$\left| \frac{1}{m} M_{mj} \right| = \left| \frac{1}{j} M_{jm} \right| \quad (3.54)$$

Det inses med schemat ovan och (3.42). (3.50) kan också skrivas

$$|M_{mj}| = m \int_0^\infty P_2(2sh) e^{-2sh} J_m(s) J_j(s) \frac{ds}{s} \quad (3.55)$$

där $P_2(2sh)$ är ett polynom i $2sh$ av andra graden. Då integralen är likformigt konvergent och

$$\lim_{h \rightarrow \infty} e^{-2sh} P_2(sh) = 0 \quad (3.56)$$

inses att

$$\lim_{h \rightarrow \infty} |M_{mj}| = 0 \quad (3.57)$$

Elementen i $\{M\}$ blir således allt mindre för ökande försättning h och (3.53) ger

$$\lim_{h \rightarrow \infty} A = P \quad (3.58)$$

Med Besselfunktionen $J_m(s)$ på asymptotisk form för stora m följer också, se appendix 6

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |M_{mj}| = 0 \quad (3.59)$$

och då gäller också med (3.54)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |M_{mj}| = 0 \quad (3.60)$$

Av (3.59) och (3.60) följer vidare

$$\lim_m A_m = P_m \quad (3.61)$$

Då kan man genom att välja m tillräckligt stort få A_m att med godtycklig noggrannhet överensstämma med P_m och det faller sig naturligt att definiera koefficienterna D_m

$$D_m = A_m - P_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.62)$$

vilka har egenskapen att de $\rightarrow 0$ när h , m eller j blir stora.

3.5 Koefficientmatrisens element uttryckt i elliptiska integraler

Alla element M_{mj} i koefficientmatrisen $\{M\}$ kan troligen uttryckas i elliptiska integraler, se appendix 7, där uttrycken blir allt mer komplicerade för växande m och j . Här presenteras bara uttryck för M_{11} , M_{12} , M_{21} och M_{22} , i appendix 7 några formler som kan användas för ytterligare räkningar.

Uttrycken för M_{mj} löd

$$M_{mj} = (-1)^{\text{int}(\frac{m-1}{2}) + \text{int}(\frac{j-1}{2})} \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{cc} F_{12} & \begin{matrix} n & j \\ \text{udda} & \text{udda} \end{matrix} \\ F_{11} & \begin{matrix} \text{udda} & \text{jämn} \end{matrix} \\ F_{22} & \begin{matrix} \text{jämn} & \text{udda} \end{matrix} \\ -F_{21} & \begin{matrix} \text{jämn} & \text{jämn} \end{matrix} \end{array} \right\} e^{-2sh} J_m(s) J_j(s) ds \quad (3.50)$$

$m, j = 1, 2, \dots$

där funktionerna F gavs av

$$\begin{cases} F_{11} = -F_{22} = (2sh)^2 \\ F_{12}, F_{21} = -[1 + (1 \pm 2sh)^2] \end{cases} \quad (3.42)$$

Med beteckningar enl. appendix 7

$$\begin{cases} S_{nk} = \int_0^\infty e^{-2sh} J_n(s) J_k(s) ds \\ m = \frac{1}{h^2 + 1} \end{cases} \quad (3.63)$$

ger (3.50) och (3.42) uttrycket för M_{11}

$$M_{11} = - \int_0^\infty [2 + 4sh + 4s^2 h^2] e^{-2sh} J_1^2(s) \frac{ds}{s} \quad (3.64)$$

som kan skrivas

$$M_{11} = -1 + 2hS_{00} - 2hS_{11} - 4h^3 m^2 \frac{dS_{11}}{dm} \quad (3.65)$$

eller uttryckt i elliptiska integraler

$$M_{11} + 1 = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-m} E(m) \quad (3.66)$$

Liksom för M_{11} erhålles för M_{12}

$$M_{12} = -4h^2 \int_0^{\infty} s e^{-2hs} J_1(s) J_2(s) ds \quad (3.67)$$

som med appendix 7 kan skrivas

$$M_{12} = 2h^2 \frac{dS_{12}}{dh} = -2h^2 \frac{d}{dh} (hS_{00} + 2hS_{11}) \quad (3.68)$$

eller uttryckt i elliptiska integraler

$$M_{12} = -\frac{2(1-m)}{\pi\sqrt{m}} \left[\left(\frac{8}{m} - 5\right)K(m) - \left(\frac{8}{m} - 1\right)E(m) \right] \quad (3.69)$$

Vidare gäller med (3.54)

$$M_{21} = -2 M_{12} \quad (3.70)$$

Slutligen för M_{22}

$$M_{22} = -2 \int_0^{\infty} [2 - 4sh + 4s^2 h^2] e^{-2sh} J_2^2(s) \frac{ds}{s} \quad (3.71)$$

som med appendix 7 kan skrivas

$$M_{22} = -1 + hS_{00} + 2h \frac{dS_{00}}{dh} + 2(1+8h^2)S_{11} + 5hS_{22} \quad (3.72)$$

eller uttryckt i elliptiska integraler

$$M_{22+1} = \frac{2\sqrt{1-m}}{\pi} \left[\left(20 - \frac{212}{3m} + \frac{176}{3m^2}\right)K(m) - \left(2 - \frac{124}{3m} + \frac{176}{3m^2}\right)E(m) \right] \quad (3.73)$$

I detta avsnitt har den dimensionslösa försättningen enl. (3.33) använts, den skrivs i fortsättningen $\frac{h}{a}$.

3.6 Uttryck för de sökta storheterna

Sambanden mellan spänningsintensitetsfaktorerna K_I , K_{II} och dislokationsfördelningarna f_1 , f_2 ges av, se appendix 8

$$\begin{cases} K_I = - \frac{4(1-\nu^2)}{E} \sqrt{\pi a} \lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{1-t^2} f_2(t) \\ K_{II} = - \frac{4(1-\nu^2)}{E} \sqrt{\pi a} \lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{1-t^2} f_1(t) \end{cases} \quad (3.74)$$

(3.36) ger eftersom $T_n(1) = 1$

$$\begin{cases} K_I = p \sqrt{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \\ K_{II} = p \sqrt{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \end{cases} \quad (3.75)$$

Den riktning i vilken den tangentiella dragspänningen är störst ges av, se appendix 8, φ_0 räknas moturs.

$$\varphi_0 = -2 \operatorname{atan} \frac{\sqrt{K_{II}^2 + 8K_I^2} - K_I}{4K_{II}} \quad (3.76)$$

Sprickbredden $B(x)$ erhålles ur definitionen på f_2

$$B(x) = v_y^+ - v_y^- = \int_{-a}^x \frac{\partial}{\partial x} [v_y^+ - v_y^-] dx = \int_{-a}^x f_2(t) dt \quad (3.77)$$

med det dimensionslösa uttrycket för f_2 i (3.36) erhålles

$$B(x') = - \frac{4(1-\nu^2)}{E} p a \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \int_{-1}^{x'} T_{2n-1}(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (3.78)$$

Integralen kan lätt lösas med substitutionen $t = \cos u$, då fås

$$B(x') = \frac{4(1-\nu^2)}{E} p a \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \frac{\sin(2n-1) \arccos x'}{2n-1} \quad (3.79)$$

Gasvolymen V fås ur

$$V = \int_{-b}^b B(x) dx = a \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{b}{a}} B(x') dx' \quad (3.80)$$

där insättning av (3.79) medför

$$V = \frac{4(1-\nu^2)}{E} pa^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{2n-1}}{2n-1} \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{b}{a}} \sin(2n-1) \arccos x' dx' \quad (3.81)$$

En jämförelse med (3.51) och (A14) ger

$$V = \frac{2\pi(1-\nu^2)}{E} pa^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{2n-1} A_{2n-1}}{2n-1} \quad (3.82)$$

För den helt gasfyllda sprickan gäller att $P_1 = 1$ och övriga $P_n = 0$ varför volymen får den enkla formen

$$V = \frac{2\pi(1-\nu^2)}{E} pa^2 A_1 \quad (3.83)$$

Som referenstillstånd införs den geometri där försättningen är mycket stor, $\frac{h}{a} \gg 1$. För K_I , $B(\frac{b}{a})$ och V finns uttryck på slutet form, t.ex [2]. Med $\eta = \frac{b}{a}$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{I\infty} = 2p\sqrt{\frac{a}{\pi}} \arcsin \eta \\ B(\eta)_{\infty} = \frac{8(1-\nu^2)}{\pi E} pa \left[\sqrt{1-\eta^2} \arcsin \eta - \eta \ln \eta \right] \\ V_{\infty} = \frac{8(1-\nu^2)}{\pi E} pa^2 \left[\arcsin^2 \eta + 2\eta \sqrt{1-\eta^2} \arcsin \eta - 2\eta^2 \ln \eta \right] \\ \eta = \frac{b}{a}, \quad \eta \in (0,1) \end{array} \right. \quad (3.84)$$

Med (3.84), (3.75) och (3.58) inses att

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n-1} = \frac{2}{\pi} \arcsin \eta \quad (3.85)$$

vidare med (3.79) att

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n-1} \frac{\sin(2n-1)\arccos\eta}{2n-1} = \frac{2}{\pi} [\sqrt{1-\eta^2} \arcsin\eta - \eta \ln\eta] \quad (3.86)$$

och slutligen att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{2n-1}^2}{2n-1} = \frac{4}{\pi^2} [\arcsin^2\eta + 2\eta\sqrt{1-\eta^2}\arcsin\eta - 2\eta^2\ln\eta] \quad (3.87)$$

Om (3.85) används för normalisering av koefficienterna A_n och P_n

$$(A'_n, P'_n) = \frac{(A_n, P_n)}{\frac{2}{\pi} \arcsin\eta} \quad (3.88)$$

får ekvationssystemet (3.53) formen

$$[\{M\} + \{E\}]A' = P' \quad (3.89)$$

och nya koefficienter D'_m kan definieras som i (3.62)

$$D'_m = A'_m - P'_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.90)$$

där P'_m fås ur (3.51) med (A14) och substitutionen $t = \cos\eta$

$$\left\{ \begin{array}{l} P'_{2m-1} = \begin{cases} 1 + \frac{\eta\sqrt{1-\eta^2}}{\arcsin\eta}, & m = 1 \\ \left[\frac{\sin 2m \arccos\eta}{2m \arcsin\eta} - \frac{\sin 2(m-1) \arccos\eta}{2(m-1) \arcsin\eta} \right], & m = 2, 3, \dots \end{cases} \\ P'_{2m} = 0, \quad m = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (3.91)$$

Utnyttjas nu dessa samband erhålles

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I/K_{I\infty} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} D'_{2n-1} \\ K_{II}/K_{II\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} A'_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} D'_{2n} \end{array} \right. \quad (3.92)$$

och uttryck för sprickbredden där tryckfördelningen slutar och

gasvolymen

$$\left\{ \begin{aligned} B(\eta)/B(\eta)_{\infty} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} D'_{2n-1} \frac{\sin(2n-1)\arccos\eta}{2n-1} \left[\sqrt{1-\eta^2} - \frac{\eta \ln \eta}{\arcsin \eta} \right] \\ V/V_{\infty} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P'_{2n-1} D'_{2n-1}}{2n-1} \left[1 + \frac{2\eta \sqrt{1-\eta^2}}{\arcsin \eta} - \frac{2\eta^2 \ln \eta}{\arcsin^2 \eta} \right] \end{aligned} \right. \quad (3.93)$$

(3.92) och (3.93) är uttryck som lämpar sig för datorberäkningar eftersom koefficienterna D'_n med ökande n blir allt mindre. För gränfallen helt gasfylld spricka och mycket liten fyllnadsgrad som svarar mot inverkan av ett gasfyllt borrhål gäller

$$\left\{ \begin{aligned} B &= 0, \quad \eta = 1 \\ V/V_{\infty} &= A_1 \\ \lim_{\eta \rightarrow 1} B(\eta)/B(\eta)_{\infty} &= K_1/K_{1\infty} \end{aligned} \right. \quad (3.94)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} B &= \infty \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} V &= 0 \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} B(\eta)/B(\eta) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} V/V_{\infty} \end{aligned} \right. \quad (3.95)$$

Gränsfallet mycket liten försättning skall studeras särskilt.

3.7 Gränsfallet när försättningen blir liten

När försättningen blir liten jämfört med spricklängden,

$\frac{h}{a} \ll 1$ så medför det att $K_I, K_{II} \rightarrow \infty$. En numerisk lösningsmetod kommer att konvergera långsamt. För att få en uppfattning om hur K_I och K_{II} beror av $\frac{h}{a}$ för små värden på variabeln betraktas en geometri enl. fig. 3 med två plattor där tjockleken $H \gg h$.

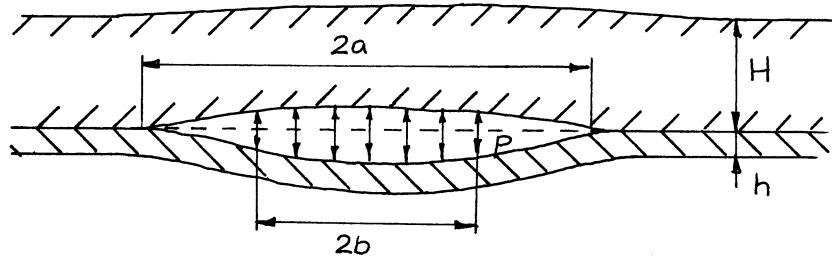


Fig. 3

Lösningen till detta problem (P.D.) kan erhållas ur motsvarande problem i balkteorin (P.S.) om följande ändring i materialvärdena E och ν görs

$$\begin{cases} E(\text{P.S.}) \rightarrow \frac{E}{1-\nu^2} & (\text{P.D.}) \\ \nu(\text{P.S.}) \rightarrow \frac{\nu}{1-\nu} & (\text{P.D.}) \end{cases} \quad (3.96)$$

Både den elastiska energin U och utböjningen under lasten är $\propto (\text{tjockleken})^{-3}$ så att bidragen från den övre plattan kan försummas då $H \gg h$.

Genom att superponera elementarfall för den "elastiska linjen" fås momentfördelningen $M(x)$

$$M(x) = \begin{cases} -pb \left[x + \frac{3a^2 + b^2}{6a} \right] & a < x < -b \\ \frac{p}{2} \left[x^2 - \frac{b}{3a} (3a^2 - 3ab + 3b^2) \right] & |x| \leq b \\ pb \left[x - \frac{3a^2 + b^2}{6a} \right] & b < x < a \end{cases} \quad (3.97)$$

som ger den upplagrade elastiska energin i materialet framför sprickan.

$$U = \frac{1}{2EI} \int_{-a}^a M^2(x) dx \quad (3.98)$$

Sektionens yttröghetsmoment/l.e l blir

$$I = \frac{h^3}{12} \quad (3.99)$$

För helt gasfylld spricka och mycket liten fyllnadsgrad fås

$$\left\{ \begin{array}{l} U \text{ (Nm/m)} = \frac{4(1-\nu^2)p^2 a^5}{15Eh^3}, \quad b = a \\ U \text{ (Nm/m)} = \frac{(1-\nu^2)p^2 R^2 a^3}{Eh^3}, \quad b = R \ll a \end{array} \right. \quad (3.100)$$

Den elastiska energin är kopplad till K_I och K_{II} genom /1/

$$\frac{dU}{da} = -2 \frac{dU}{da}_{lok} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (3.101)$$

där U_{lok} är den i vardera sprickspetsen lokalt frigjorda energin. Sambandet mellan den elastiska energin och V ges av /2/

$$V = \frac{2U}{p} \quad (3.102)$$

För den helt gasfyllda sprickan fås med (3.84) och $\eta = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}/K_{I\infty} \sim \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \left(\frac{h}{a}\right)^{-3/2} \\ V/V_\infty \sim \frac{4}{15\pi} \left(\frac{h}{a}\right)^{-3} \end{array} \right. \quad (3.103)$$

För inverkan från ett gasfyllt borrhål där $\eta = \frac{R}{a} \ll 1$

$$K_{I\infty} \sim \frac{2pR}{\sqrt{a\pi}} \quad (3.104)$$

erhålls

$$\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}/K_{I\infty} \sim \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \left(\frac{h}{a}\right)^{-3/2} \quad (3.105)$$

Genom att hänsyn tagits endast till materialet framför sprickan bör uttrycken i (3.103) och (3.105) ligga i underkant jämfört med motsvarande uttryck från avsnitt 3.6 och de kan användas till en kontroll av den numeriska lösningen. Härmed är analysdelen avslutad.

4. Numerisk behandling

4.1 Gauss-Laguerre_kvadratur

Varje element i $\{M\}$ består av en oegentlig integral över $[0, \infty)$

där en produkt av Besselfunktioner ingår. De kan uttryckas i fullständiga elliptiska integraler men det innebär onödigt arbete.

I stället används en kvadraturformel enl. Gauss-Laguerre i vilken en integral approximeras med /11/ kap 25.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{i=1}^n W_i f(x_i) + \text{restterm} \\ x_i = i\text{:te nollstället till Laguerre-polynomet } L_n(x) \\ W_i = \frac{(n!)^2 x_i}{(n+1)^2 [L'_{n+1}(x_i)]^2}, \quad x_i \text{ och } W_i \text{ finns tabellerade} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

för direkt beräkning av elementen M_{mj} . (4.1) kräver beräkning av $f(x)$ i ett ändligt antal punkter x_i och lämpar sig för datorberäkningar.

4.2 Noggrannheten i den numeriska integrationen

Med formlerna i avsnitt 3.5 kan noggrannheten i summeringen kontrolleras, vilket visas i tabell 4.1 för 12 termer i summan.

Tabell 4.1: Elementen M_{11} - M_{22} och det relativa felet Δ_{mj} vid den numeriska beräkningen för olika $\frac{h}{a}$

$\frac{h}{a}$	$-M_{11}$			$-M_{12} = 0.5 M_{21}$			$-M_{22}$		
	(3.66)	(4.1)	Δ_{11}	(3.69)	(4.1)	Δ_{12}	(3.73)	(4.1)	Δ_{22}
1.0	0.39200	0.39203	$8 \cdot 10^{-5}$	0.06085	0.06083	$4 \cdot 10^{-4}$	0.04148	0.04144	10^{-4}
0.6	0.60032	0.60043	$18 \cdot 10^{-5}$	0.09316	0.09326	$11 \cdot 10^{-4}$	0.08453	0.08439	$16 \cdot 10^{-4}$
0.2	0.86904	0.85822	$13 \cdot 10^{-3}$	0.05990	0.05840	$25 \cdot 10^{-3}$	0.16786	0.17569	$47 \cdot 10^{-3}$

Felet är för $\frac{h}{a} = 1.0$ och 0.6 högst 2% medan det för $\frac{h}{a} = 0.2$ kan uppgå till 5%. Det borde öka något med växande index på elementen M_{mj} p.g.a. Besselfunktionernas egenskaper, se (A42), men är alltså mindre än 1% för $\frac{h}{a}$ värden ner till $\frac{h}{a} \approx 0.3$

4.3 Datorprogram för beräkning av storheter

Med (4.1) kan då elementen M_{mj} beräknas med känd noggrannhet och en approximativ lösning till ekvationssystemet (3.53) eller (3.89) fås om serieansatsen (3.36) avbryts efter $2N$ st termer. Denna kan göras godtyckligt noggrann genom att välja N tillräckligt stort. (3.89) får formen

$$[\{M\}_{2N \times 2N} + \{E\}_{2N \times 2N}] A'_{2N \times 1} = P'_{2N \times 1} \quad (4.2)$$

och kan lösas med dator.

Talet N bestäms av hur snabbt koefficienterna D_m^I i (3.90) blir försumbara genom villkoret

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{D_{2N-1}^I}{K_I/K_{I\infty}} \right| < 0.001 \\ \left| \frac{D_{2N}^I}{K_{II}/K_{II\infty}} \right| < 0.001 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

och i praktiken varierar då N mellan 3 och 8.

Appendix 9 innehåller programlistor över ett program INDIA skrivet på Fortran för Atlas Copcos IBM 1130, som utför nödvändiga beräkningar och ett exempel på resultatutskrift. För att få ned beräkningstiden utnyttjas koefficientmatrisens symmetriegenskap (3.54) och Besselfunktionsvärdena lagras för sig. Värdena för Besselfunktionerna av de två högsta aktuella ordningarna beräknas med en standardrutin för alla x_i , lägre ordningars värden genereras rekursivt. Beräkningstiden varierar mellan 0.5-5 min. beroende på N .

De storheter som beräknas och skrivs ut är

- Den sökta vektorn A' ur (3.88) som bestämmer serieansatsens i (3.36) koefficienter
- Spänningsintensitetsfaktorerna K_I och K_{II} ur (3.92)
- Riktningen för största tangentiella dragspänning φ_0 ur (3.76)
- Sprickbredden där tryckfördelningen slutar B ur (3.93)
- Gasvolymen V ur (3.93)

Avsnitt 4.2 och (4.3) ger en uppfattning om noggrannheten i beräkningarna. Felet i den numeriska integrationen har uppskattats för det enskilda elementet M_{mj} men torde inte vara större i A_m än i mot-

svarande diagonalelement $M_{mm} + E_{mm}$, se (4.2), eftersom matrisen $\{M\} + \{E\}$ är relativt diagonaltung. Felen borde vara ungefär normalfördelade med väntevärdet noll så att felen i K_I , K_{II} , φ_0 , B och V genom de summeringar som utförs i själva verket blir mindre. Storleken beror då på hur snabbt koefficienterna A'_m avtar. Det totala felet borde för $\frac{h}{a} \geq 0.5$ vara mindre än 1%.

4.4 Utförda beräkningar

Beräkningar har gjorts för följande värden på fyllnadsgraden

$$\eta = 1.0, 0.9, \dots, 0.1, 0.05 \text{ och } 0.001$$

och för varje värde på fyllnadsgraden för följande försättningsvärden

$$\frac{h}{a} = 10, 5, 3, 2, 1.5, 1.2, 1.0, 0.8, 0.6, 0.5, 0.4 \text{ och } 0.2.$$

Resultaten finns redovisade i tabeller i avsnitt 4.5 och ett urval i figurer i avsnitt 4.6. För att underlätta studier av resten av figurmaterialiet presenteras först inverkan av fyllnadsgraden η på $K_{I\infty}$, $B(\eta)_{\infty}$ och V_{∞} relaterat till den helt gasfyllda sprickan. Eftersom $B(\eta)_{\infty}$ är sprickbredden där gasfördelningen slutar och $B(1)_{\infty} = 0$ väljs i stället mittbredden för den helt gasfyllda sprickan i det oändliga materialet, $B(0)$ ur (3.79) när $\frac{h}{a} \gg 1$, som referenstillstånd. (3.84) ger

$$\begin{cases} K_{I\infty} / K_{I\infty, \eta=1} = \frac{2}{\pi} \arcsin \eta \\ B(\eta)_{\infty} / B(0) = \frac{2}{\pi} [\sqrt{1-\eta^2} \arcsin \eta - \eta \ln \eta] \\ V_{\infty} / V_{\infty, \eta=1} = \frac{4}{\pi^2} [\arcsin^2 \eta + 2\eta \sqrt{1-\eta^2} \arcsin \eta - 2\eta^2 \ln \eta] \end{cases} \quad (4.4)$$

vilka finns inritade i fig. 4-6.

4.5 Tabeller

Tabell 4.2: Spänningsintensitetsfaktorn K_I uttryckt som $K_I/K_{I\infty}$ ur (3.92), som funktion av försättningen $\frac{h}{a}$ och fyllnadsgraden η .

fig. Siffrorna i marginalen anger numren på de figurer där värdena visas i form av kurvor.

η \ h/a	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5	2.0	3.0	5.0	10.0
7, 10 → 1.0	5.301	2.914	2.403	2.082	1.714	1.511	1.431	1.267	1.164	1.078	1.026	1.010
12 → 0.9	6.858	3.606	2.909	2.472	1.970	1.694	1.522	1.363	1.222	1.105	1.036	1.014
7, 13 → 0.8	7.673	3.962	3.169	2.671	2.100	1.786	1.591	1.410	1.251	1.119	1.040	1.016
14 → 0.7	8.353	4.242	3.376	2.830	2.203	1.860	1.645	1.447	1.273	1.129	1.044	1.017
15 → 0.6	8.919	4.477	3.546	2.960	2.288	1.920	1.690	1.477	1.291	1.137	1.046	1.018
7, 16 → 0.5	9.373	4.668	3.685	3.067	2.358	1.969	1.727	1.502	1.305	1.144	1.049	1.019
17 → 0.4	9.738	4.821	3.796	3.153	2.415	2.009	1.756	1.522	1.317	1.149	1.050	1.020
17 → 0.3	10.02	4.939	3.881	3.219	2.458	2.040	1.779	1.537	1.326	1.153	1.052	1.020
0.2	10.22	5.022	3.941	3.265	2.489	2.062	1.795	1.548	1.332	1.156	1.052	1.020
0.1	10.34	5.072	3.978	3.293	2.507	2.075	1.805	1.555	1.336	1.158	1.053	1.021
0.05	10.36	5.084	3.987	3.300	2.512	2.078	1.807	1.556	1.337	1.158	1.053	1.021
7, 18 → 0.001	10.37	5.089	3.991	3.303	2.514	2.080	1.808	1.557	1.337	1.158	1.053	1.021

Tabell 4.3: Spänningsintensitetsfaktorn K_{II} uttryckt som K_{II}/K_{∞} ur (3.92), som funktion av försättningen $\frac{h}{a}$ och fyllnadsgraden γ .

fig.

$\frac{h}{a}$ γ	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5	2.0	3.0	5.0	10.0
1.0	2.879	0.980	0.681	0.495	0.289	0.185	0.125	0.075	0.036	0.013	0.003	0.000
0.9	3.990	1.349	0.936	0.680	0.396	0.253	0.171	0.102	0.049	0.018	0.004	0.000
0.8	4.651	1.561	1.080	0.784	0.455	0.290	0.195	0.116	0.056	0.020	0.004	0.000
0.7	5.215	1.741	1.204	0.872	0.505	0.320	0.216	0.128	0.061	0.021	0.005	0.000
0.6	5.681	1.897	1.311	0.949	0.549	0.347	0.233	0.130	0.066	0.023	0.005	0.001
0.5	6.065	2.030	1.403	1.016	0.586	0.370	0.247	0.145	0.069	0.024	0.005	0.001
0.4	6.388	2.138	1.478	1.071	0.618	0.389	0.259	0.152	0.072	0.025	0.005	0.001
0.3	6.647	2.222	1.538	1.114	0.642	0.404	0.269	0.157	0.075	0.026	0.005	0.001
0.2	6.826	2.283	1.580	1.145	0.660	0.415	0.276	0.161	0.076	0.026	0.005	0.001
0.1	6.922	2.319	1.606	1.164	0.671	0.421	0.280	0.163	0.077	0.026	0.006	0.001
0.05	6.944	2.328	1.612	1.169	0.674	0.423	0.281	0.164	0.077	0.027	0.006	0.001
0.001	6.952	2.332	1.615	1.170	0.675	0.424	0.281	0.164	0.077	0.027	0.006	0.001

8, 18 →

17 →

8, 16 →

15 →

14 →

8, 13 →

12 →

8, 10 →

Tabell 4.4: Vinkeln för största tangentiella dragspänning vid sprickspetsen φ_0 i grader ur (3.76) men räknad mot den fria ytan, som funktion av försättningen $\frac{h}{a}$ och fyllnadsgraden η .

fig.

$\frac{h}{a} \backslash \eta$	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5	2.0	3.0	5.0	10.0
9,10 → 1.0	42.0	31.6	27.9	24.3	18.2	13.6	10.2	6.72	3.57	1.37	0.30	0.02
12 → 0.9	43.4	33.9	30.6	27.3	21.2	16.3	12.5	8.47	4.61	1.81	0.40	0.03
9,13 → 0.8	44.2	35.0	31.9	28.6	22.6	17.6	13.6	9.29	5.11	2.02	0.45	0.04
14 → 0.7	44.8	35.9	32.8	29.7	23.6	18.5	14.5	9.93	5.49	2.17	0.49	0.05
15 → 0.6	45.2	36.6	33.6	30.5	24.5	19.3	15.1	10.4	5.79	2.30	0.52	0.05
9,16 → 0.5	45.5	37.2	34.3	31.2	25.2	20.0	15.7	10.9	6.04	2.40	0.55	0.05
0.4 0.4	45.8	37.6	34.8	31.8	25.8	20.5	16.1	11.2	6.24	2.48	0.57	0.05
17 → 0.3	46.0	37.9	35.1	32.2	26.2	20.9	16.5	11.5	6.39	2.54	0.58	0.06
0.2 0.2	46.1	38.2	35.4	32.5	26.5	21.2	16.7	11.6	6.49	2.59	0.59	0.06
0.1 0.1	46.2	38.3	35.6	32.6	26.7	21.4	16.9	11.7	6.56	2.61	0.60	0.06
0.05 0.05	46.2	38.3	35.6	32.7	26.8	21.4	16.9	11.8	6.57	2.62	0.60	0.06
3,18 → 0.001	46.2	38.3	35.6	32.7	26.8	21.4	16.9	11.8	6.58	2.62	0.60	0.06

Tabell 4.5: Gasvolymen V uttryckt som V/V_∞ ur (3.93), som funktion av försättningen $\frac{h}{a}$ och fyllnadsgraden η .

fig. 20 → 21 → 22 → 23 → 24 → 25 →

$\eta \backslash \frac{h}{a}$	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5	2.0	3.0	5.0	10.0
1.0	20.57	5.098	3.594	2.804	2.034	1.677	1.479	1.313	1.181	1.082	1.027	1.010
0.9	21.51	5.220	3.657	2.840	2.048	1.683	1.482	1.314	1.181	1.081	1.027	1.010
0.8	22.87	5.380	3.735	2.882	2.061	1.687	1.482	1.312	1.179	1.080	1.026	1.010
0.7	24.17	5.520	3.797	2.911	2.066	1.684	1.477	1.308	1.175	1.078	1.026	1.009
0.6	25.19	5.608	3.827	2.917	2.057	1.673	1.467	1.299	1.169	1.075	1.025	1.009
0.5	25.76	5.619	3.811	2.894	2.033	1.653	1.450	1.287	1.161	1.071	1.023	1.009
0.4	25.74	5.530	3.737	2.833	1.990	1.621	1.426	1.270	1.151	1.067	1.022	1.008
0.3	24.94	5.315	3.591	2.725	1.924	1.576	1.394	1.248	1.138	1.061	1.020	1.007
0.2	23.12	4.937	3.352	2.560	1.830	1.515	1.351	1.221	1.123	1.054	1.017	1.007
0.1	19.81	4.319	2.976	2.307	1.693	1.429	1.291	1.183	1.101	1.044	1.014	1.005
0.05	17.07	3.830	2.683	2.113	1.589	1.364	1.247	1.155	1.086	1.038	1.012	1.005
0.001	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabell 4.6: Sprickbredden där tryckfördelningen slutar B uttryckt som $B(\eta)/B(\eta)_{\infty}$ ur (3.93), som funktion av försättningsgraden $\frac{h}{a}$ och fyllnadsgraden η .

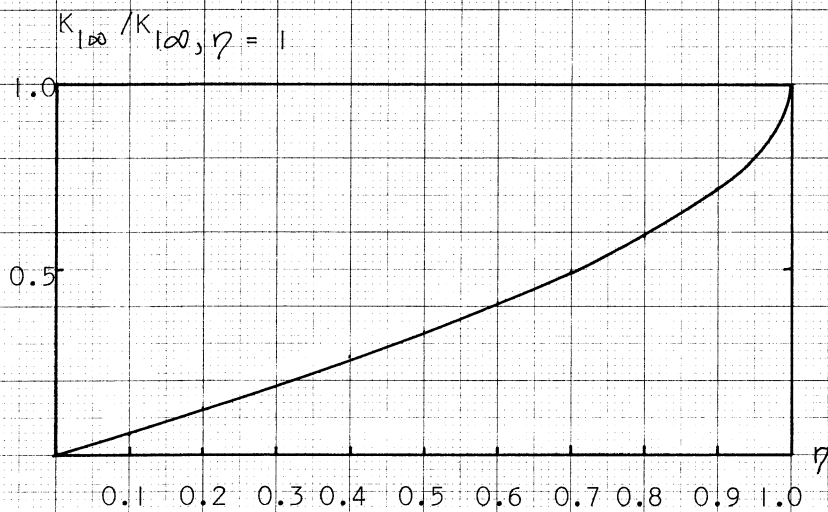
fig.

$\frac{h}{a}$ η	27 ↓ 0.2	27 ↓ 0.4	27 ↓ 0.5	27 ↓ 0.6	27 ↓ 0.8	27 ↓ 1.0	27 ↓ 1.2	1.5	2.0 ↓ 27	3.0	5.0	10.0
1.0	5.301	2.914	2.403	2.082	1.714	1.511	1.431	1.267	1.164	1.078	1.026	1.010
0.9	8.984	3.669	2.874	2.403	1.890	1.623	1.461	1.316	1.191	1.089	1.030	1.012
0.8	13.32	4.299	3.229	2.625	1.994	1.681	1.497	1.335	1.199	1.092	1.031	1.012
0.7	17.78	4.884	3.539	2.809	2.073	1.719	1.517	1.343	1.201	1.092	1.030	1.012
0.6	21.69	5.380	3.789	2.949	2.124	1.739	1.524	1.343	1.198	1.090	1.030	1.011
0.5	24.74	5.737	3.955	3.032	2.144	1.739	1.518	1.335	1.191	1.086	1.028	1.011
0.4	26.71	5.909	4.013	3.045	2.128	1.718	1.498	1.319	1.180	1.080	1.026	1.010
0.3	27.28	5.851	3.940	2.973	2.070	1.673	1.463	1.294	1.164	1.073	1.024	1.009
0.2	26.04	5.507	3.705	2.801	1.964	1.601	1.410	1.259	1.144	1.063	1.021	1.008
0.1	22.37	4.782	3.255	2.493	1.792	1.491	1.334	1.210	1.116	1.051	1.016	1.006
0.05	19.02	4.175	2.889	2.249	1.662	1.409	1.278	1.174	1.097	1.042	1.014	1.005
0.001	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

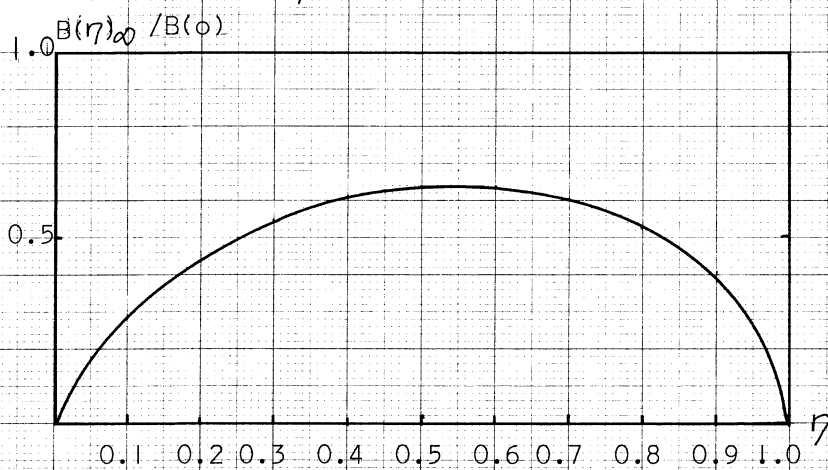
4.6 Figurer

Fyllnadsgradens inverkan på referenstill-
ständen $K_{l\infty}$, $B(\eta)_{\infty}$ och V_{∞}

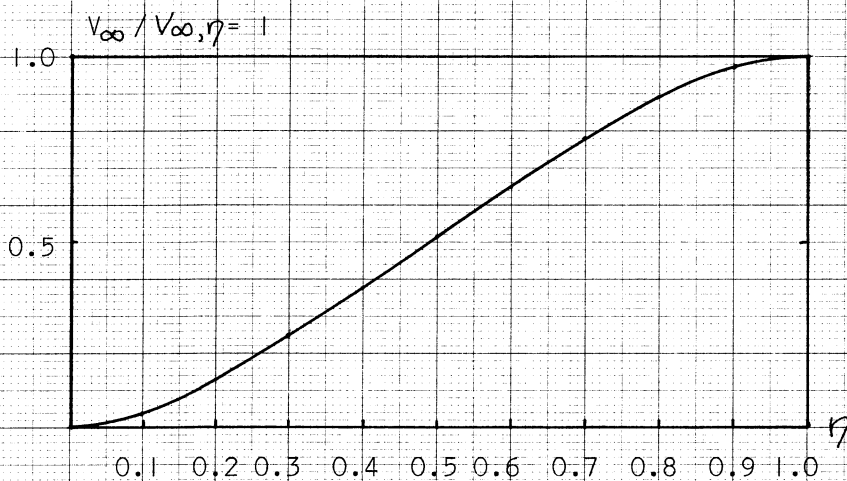
Fig. 4,5,6



$$K_{l\infty} / K_{l\infty, \eta=1} = \frac{2}{\pi} \arcsin \eta$$



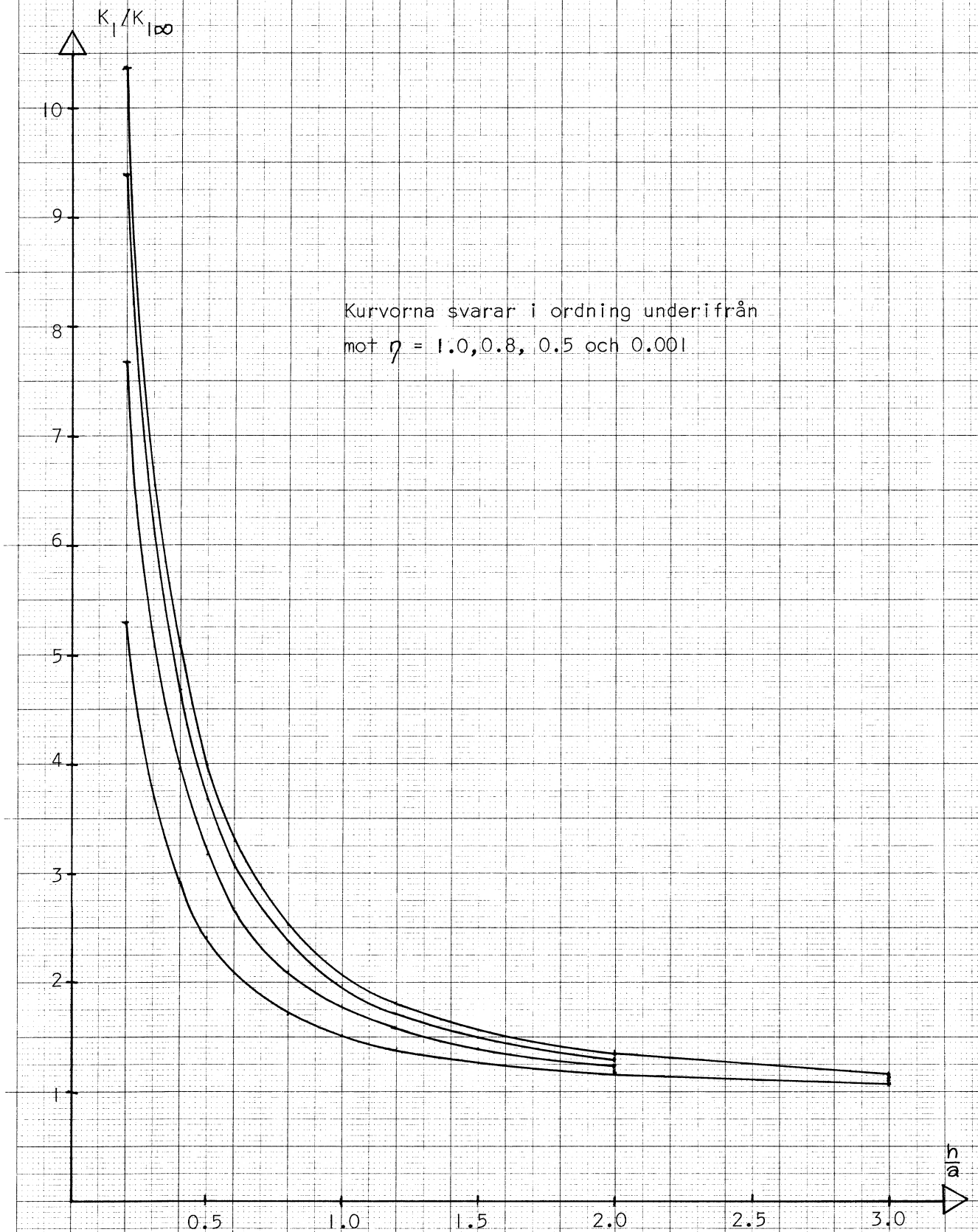
$$B(\eta)_{\infty} / B(0) = \frac{2}{\pi} [\sqrt{1-\eta^2} \arcsin \eta - \eta \ln \eta]$$



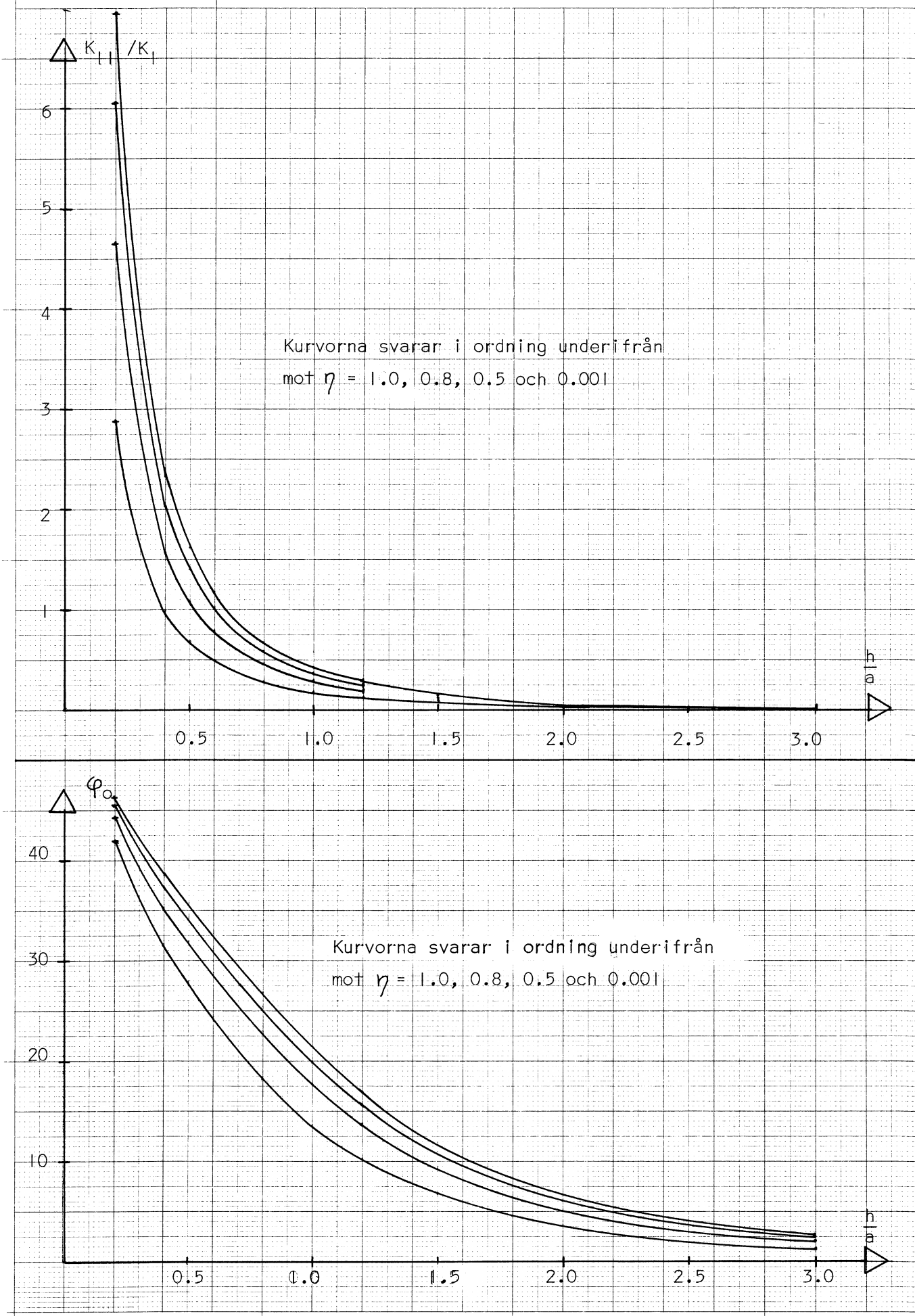
$$V_{\infty} / V_{\infty, \eta=1} = \frac{4}{\pi^2} [\arcsin^2 \eta + 2\eta \sqrt{1-\eta^2} \arcsin \eta - 2\eta^2 \ln \eta]$$

Fig. 7.

K_I som funktion av försättningen $\frac{h}{a}$
för några olika fyllnadsgrader η



K_{II} och φ_0 som funktion av försättningen
 $\frac{h}{a}$ för några olika fyllnadsgrader η



K_I , K_{II} och φ_0 som funktion av försättningen
för $\eta = 1.0$ samt en jämförelse med lösningen
för små försättningar ur 3.7

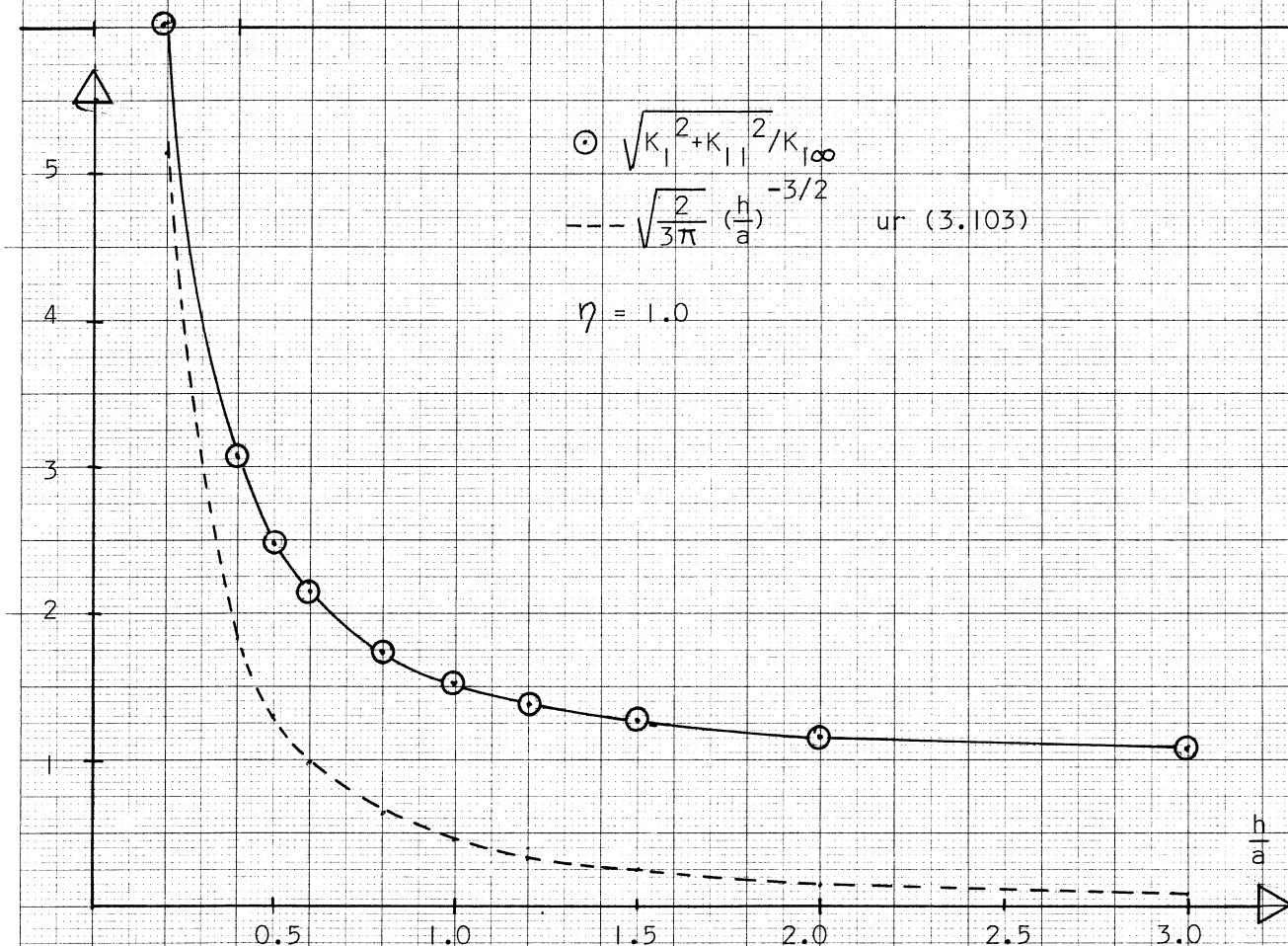
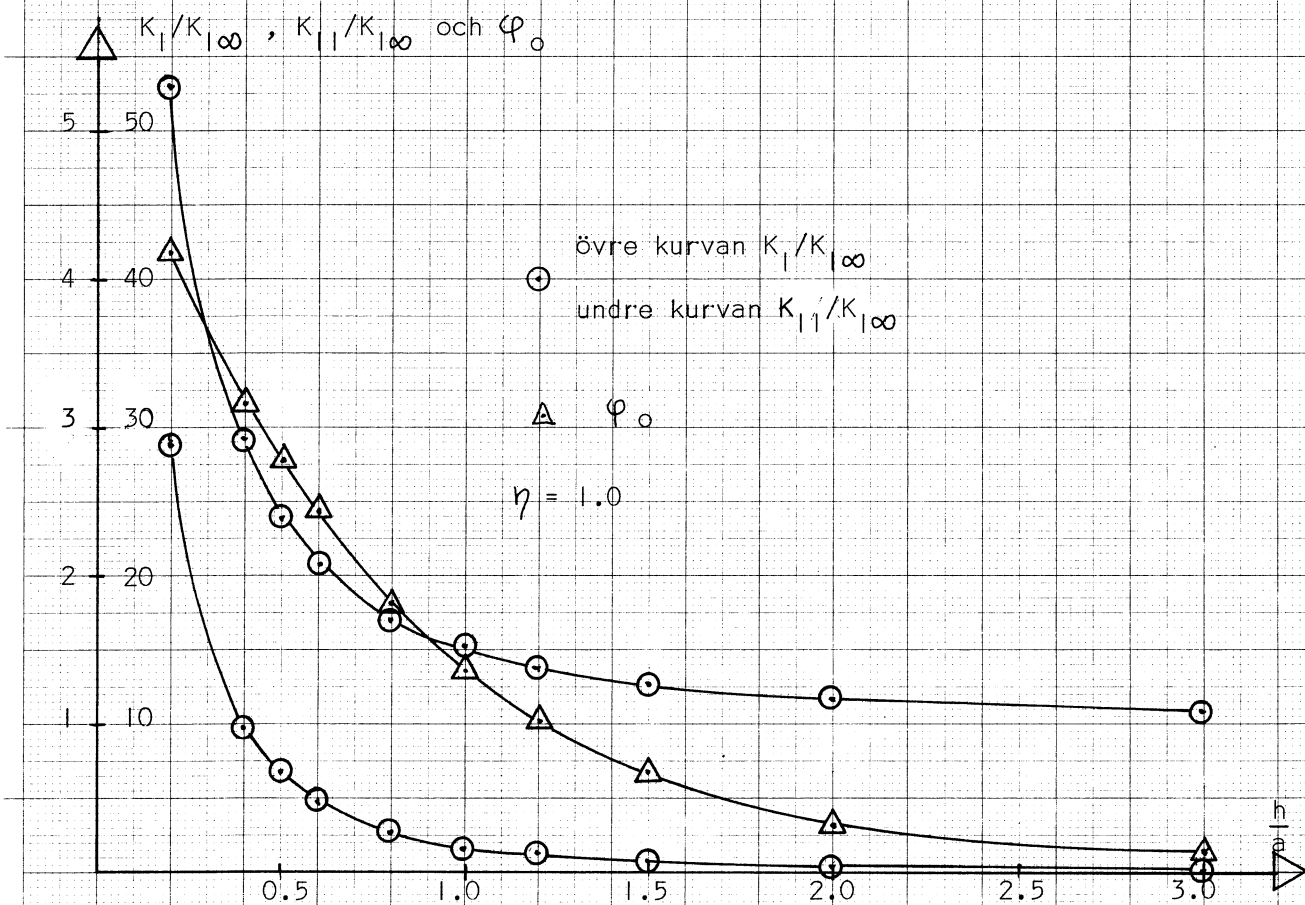
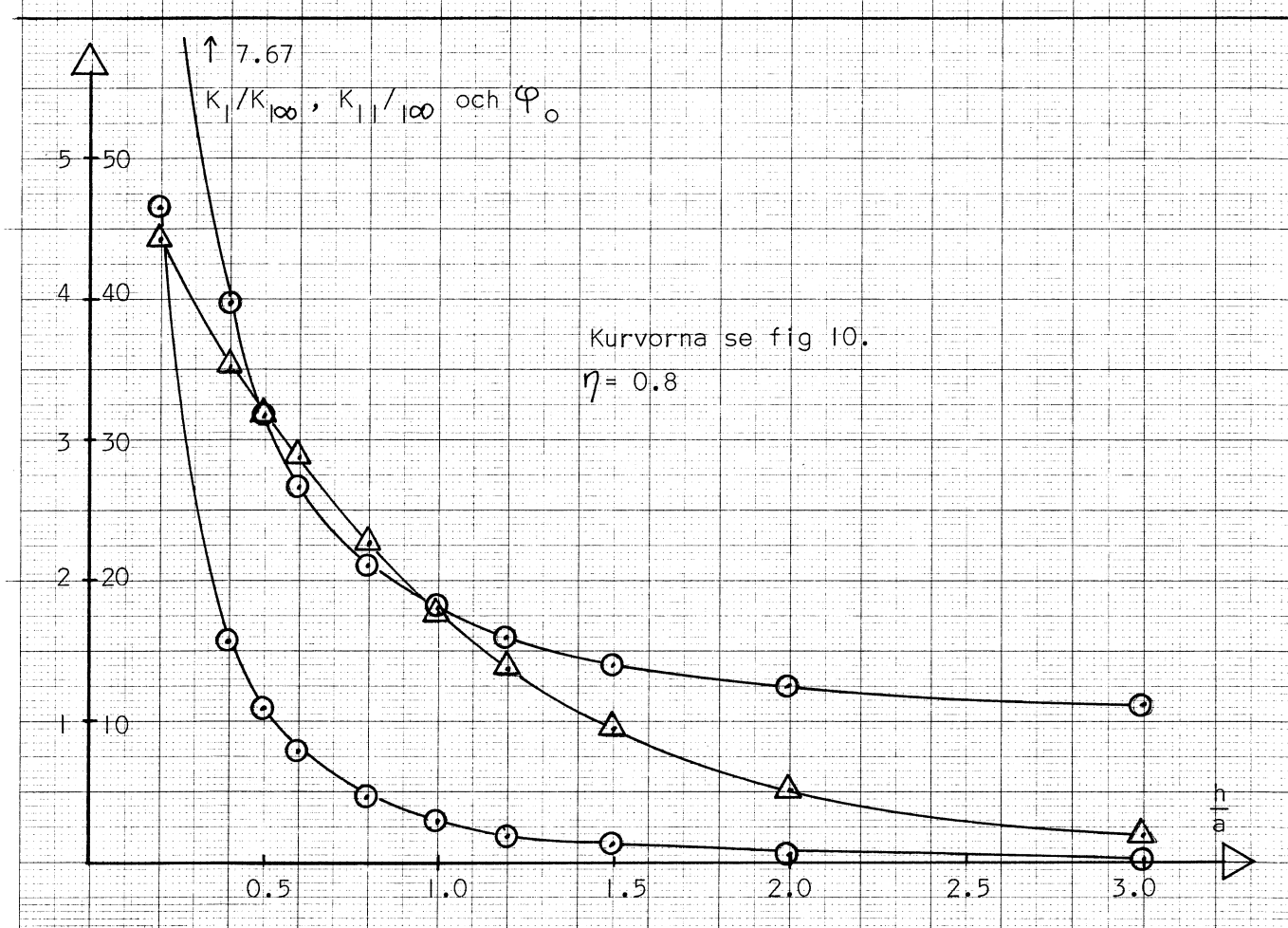
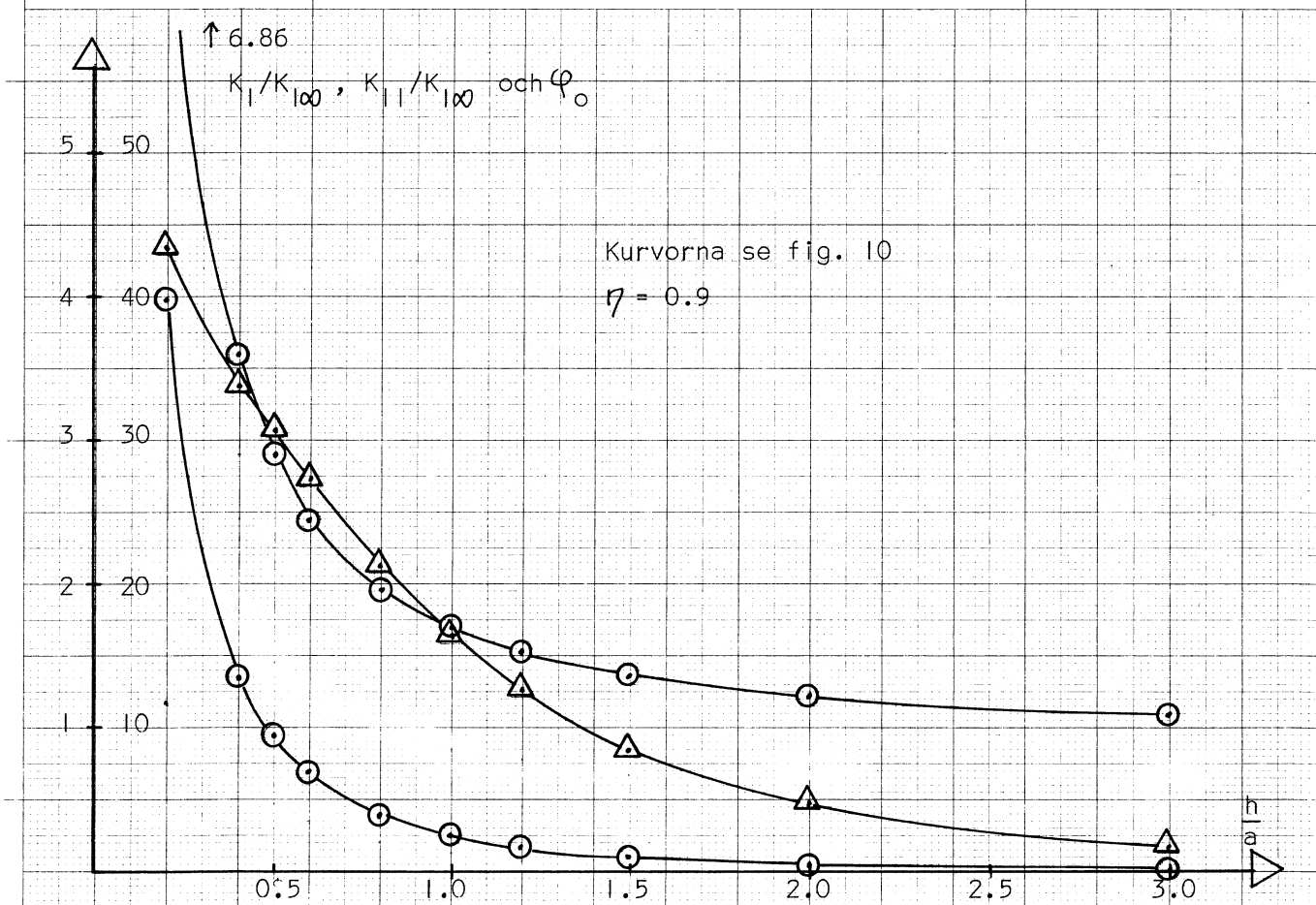


Fig. 12, 13

K_I , K_{II} och φ_0 som funktion av för-
sättningen för $\eta = 0.9$ och 0.8



K_I , K_{II} och φ_0 som funktion av försättningen
för $\eta = 0.7$ och 0.6

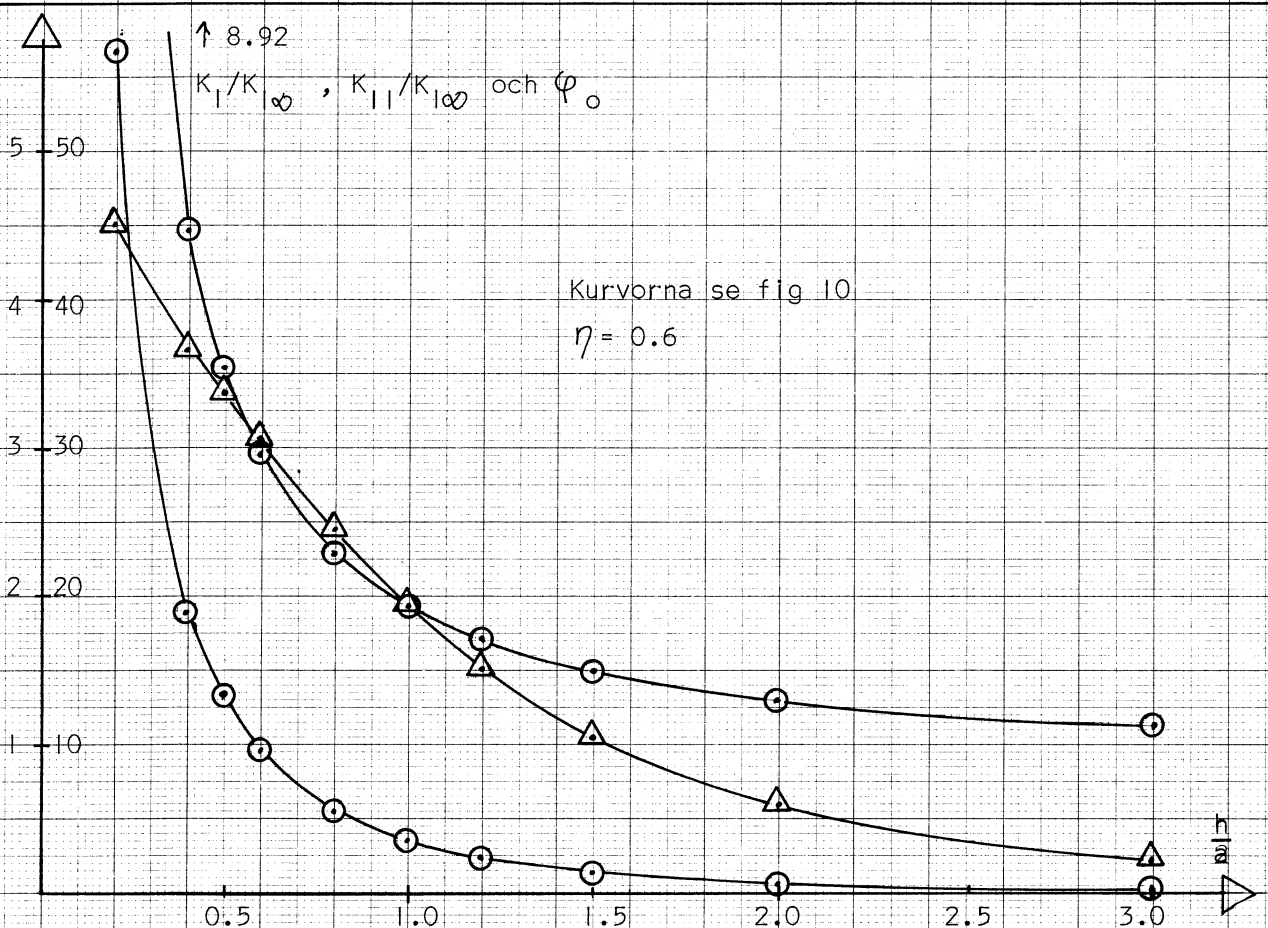
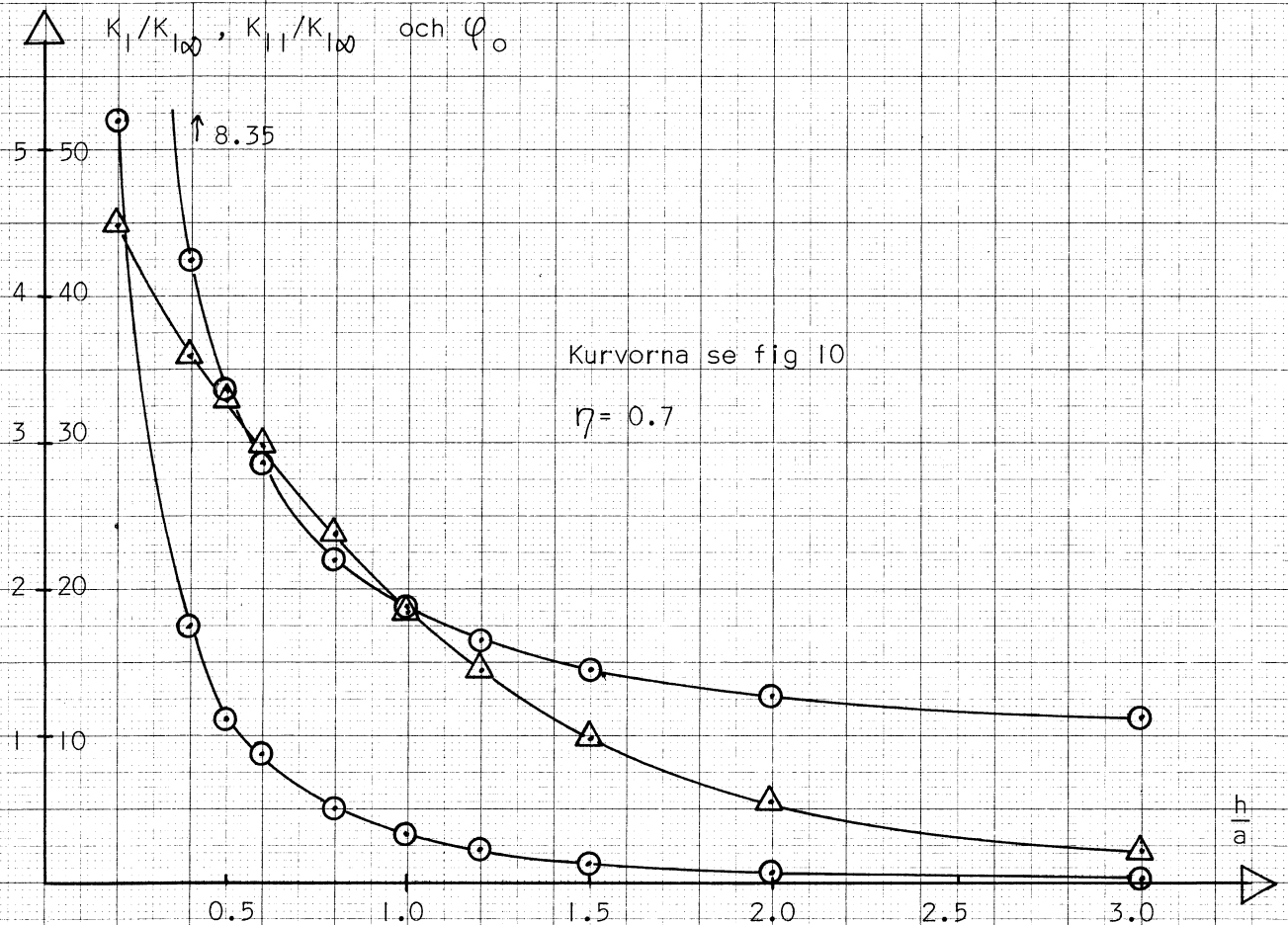
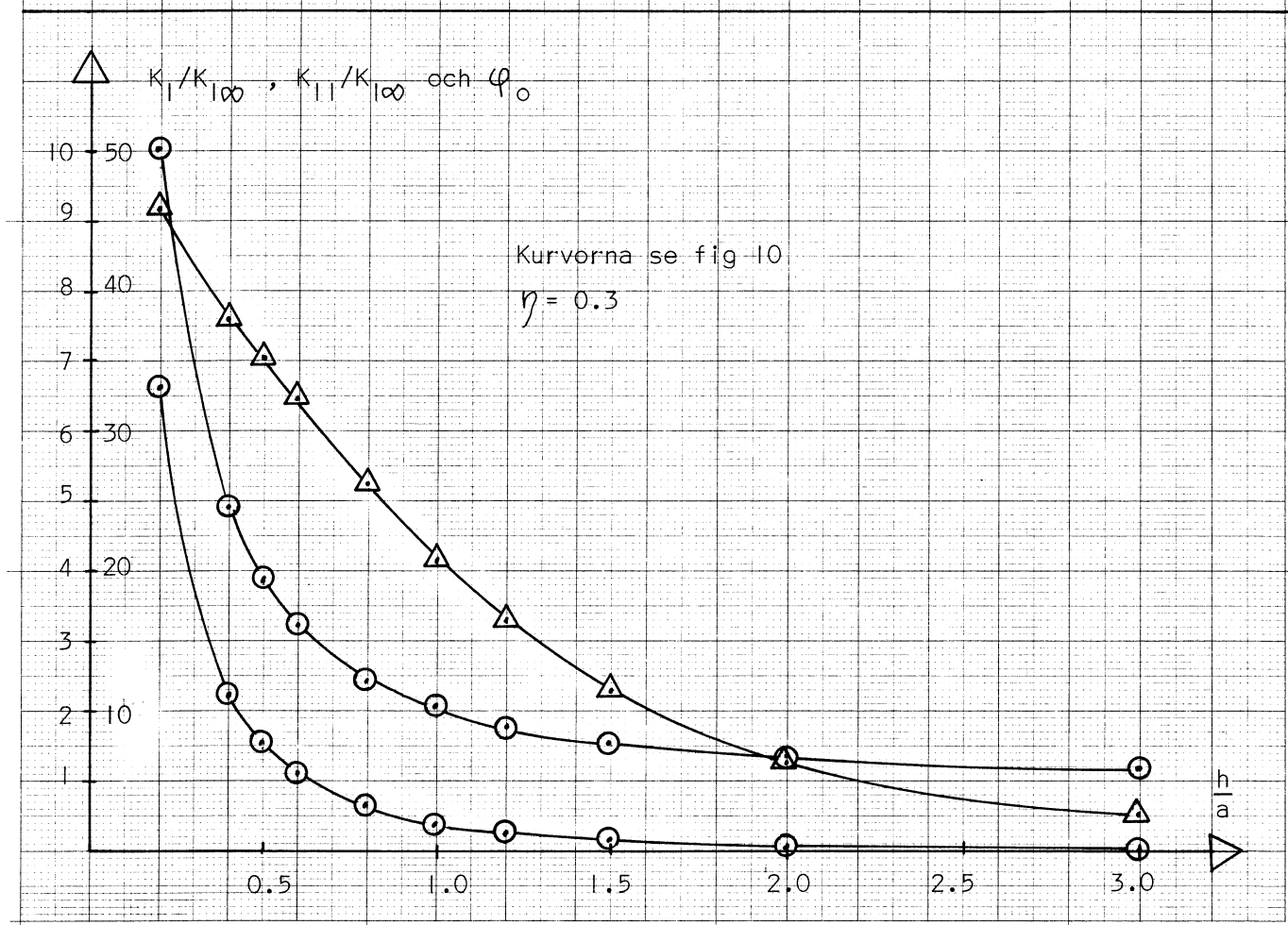
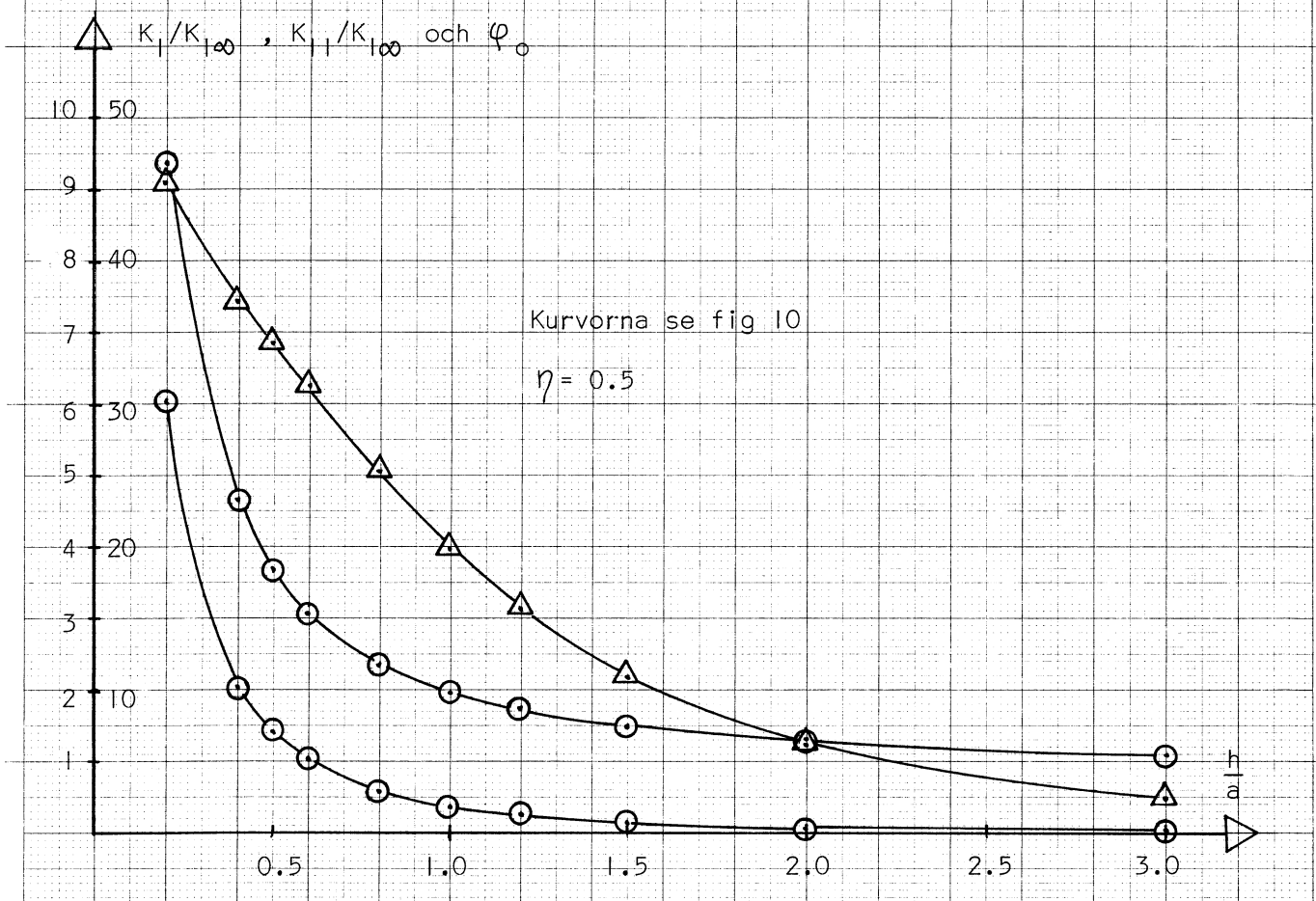


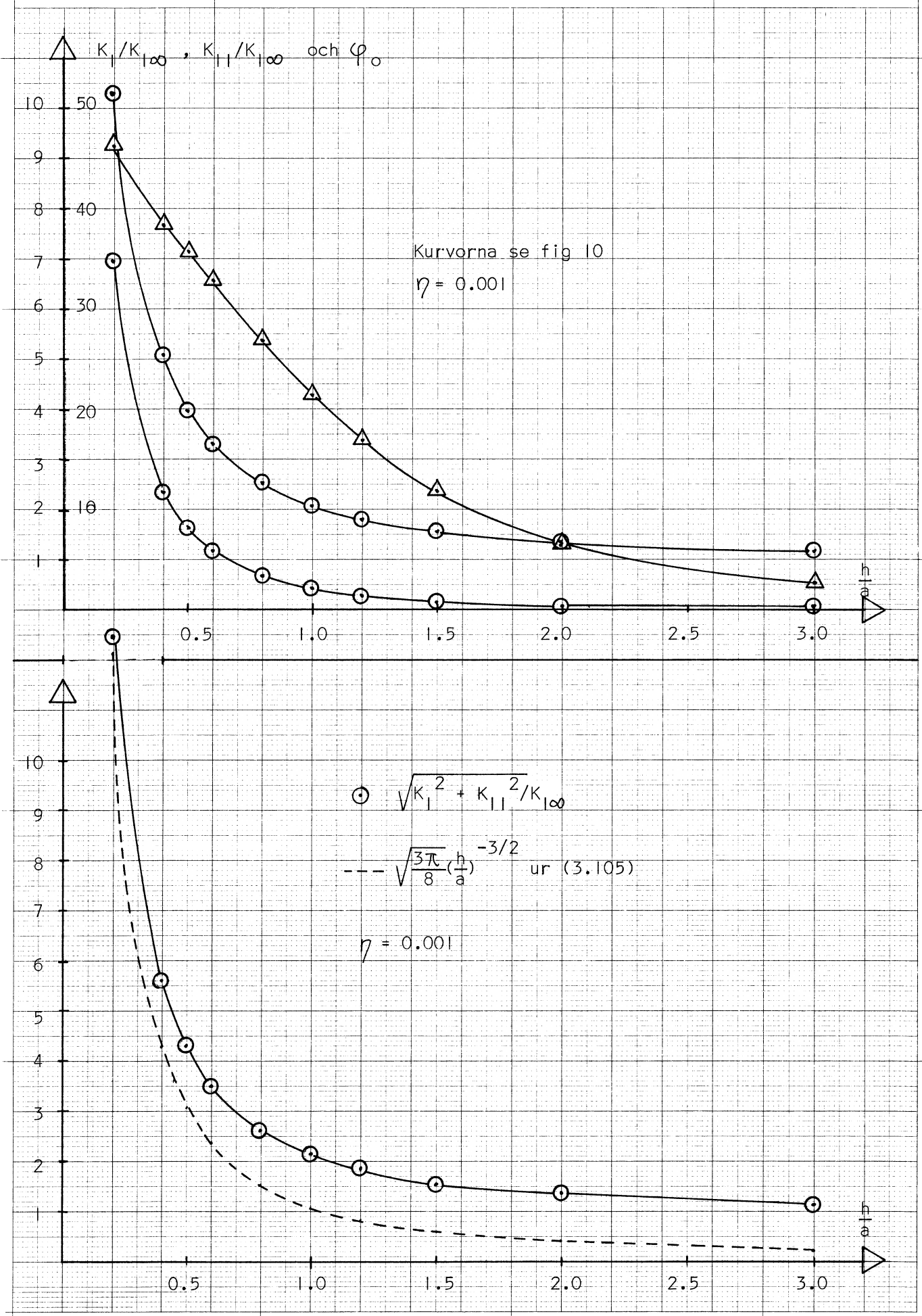
Fig. 16, 17

K_I , K_{II} och φ_0 som funktion av försättningen för $\eta = 0.5$ och 0.3



K_I , K_{II} och φ_0 som funktion av försättningen för $\eta = 0.001$ samt en jämförelse med lösningen för små försättningar ur 3.7

Fig. 18, 19



V och B som funktion av försättningen för
 $\eta = 0.8$ och V som funktion av försättningen
 för $\eta = 1.0$ jämfört med lösningen för små
 försättningar ur 3.7
 V betecknar gasvolymen och B sprickbredden

Fig. 20, 21

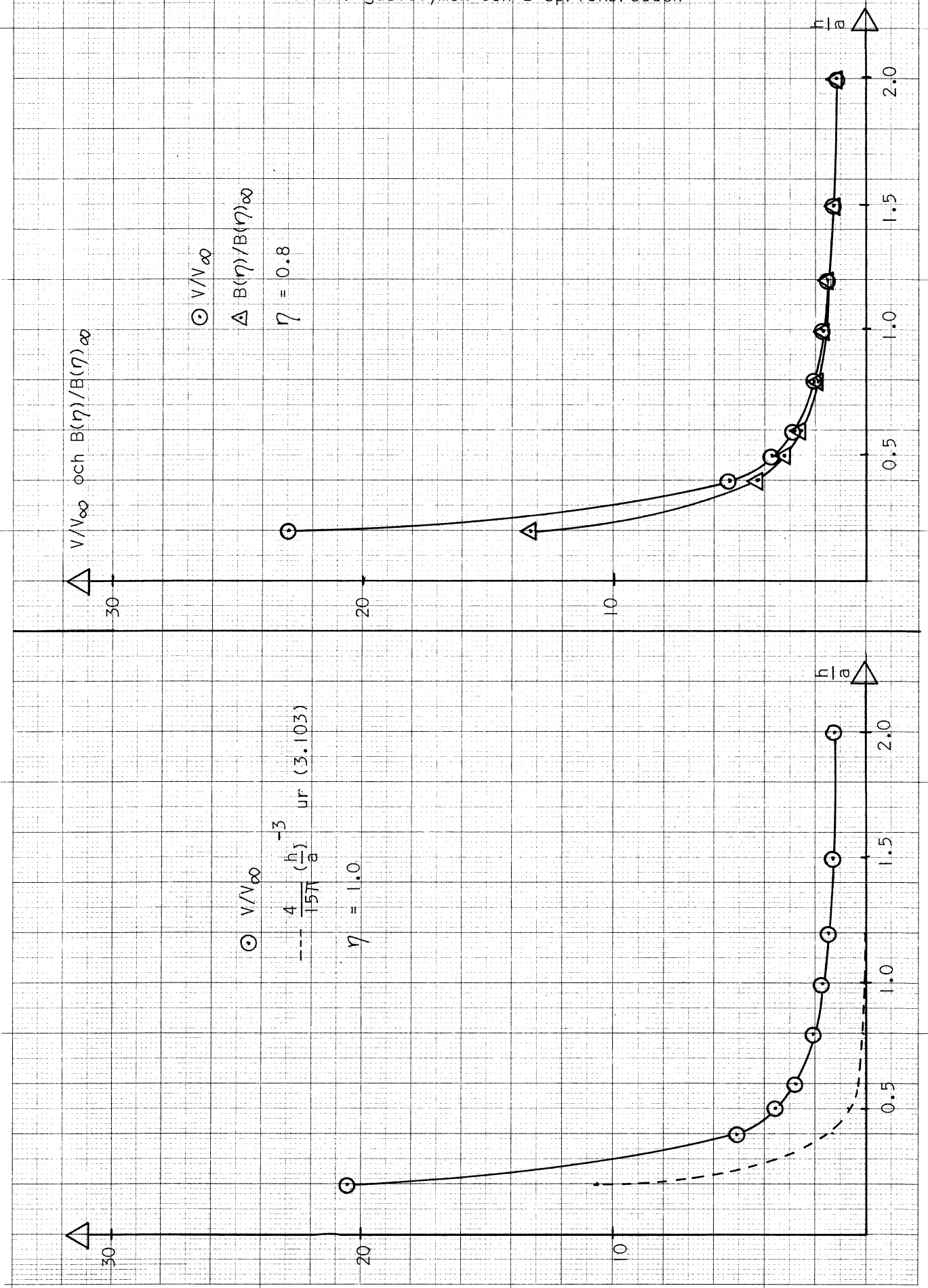
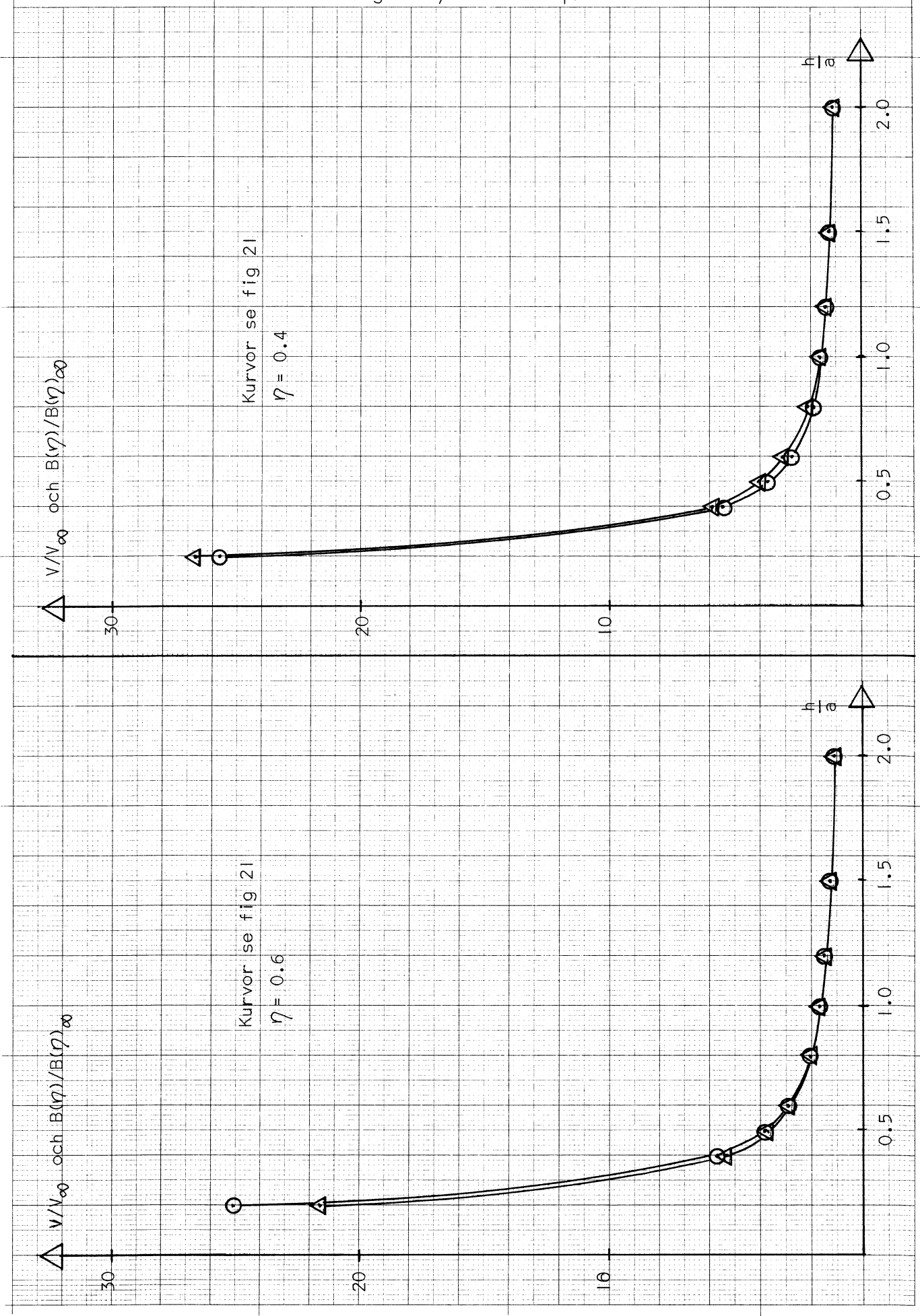


Fig. 22, 23

V och B som funktion av försättningen
för $\eta = 0.6$ och 0.4
V betecknar gasvolymen och B sprickbredden



V och B som funktion av försättningen

för $\eta = 0.2$ och 0.05

V betecknar gasvolymen och B sprickbredden

V/V_∞ och $B(\eta)/B(\eta)_\infty$

Δ V/V_∞

$\circ$ $B(\eta)/B(\eta)_\infty$

Kurvor se fig 21

$\eta = 0.05$

η/a

2.0

1.5

1.0

0.5

V/V_∞ och $B(\eta)/B(\eta)_\infty$

Δ V/V_∞

$\circ$ $B(\eta)/B(\eta)_\infty$

Kurvor se fig 21

$\eta = 0.2$

η/a

2.0

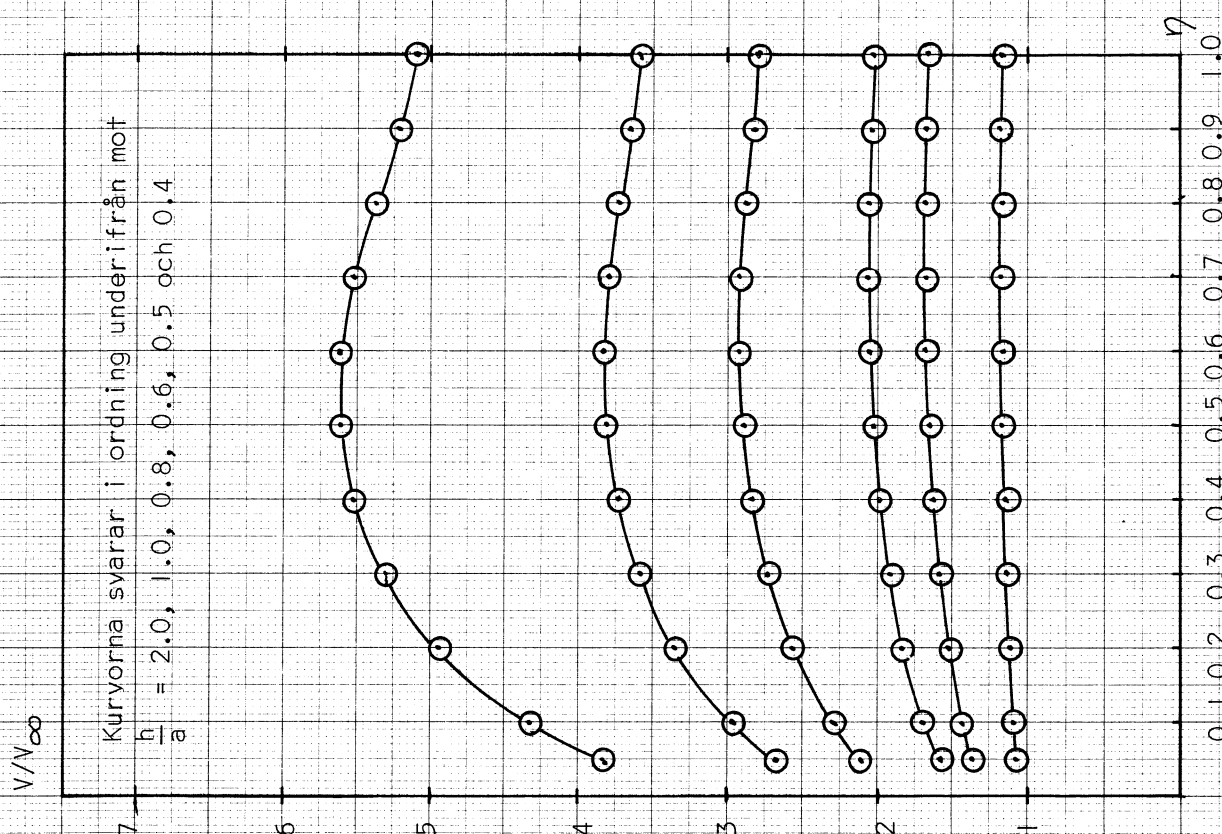
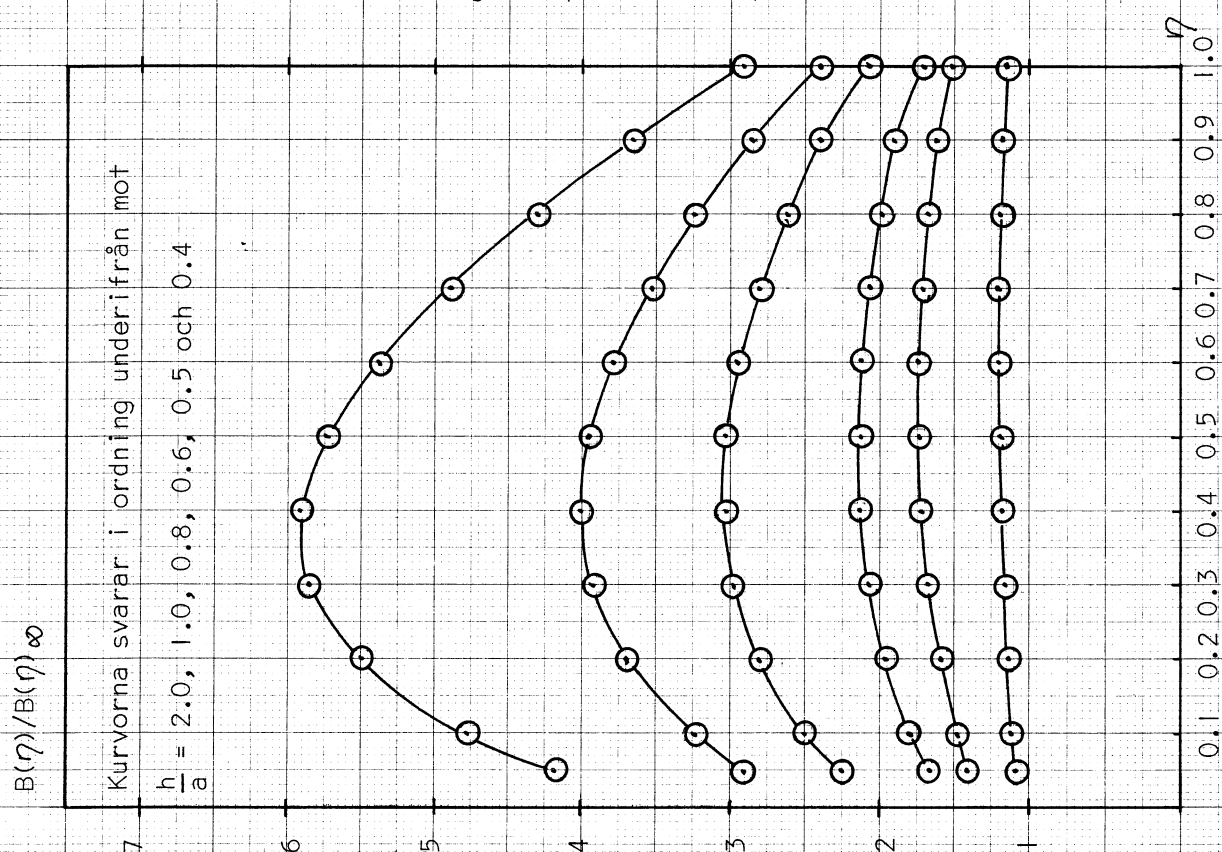
1.5

1.0

0.5

V resp. B som funktion av fyllnadsgraden η för olika försättningar

V betecknar gasvolymen och B sprickbredden



5. Diskussion

5.1 Diskussion_av_resultat_

Den plana sprickan i ett oändligt medium eller gränsfallet mycket stor försättning, $\frac{h}{a} \gg 1$, har valts som referenstillstånd för storheterna. Spänningsintensitetsfaktorernas K_I och K_{II} variation med $\frac{h}{a}$ har väntat utseende, se fig. 7, 8 och 10-19 och tabellerna 4.2-3. Närvaron av den fria ytan medför att det uppträder skjuvspänningar i sprickplanet nära sprickspetsen eller annorlunda uttryckt att sprickplanets fortsättning är inte längre den riktning i vilken den tangentiella dragspänningen vid sprickspetsen är störst. Denna riktning, φ_0 , vrids alltmer mot den fria ytan ju mindre försättningen blir, se fig. 9 och 10-19.

Variationerna i K_I , K_{II} och φ_0 med fyllnadsgraden η vid samma försättning blir större ju mer gasen fyller ut sprickan. Inom intervallet $\eta = 0.001-0.2$ är de små, högst 1-2%.

Jämförelsen mellan resultaten och överslagsräkningarna i avsnitt 3.7 för $\frac{h}{a} \ll 1$ visar att de sistnämnda som väntat ger för låga värden vilket framgår av fig. 11 och 19 för $\eta = 1.0$ och 0.001. Samma sak gäller för gasvolymen när $\eta = 1.0$, se fig. 20.

Sprickbreddens B och gasvolymens V beroende av försättningen uppvisar stora likheter, se fig. 20-27. Beroende på fyllnadsgraden är inverkan störst antingen för volymen eller sprickbredden vilket framgår av fig. 20-25. Båda uppvisar i sitt beroende av fyllnadsgraden för samma försättning ett maximum, se fig. 26-27.

De numeriska resultaten för K_I och K_{II} för $\eta = 1$, se tabell 4.2-3 och fig. 10 skiljer sig från de värden som Erdogan /8/ ger. Det beror på ett teckenfel i en av hans kärnfunktioner. Följande omständigheter tyder på det.

- Om $\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}/K_{I\infty}$ beräknas ur /8/ och ritas in i fig. 11 så kommer kurvan att hamna under den streckade för $\frac{h}{a} \leq 0.2$.
- En jämförelse med Erdogan och Gupta /7/ avsnitt 4.3 formel (60) ger ingen skillnad på tecken jämfört med (3.32) men däremot jämfört med /8/.

- c. En räkning med det redovisade datorprogrammet där teckenändringen införts gav överensstämmelse med Erdogans /8/ värden.

Beräkningstiden för problemet blir också mindre än i /7-8/ där beräkningen av H_j , G_j , Q_j och R_{nj} tydligen gjorts med Gauss-Tschebyscheff kvadratur över $[-1,1]$ i två steg istället för att reducera problemet till beräkning av koefficienterna M_{mj} genom Gauss-Laguerre kvadratur över $[0,\infty)$. Villkoret för denna förenkling var att källfunktionerna $k_{11}-k_{22}$ var likformigt konvergenta så att integrationsordningen kunde kastas om, se avsnitt 3.3 och appendix 4. Detta är uppfyllt eftersom de singulära delarna av Greenfunktionerna behandlas för sig vid härledningen av integralekvationerna och förenklingen kunde ha utförts också av Erdogan /7/ för de geometrier som där studeras.

5.2 Ytterligare användningsområden

I och med diskussionen i avsnitt 5.1 står det klart att det framtagna datorprogrammet genom en ändring av ingående kärnfunktioner $k_{11}-k_{22}$ till sådana som svarar mot andra geometrier kan användas för beräkningar på dem. I rapporten "The Stress Analysis of Multilayered Composites with a Flaw" /7/ ger Erdogan och Gupta generella formler för en geometri bestående av en remsa med en spricka som är omgiven av två halvplan av godtyckliga material, avsnitt 4.3. Det skulle heller inte vara svårt att studera andra skiktade material. Detta borde vara av intresse för studier av brott i olika typer av sprängfogade kompositmaterial, t.ex. hur sprickans läge i förhållande till fogen och materialvalet påverkar benägenheten till brott under en belastning tvärs den geometriska strukturen.

6. Referenser

1. Ouchterlony, F. Uppskattning av sprickutbredningen kring ett borrhål.-
Rapport DS 1970:49.
2. Ouchterlony, F. Betydelsen av gasens fördelning i en plan spricka.-
Rapport DS 1970:50.
3. Ouchterlony, F. Beräkning av spricklängdens variation med håldiametern vid konstant spräng-
ämnesmängd per meter.-
Rapport DS 1971:3.
4. Field, J.E.,
Ladegaard-Pedersen, A. The Importance of the Reflected Shock
Wave in Rock Blasting.-
Rapport DL 1969:7.
5. Persson, P.A., Lundborg, N.,
Johansson, C.H. The Basic Mechanisms in Rock Blasting.-
Proc. Sec. Congr. Int. Soc. Rock
Mechanics Subject 5 nr 3, Beograd (1970).
6. Langefors, U.,
Kihlström, B. The Modern Technique of Rock Blasting.-
Almqvist och Wiksell AB, Stockholm (1967)
7. Erdogan, F.,
Gupta, G. The Stress Analysis of Multi-Layered
Composites with a Flaw.-
Int. J. Solids Structures, vol 7 s.39-61
(1971).
8. Erdogan, F. Approximate solutions of Systems of
Singular Integral Equations.-
SIAM J. Appl. Math., vol 17 no 6 (1969).
9. Persson, A. Exempel på användning av integralekva-
tioner inom elastomekaniken.-
CTH inst. för hållf. publ. nr 13 (1962).
10. Sneddon, I.N.,
Lowengrub, M. Crack Problems in the Classical Theory of
Elasticity.-
Wiley, N.Y. (1969).
11. Abramowitz, M.,
Stegun, I.A. Handbook of Mathematical Functions.-
Dover, N.Y. (1968).
12. Ryshik, I.M.,
Gradstein, I.S.,
Tables of Series, Products, and Inte-
grals.-
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,
Berlin, DDR (1963) i översättning från
ryska.
13. Liebowitz, H. ed,
Rice, J.R. Fracture - An Advanced Treatise.-
Academic Press, N.Y. (1968).
Vol 2 Mathematical Fundamentals s. 192-31

1. Fourier's integralsats och Fouriertransformer

För varje styckvis differentierbar funktion $f(x)$ som är absolut integrerbar över intervallet $(-\infty, \infty)$ definierar Fourierintegralen

$$F\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx} dx \quad (A1)$$

en funktion. Integralen konvergerar absolut åtminstone för alla reella s . Den brukar också kallas Fouriertransformen $\tilde{f}(s)$.

Den ursprungliga funktionen $f(x)$ erhålles entydigt utom möjligen i ett ändligt antal punkter ur inversionsintegralen

$$F^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s) \cdot e^{isx} ds \quad (A2)$$

Om $f(x)$ skrivs som summan av en jämn och udda del erhålles

$$F\{f(x)\} = 2 \int_0^{\infty} f_j(x) \cos sxdx + 2i \int_0^{\infty} f_u(x) \sin sxdx \quad (A3)$$

så att om $f(x)$ är en reell funktion så är $\text{Re}[\tilde{f}(s)]$ alltid en jämn funktion och $\text{Im}[\tilde{f}(s)]$ alltid en udda funktion. (A3) kan alternativt skrivas

$$\tilde{f}(s) = 2 \tilde{f}_c(s) + 2i \tilde{f}_s(s) \quad (A4)$$

där $\tilde{f}_c$ och $\tilde{f}_s$ kallas Fouriercosinus- resp. Fouriersinustransformer. Inversion ger

$$\begin{cases} f_j(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{f}_c(s) \cos sxds \\ f_u(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{f}_s(s) \sin sxds \end{cases} \quad (A5)$$

För Fouriertransformerna gäller också om derivatan av högsta aktuella ordning uppfyller villkoren i Fourier's integralsats

$$F\left\{\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right\} = (is)^n \cdot \tilde{f}(s) \quad (A6)$$

2. Integrering av Greenfunktionerna (3.29)

För den aktuella belastningen medför geometrin att spricköppningen är kontinuerlig och ändlig överallt på sprickranden och kravet på f_1 och f_2 blir att de är kontinuerliga och ändliga överallt utom i sprickspetsarna där de har singulariteter $\sim (a^2 - t^2)^{-1/2}$. Integration av första sambandet i (3.29) ger

$$\begin{aligned}
 -\frac{4(1-\nu^2)}{E} p(x) = & \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^a f_1(t) dt \left\{ -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty -2s^2 h^2 e^{-2sh} \cos st e^{-sy} \cos sx ds \right\} \\
 & + \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^a f_2(t) dt \left\{ -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty [(2s^2 h^2 + 2sh + 1) e^{-2sh} - 1] \sin st e^{-sy} \cos sx ds \right\}
 \end{aligned} \quad (A7)$$

Då de två första delarna är likformigt konvergenta i s -led kan gränsovergången göras innanför integraltecknen. Utnyttjas symmetri-egenskaperna och

$$\begin{cases} \cos st \cos sx = \frac{1}{2} [\cos s(t-x) + \cos s(t+x)] \\ \sin st \sin sx = \frac{1}{2} [\sin s(t-x) + \sin s(t+x)] \end{cases} \quad \begin{matrix} t \rightarrow -t \\ t \rightarrow -t \end{matrix} \quad (A8)$$

erhålles

$$\begin{aligned}
 -\frac{4(1-\nu^2)}{E} p(x) = & \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a f_2(t) dt \int_0^\infty e^{-sy} \sin s(t-x) ds \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a f_1(t) dt \int_0^\infty 4s^2 h^2 e^{-2sh} \cos s(t-x) ds \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a f_2(t) dt \int_0^\infty [1 + (1+2sh)^2] e^{-2sh} \sin s(t-x) ds
 \end{aligned} \quad (A9)$$

Om den första delen i H.L. skrivs om med

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} \sin(t-x) ds = \frac{t-x}{(t-x)^2 + y^2} \quad (A10)$$

så erhålles den singulära delen i integralekvationen, dvs (A9) får formen

$$-\frac{4(1-y^2)}{E} p(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_2(t) dt}{t-x} + \int_{-a}^a [k_{11}(x,t)f_1(t) + k_{12}(x,t)f_2(t)] dt \quad (A11)$$

där

$$\left\{ \begin{aligned} k_{11}(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 4s^2 h^2 e^{-2sh} \cos s(t-x) ds \\ k_{12}(x,t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [1 + (1+2sh)^2] e^{-2sh} \sin s(t-x) ds \end{aligned} \right. \quad (A12)$$

Härmed har första hälften av (3.30) och (3.32) härletts. På liknande sätt härleds resten.

3. Tschebyscheffpolynom av första och andra slaget

Sambanden är hämtade ur Abramowitz och Stegun /11/ kap. 22.

Tschebyscheffpolynomen av första och andra slaget, $T_n(t)$ och $U_n(t)$ är definierade

$$\left\{ \begin{aligned} T_n(\cos\theta) &= \cos n\theta & \theta \in [0, \pi] \\ U_n(\cos\theta) &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \end{aligned} \right. \quad (A13)$$

eller om huvudgrenen väljs för arccosfunktionen

$$\left\{ \begin{aligned} T_n(t) &= \cos[n \arccos t] & t \in [-1, 1] \\ U_n(t) &= \frac{\sin[(n+1) \arccos t]}{\sin[\arccos t]} \end{aligned} \right. \quad (A14)$$

Härur följer att både $T_n(t)$ och $U_n(t)$ är udda funktioner i t för udda n och jämna funktioner för jämna n .

Ortogonalitetssambanden lyder

$$\int_{-1}^1 T_n(t) T_j(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \begin{cases} \pi & n = j = 0 \\ \frac{\pi}{2} & n = j \neq 0 \\ 0 & n \neq j \end{cases} \quad (A15)$$

och

$$\int_{-1}^1 U_n(t) U_j(t) \sqrt{1-t^2} dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n = j \\ 0 & n \neq j \end{cases} \quad (A16)$$

Dessutom gäller

$$\int_{-1}^1 T_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \pi U_{n-1}(x) & n \neq 0 \end{cases} \quad (A17)$$

4. Villkor för byte av integrationsordning

Om $f(x,y)$ är en nästan styckvis linjär funktion i varje delrektangel av planet $x \in [0, \infty)$, $y \in [c, d]$ och om den oegentliga integralen $\int_0^{\infty} f(x,y) dx$ konvergerar likformigt i den övre gränsen för alla $y \in [c, d]$ så gäller att integrationsordningen i följande integral kan kastas om med oförändrat resultat

$$\int_c^d dy \int_0^{\infty} f(x,y) dx = \int_0^{\infty} dx \int_c^d f(x,y) dy \quad (A18)$$

Nästan styckvis linjär innebär att singulariteter skall vara av typen

$$f(x_0, y) \sim \frac{N(x_0)}{|y-y_0|^\alpha}, \quad \alpha < 1 \quad (A19)$$

där $N(x_0)$ är en konstant, dvs både $f(x_0, y)$ och $|f(x_0, y)|$ skall vara integrerbara runt y_0 .

Den likformiga konvergensen innebär att om man för alla y kan finna en funktion $M(x)$ sådan att

$$|f(x,y)| \leq M(x) \quad \text{föör } x \rightarrow \infty \quad (A20)$$

där den oegentliga integralen $\int_0^{\infty} M(x) dx$ existerar så sägs den oegentliga integralen av $f(x,y)$ konvergera likformigt i den övre gränsen.

5. Lösning av integralerna i (3.43) och (3.46)

De aktuella integralerna i (3.43) är

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \int_{-1}^1 T_{2j-1}(t) \frac{\sin t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ I_2 = \int_{-1}^1 T_{2j}(t) \frac{\cos t}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{array} \right. \quad (A21)$$

Med substitutionen $t = \cos u$ och (A13)

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \cos u \\ dt = -\sin u du \\ \sqrt{1-t^2} = \sin u \end{array} \right. \quad (A22)$$

erhålles

$$I_1 = 2 \int_0^{\pi/2} \sin(\cos u) \cos(2j-1)u du \quad (A23)$$

som med Ryshik och Gradstein /12/ 3.481.4 kan uttryckas i en Besselfunktion av första slaget J_n .

$$I_1 = (-1)^{j-1} \pi J_{2j-1}(s) \quad (A24)$$

samma substitution i I_2 ger med /12/ 3.482.4

$$I_2 = (-1)^j \pi J_{2j}(s) \quad (A25)$$

Integralerna i (3.46) är

$$\left\{ \begin{array}{l} I_3 = \int_{-1}^1 U_{2n}(x) \cos x \sqrt{1-x^2} dx \\ I_4 = \int_{-1}^1 U_{2n+1}(x) \sin x \sqrt{1-x^2} dx \end{array} \right. \quad (A26)$$

Samma substitution som ovan $x = \cos u$ och (A14) ger

$$I_3 = 2 \int_0^{\pi/2} \cos(\cos u) \sin(2n+1)u \sin u du \quad (A27)$$

Med de trigonometriska additionssatserna erhålles

$$I_3 = - \int_0^{\pi/2} \cos(s \cos u) [\cos(2n+2)u - \cos 2nu] du \quad (A28)$$

som liksom I_2 kan uttryckas i Besselfunktioner av jämn ordning

$$I_3 = (-1)^n \frac{\pi}{2} [J_{2n+2}(s) + J_{2n}(s)] \quad (A29)$$

Rekursionsformeln för Besselfunktioner, se t.ex. /11/ 9.127 medger en ytterligare förenkling

$$I_3 = (-1)^n \pi \frac{2n+1}{s} J_{2n+1}(s) \quad (A30)$$

I_4 beräknas på liknande sätt

$$I_4 = (-1)^n \pi \frac{2n+2}{s} J_{2n+2}(s) \quad (A31)$$

6. Den likformiga konvergensen hos matriselementen M_{mj}

Uttrycket för M_{mj} kan skrivas enligt (3.55)

$$|M_{mj}| = m \int_0^{\infty} P_2(2sh) e^{-2sh} J_m(s) J_j(s) \frac{ds}{s}, \quad m, j = 1, 2, \dots \quad (A32)$$

Besselfunktionerna kan för små och stora argument ersättas av följande uttryck, se t.ex. /11/ 9.1.7 och 9.2.1

$$\left\{ \begin{array}{l} J_n(s) \sim \frac{s^n}{2^n n!}, \quad s \ll 1, \quad n = 0, 1, \dots \\ J_n(s) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cos(s - n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), \quad s \gg 1 \end{array} \right. \quad (A33)$$

Innebörden av (A33) är att integranden är begränsad när $s \rightarrow 0$ och att den är av ordningen 0 (e^{-2sh}) när $s \rightarrow \infty$. Med appendix 4 inses då att $M(s)$ kan väljas som en konstant ggr e^{-2sh} . Den oegentliga integralen av $M(s)$ över $[0, \infty)$ existerar för alla $h > 0$ varför elementen M_{mj} också är likformigt konvergenta för $h > 0$.

Den asymptotiska formen för Besselfunktionen $J_n(s)$ när ordningen blir stor är

$$J_n(s) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{es}{2n}\right)^n, \quad s \ll n \quad (A34)$$

Värdet på koefficienten M_{mj} överskattas säkert för stora m om $J_j(s)$ väljs som

$$\left\{ \begin{array}{l} J_j(s) = \frac{2}{\pi s} \\ J_m(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \left(\frac{es}{2m}\right)^m, & s < \frac{m}{K} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi s}}, & s > \frac{m}{K} \end{cases} \end{array} \right. \quad (A35)$$

där värdet på K är ganska godtyckligt men större än 1.

Uttrycket för $|M_{mj}|$ blir

$$|M_{mj}| = \frac{1}{\pi} \sqrt{m} \left(\frac{e}{2m}\right)^m \int_0^{\frac{m}{K}} P_2(2sh) e^{-2sh} s^{m-1/2} ds + \frac{2m}{\pi} \int_{\frac{m}{K}}^{\infty} P_2(2sh) e^{-2sh} \frac{ds}{s^2} \quad (A36)$$

eller

$$|M_{mj}| = \text{konst.} \cdot \sqrt{m} \left(\frac{e}{2m}\right)^m \int_0^{\frac{m}{K}} e^{-2sh} s^{m-1/2} ds + \text{konst.} \cdot m \int_{\frac{m}{K}}^{\infty} e^{-2sh} ds \quad (A37)$$

Om integralerna beräknas erhålles för $h > 0$

$$M_{mj} = \text{konst.} \cdot m \left(\frac{e}{2K}\right)^m e^{-\frac{2hm}{K}} + \text{konst.} \cdot m e^{-\frac{2hm}{K}} \quad (A38)$$

väljs t.ex. $K > 0.5e$ fås

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |M_{mj}| = 0 \quad (A39)$$

7. Elliptiska integraler och oegentliga integraler av Besselfunktioner

Med utgångspunkt från följande integral

$$S_{nk} = \int_0^{\infty} e^{-2sh} J_n(s) J_k(s) ds \quad (A40)$$

som kan betraktas som en funktion av h kan integralerna i (3.50) beräknas genom derivering i h . Detta är tillåtet för $h > 0$ eftersom alla integralerna M_{mj} är likformigt konvergenta. S_{00} och S_{11} kan uttryckas i fullständiga elliptiska integraler av första och andra slaget K och E . /12/ 4.435. Samma nomenklatur som i /11/ kap 17 används med parametern m som argument.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{00} = K\left(\frac{1}{h^2+1}\right) / \pi \sqrt{h^2+1} = \frac{1}{\pi} \sqrt{m} K(m) \\ S_{11} = \frac{1}{\pi} \sqrt{m} \left[\frac{2}{m} (K(m) - E(m)) - K(m) \right] \\ m = \frac{1}{\sqrt{h^2+1}} \end{array} \right. \quad (A41)$$

Då E och K kan uttryckas i ett par komplementära hypergeometrisk funktioner /11/ kap 15 och 17

$$\left\{ \begin{array}{l} K(m) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; m\right) \\ E(m) = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; m\right) \end{array} \right. \quad (A42)$$

så kan $F\left(\frac{1}{2}+j, \frac{1}{2}+k; 1+l; m\right)$ där j , k och l är heltal uttryckas som en linjärkombination av E och K där koefficienterna är rationella uttryck i j , k , l och $\sqrt{m}$. Med (A41) och relationer mellan Besselfunktioner av olika ordning /12/ kap 9 och 11 som

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{n+1}(+) + J_{n-1}(+) = \frac{2n}{+} J_n(+) \\ J_{n+1}(+) - J_{n-1}(+) = -2 J_n'(+) \\ J_{n+1}^2(+) = J_{n-1}^2(+) - \frac{4n}{+} J_n(+) J_n'(+) \end{array} \right. \quad (A43)$$

och

$$\int_0^+ J_n(x) J_{n+1}(x) dx = -\frac{1}{2} J_0^2(+) - \sum_{k=1}^n J_k^2(+) \quad (A44)$$

inses att det troligtvis går att bygga upp uttryck ur vilka S_{nk} kan erhållas antingen genom integrering eller derivering i h då deriverings-

reglerna för den hypergeometriska funktionen $F(a, b; c; m)$ bara ändrar parametrarnas a, b och c värden med heltal. Dessa uttryck blir linjärkombinationer av E och K där rationella funktioner av $\sqrt{m}$ och $\sqrt{1-m}$ ingår i koefficienterna och de torde snabbt bli mycket komplicerade.

Några formler användbara för beräkning av S_{nk} kan lätt härledas. Med (A44) erhålles efter partialintegrering

$$S_{n,n+1} = \frac{1}{2} - hS_{00} - 2n \sum_{k=1}^n S_{kk} \quad (A45)$$

Vidare fås med (A52) efter partialintegrering

$$S_{n+1,n+1} = S_{n-1,n-1} - 8n \int_h^\infty h' S_{nn} dh' \quad (A46)$$

och

$$S_{n,n+2} = -S_{nn} - 4(n+1) \int_h^\infty S_{n,n+1} dh' \quad (A47)$$

Dessa kan utvidgas till att omfatta $S_{n,n+k}$ men blir allt mer komplicerade. För S_{12} och S_{22} gäller alltså

$$\begin{cases} S_{12} = \frac{1}{2} - hS_{00} - hS_{11} \\ S_{22} = S_{00} - 8 \int_h^\infty h' S_{11} dh' \end{cases} \quad (A48)$$

För att belysa tekniken med hypergeometriska funktioner beräknas S_{22} .

Med variabel substitutionen $m' = (h'^2 + 1)^{-1}$ fås

$$I = \int_h^\infty S_{11} (h') h' dh' = \frac{1}{2} \int_0^m S_{11}(m') \frac{dm'}{m'^2} \quad (A49)$$

S_{11} uttryckas i hypergeometriska funktioner anpassade till integration

$$I = \frac{1}{4} \int_0^m m'^{-3/2} [F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; m') - F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; m')] dm' \quad (A50)$$

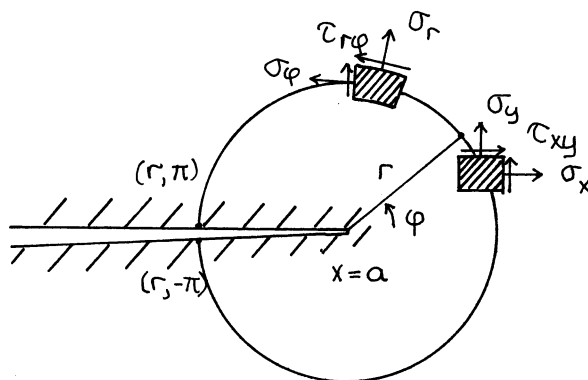
Integrationen utförs

$$I = -\frac{1}{2\sqrt{m}} [F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; m) - F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; m)] \quad (A51)$$

och den sista hypergeometrisk funktionen uttrycks i de elliptiska integralerna med Gauss formler så att S_{22} kan skrivas

$$S_{22} = \frac{\sqrt{m}}{\pi} K(m) - \frac{8}{\pi \sqrt{m}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) K(m) - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{m} - 1 \right) E(m) \right] \quad (A52)$$

8. Härledning av uttryck för storheterna i sprickspetsarna



Med utgångspunkt från figuren gäller för förhållandena nära sprickspetsen och definitionen på dislokationsfördelningarna (3.17)

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{\partial}{\partial x} [u_x^+ - u_x^-] = - \frac{\partial}{\partial r} [u_x(\varphi=\pi) - u_x(\varphi=-\pi)] \\ f_2(x) = \frac{\partial}{\partial x} [v_y^+ - v_y^-] = - \frac{\partial}{\partial r} [v_y(\varphi=\pi) - v_y(\varphi=-\pi)] \end{cases} \quad (A53)$$

Uttrycken för förskjutningarna nära sprickspetsen ges av, se t.ex. Rice /13, K_I och K_{II} är spänningsintensitetsfaktorer.

$$\begin{cases} u_x = \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[K_I \cos \frac{\varphi}{2} (\chi - 1 + 2\sin^2 \frac{\varphi}{2}) + K_{II} \sin \frac{\varphi}{2} (\chi + 1 + 2\cos^2 \frac{\varphi}{2}) \right] \\ v_y = \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[K_I \sin \frac{\varphi}{2} (\chi + 1 - 2\cos^2 \frac{\varphi}{2}) - K_{II} \cos \frac{\varphi}{2} (\chi - 1 - 2\sin^2 \frac{\varphi}{2}) \right] \end{cases} \quad (A54)$$

De kan också härledas ur de mer kända uttrycken för spänningarna nära sprickspetsen. Insättning av (A54) i (A53) ger för P.D.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = - \frac{4(1-\nu^2)}{E} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \\ f_2(x) = - \frac{4(1-\nu^2)}{E} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \end{array} \right. \quad (A55)$$

Och slutligen med uttryck för r i närheten av spetsen

$$r = a-x = \frac{a^2-x^2}{a+x} \approx \frac{a}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \hat{=} \frac{a}{2} (1-t^2) \quad (A56)$$

där sista ledet svarar mot den dimensionslösa konfigurationen.

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{II} = - \frac{4(1-\nu^2)}{E} \sqrt{\pi a} \lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{1-t^2} f_1(t) \\ K_I = - \frac{4(1-\nu^2)}{E} \sqrt{\pi a} \lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{1-t^2} f_2(t) \end{array} \right. \quad (A57)$$

Uttrycken för spänningarna nära sprickspetsen /13/

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}\right) - K_{II} \sin \frac{\varphi}{2} \left(2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2}\right) \right] \\ \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}\right) + K_{II} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \right] \\ \tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + K_{II} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}\right) \right] \end{array} \right. \quad (A58)$$

kan med välkända transformationssamband visas ge

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\varphi = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} - 3 \frac{K_{II}}{K_I} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ \tau_{r\varphi} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[\cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{K_{II}}{K_I} \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right] \end{array} \right. \quad (A59)$$

Den tangentiella normalspänningen σ_φ är störst för ett sådant värde på φ_0 att

$$\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} \bigg|_{\varphi = \varphi_0} = 0 \quad (60)$$

Men eftersom uttrycken för σ_φ och $\tau_{r\varphi}$ kan skrivas som produkter av funktioner som beror enbart av r resp. φ medför jämviktsekvationen i tangentiell led att φ_0 måste vara en huvudspänningsriktning. Det innebär

$$\tau_{r\varphi} \varphi = \varphi_0 = 0 \quad (\text{A61})$$

vilket i sin tur ger

$$\varphi_0 = -2 \operatorname{atan} \frac{\sqrt{K_{||}^2 + 8K_{||}^2 - K_{\perp}^2}}{4K_{||}} \quad (\text{A62})$$

så att när $K_{||} \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi_0 \rightarrow 0$.

9. Programlistor och resultatsutskrift

14 APR. 1971

```

// FOR
*NAME INDIA
*ARITHMETIC TRACE
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
  DIMENSION P(16),G(16,16),AUX(256),PP(16)
  COMMON V,B,N,NR,NK,VJ(16,12),VV
  EQUIVALENCE (AUX(1),G(1,1))
  ACOS(X)= ATAN(SQRT(1.-X*X)/X)
  DELK(X)= 1.-ABS(ABS(X)/X)
  PI= 3.141592
  VV= 0.
  NN= 0.
  NW= 0.
1  READ(2,2) V,B,N
2  FORMAT(2E10.0,I10)
17 NS= N/2
  ETT= ACOS(B)
  TVA= 0.5*PI-ETT
  P(1)= 1.+B*SIN(ETT)/TVA
  P(2)= 0.
  PP(1)= P(1)
  PP(2)= 0.
  DO 10 J= 2,NS
    P(2*J-1)= 0.5/TVA*(SIN(2*J*ETT)/J-SIN(2*(J-1)*ETT)/(J-1))
    PP(2*J-1)= P(2*J-1)
    P(2*J)= 0.
10  PP(2*J)= 0.
    IF(N-NN) 21,23,21
23  IF(V-VV) 21,22,21
21  DO 3 J= 1,N
    NR= J
    DO 3 K= NR,N
    NK= K
    XD= FLOAT(J-K)
    CALL FINN(FIND)
3  G(J,K)= FIND+DELK(XD)
    DO 11 J= 2,N
    NR= J
    NL= NR-1
    DO 11 K= 1,NL
    NK= K
    MI= (NR-1)/2+NK/2+(NR+NK)-(NK-1)/2-NR/2
11  G(J,K)= COS(MI*PI)*NR/NK*G(K,J)
    NX= 0
    DO 12 K= 1,N
    DO 12 J= 1,N
    NX= NX+1
12  AUX(NX)= G(J,K)
22  CALL SIMQ(AUX,P,N,KS)
    IF(KS) 4,6,4
4  WRITE(3,5)
5  FORMAT(1X,'SINGULAR SOLUTION')
    GO TO 1
6  SK1= 1.
    SK2= 0.
    VG= 0.
    BS= 0.
    DO 7 J= 1,NS
    P(2*J-1)= P(2*J-1)-PP(2*J-1)
    SK1= P(2*J-1)+SK1
    SK2= P(2*J)+SK2

```



PAGE 2

```

BS= P(2*J-1)/(2*J-1)*SIN((2*J-1)*ETT)+BS
7  VG= P(2*J-1)/(2*J-1)*PP(2*J-1)+VG
   IF(ABS(P(N-1)/SK1)-0.001) 13,13,14
13  IF(ABS(P(N)/SK2)-0.001) 16,16,14
14  IF(N-16) 15,16,16
15  N= N+2
   NN= N
   GO TO 17
16  F= SK2/SK1
   ST= -360./PI*ATAN((SQRT(1.+8.*F*F)-1.)/(4.*F))
   IF(B-0.01) 18,18,19
18  BS= 0.
   VG= 0.
   GO TO 20
19  TRE= SIN(ETT)-B*ALOG(B)/TVA
   FYRA= 1.+2.*B/TVA*TRE
   BS= 1.+BS/TRE-DELK(B-1.)
   VG= 1.+VG/FYRA
20  DO 9 J= 1,NS
9    P(2*J-1)= P(2*J-1)+PP(2*J-1)
   NW= NW+1
   MW= (NW+2)/3-(NW+1)/3
   IF(MW) 33,33,31
31  WRITE(3,32)
32  FORMAT(1H1)
33  WRITE(3,34) V,B,N,(P(2*J-1),J=1,NS)
34  FORMAT(1X,'FORSATTNING',6X,'V=',E15.7/1X,'LASTUTBREDNING',3X,'B=',
1E15.7/1X,'ANTAL EKVATIONER',1X,'N=',I2/1X,'KOEFFICIENTVEKTORN A'/
21X,'UDDA TERMER'/1X,8E14.6)
   WRITE(3,35) (P(2*J),J=1,NS)
35  FORMAT(1X,'JAMNA TERMER'/1X,8E14.6)
   WRITE(3,36) SK1,SK2,ST,BS,VG
36  FORMAT(1X,'SPANNINGSINTENSITETSFAKTORER OCH HUVUDSPANNINGSRIKTNING
1'/1X,'KI=',E15.7,5X,'KII=',E15.7,5X,'TET=',F6.2/1X,'SPRICKBREDD OC
2H SPRICKVOLYM'/1X,'B=',E15.7,5X,'V=',E15.7,///)
   VV= V
   NN= N
   GO TO 1
END

```

FEATURES SUPPORTED
 ARITHMETIC TRACE
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR INDIA
 COMMON 394 VARIABLES 632 PROGRAM 1152

END OF COMPILATION

// DUP

```

*DELETE          INDIA
CART ID 0003    DB ADDR 51A0    DB CNT  0050

*STORE          WS  UA  INDIA
CART ID 0003    DB ADDR 54FC    DB CNT  0050

```

PAGE 14

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS

```

SUBROUTINE FINN(FIND)
  DIMENSION XI(12),WI(12)
  COMMON V,B,N,NR,NK,VJ(16,12),VV
  DATA XI/0.11572,0.61176,1.51261,2.83375,4.59922,6.84453,9.62132,
*13.00605,17.11686,22.15109,28.48797,37.09912/
  DATA WI/2.64731E-1,3.77759E-1,2.44082E-1,9.04492E-2,2.01024E-2,
*2.66397E-3,2.03232E-4,8.36506E-6,1.66849E-7,1.34239E-9,
*3.06160E-12,8.14808E-16/
  PI= 3.141592
  IF(VV) 12,20,12
20  NC= NR/2+NK/2
  IF(NC) 10,10,12
10  DO 11 J= 1,12
    CALL BESJ(XI(J),16,BN,0.0001,IEN)
    VJ(16,J)= BN
    CALL BESJ(XI(J),15,BK,0.0001,IEK)
    VJ(15,J)= BK
    JN= 14
    DO 11 K= 1,JN
      KN= 15-K
11  VJ(KN,J)= 2.*(KN+1.)/XI(J)*VJ(KN+1,J)-VJ(KN+2,J)
12  GLINT= 0.
    DO 13 J= 1,12
      X= 2.*V*XI(J)
      AR= COS(NR*PI)
      AK= COS(NK*PI)
      L= 0.5*(5.+2.*AR+AK)+0.001
      GO TO (1,2,3,4),L
1  FIND= -(1.+(1.+X)**2)
      GO TO 5
2  FIND= X*X
      GO TO 5
3  FIND= -X*X
      GO TO 5
4  FIND= 1.+(1.-X)**2
5  M= (NR-1)/2+NK/2
      AM= COS(M*PI)
      IF(X) 7,6,7
6  FIND= 0.
7  FIND= AM*NR*EXP(XI(J)-X)*FIND*VJ(NK,J)*VJ(NR,J)/XI(J)
13 GLINT= WI(J)*FIND+GLINT
      FIND= GLINT
      RETURN
    END

```

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR FINN

COMMON 394 VARIABLES 82 PROGRAM 416

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0068 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA FINN

CART ID 0003 DB ADDR 5440 DB CNT 0024

FORSATTNING V= 0.1000000E 01
 LASTUTBREDNING B= 0.6000000E 00
 ANTAL EKVATIONER N= 8
 KOEFFICIENTVEKTORN A
 UDGA TERMER

0.298505E 01 -0.130666E 01 0.725227E-01 0.344990E 00
 JAMNA TERMER
 0.415541E 00 -0.739442E-01 0.566746E-02 -0.200694E-03
 SPANNINGSINTENSITETSFAKTORER OCH HUVUDSPANNINGSRIKTNING
 KI= 0.1919791E 01 KII= 0.3470638E 00 TET=-19.32
 SPRICKBREDD OCH SPRICKVOLYM
 B= 0.1738951E 01 V= 0.1673245E 01

FORSATTNING V= 0.8000000E 00
 LASTUTBREDNING B= 0.6000000E 00
 ANTAL EKVATIONER N=10
 KOEFFICIENTVEKTORN A
 UDGA TERMER

0.366364E 01 -0.166177E 01 0.119852E 00 0.342786E 00 -0.152699E 00
 JAMNA TERMER
 0.690648E 00 -0.154219E 00 0.125637E-01 -0.160711E-03 -0.703302E-04
 SPANNINGSINTENSITETSFAKTORER OCH HUVUDSPANNINGSRIKTNING
 KI= 0.2288302E 01 KII= 0.5487619E 00 TET=-24.50
 SPRICKBREDD OCH SPRICKVOLYM
 B= 0.2124200E 01 V= 0.2057274E 01

FORSATTNING V= 0.6000000E 00
 LASTUTBREDNING B= 0.6000000E 00
 ANTAL EKVATIONER N=10
 KOEFFICIENTVEKTORN A
 UDGA TERMER

0.515403E 01 -0.261599E 01 0.259139E 00 0.340878E 00 -0.154528E 00
 JAMNA TERMER
 0.127816E 01 -0.356826E 00 0.262770E-01 0.248860E-02 -0.623342E-03
 SPANNINGSINTENSITETSFAKTORER OCH HUVUDSPANNINGSRIKTNING
 KI= 0.2960026E 01 KII= 0.9494829E 00 TET=-30.53
 SPRICKBREDD OCH SPRICKVOLYM
 B= 0.2948729E 01 V= 0.2917266E 01