

BETYDELSEN AV GASENS FÖRDELNING I EN PLAN
SPRICKA.

F. Ouchterlony

DS 1970:50

30.11.1970

STIFTELSEN
SVENSK DETONIKFORSKNING

SWEDISH DETONIC RESEARCH FOUNDATION

VINTERVIKEN — 117 48 STOCKHOLM
SWEDEN

BETYDELSEN AV GASENS FÖRDELNING I EN PLAN
SPRICKA.

F. Ouchterlony

DS 1970:50

30.11.1970

Sammanfattning.

Gasens fördelning i spricksystemet under sprickfortplantningsfasen av sönderbrytningsförloppet vid bergsprängning påverkar spänningstillståndet vid sprickspetsen avsevärt. Härigenom kommer också den för den linjära brottmekaniken centrala energibalansen i sprickspetsen att variera med gasens fördelning, /1/ och /2/. Rapportens första del behandlar spänningsintensitetsfaktorns K_I variationer med spricklängd och fördelning eller "fyllnadsgrad" för en plan spricka.

För att kunna uttala sig om hur fyllnadsgraden varierar under fortplantningsförloppet krävs kännedom, dels om sprickinitieringsförloppet som diskuteras bl.a. i /3/, dels om villkoren för gasströmning genom tunna spalter. För den sistnämnda finns förutom gasens egenskaper två intressanta parametrar, sprick- eller spaltbredden och sprickväggarnas ytbeskaffenhet. Rapportens andra del innehåller en beräkning av sprickbreddens variation med spricklängd och fyllnadsgrad.

Slutligen diskuteras de numeriska resultaten och en möjlig bild av sprickfortplantningsförloppet.

1. Spänningsintensitetsfaktorns variation med spricklängd och fyllnadsgrad.

1.1 Analys av den plana sprickan.

Bergmaterialet betraktas i analysen som linjärt elastiskt, isotropt och homogent. Sprickan är plan och plant deformationstillstånd (P.D.) antas råda. Spänningstillståndet i sprickspetsen beskrivs av spänningsintensitetsfaktorn K_I , se /1/ för några olika geometrier.

Spänningstillståndet i sprickspetsen i en plan spricka varierar kraftigt med belastningens utseende. För ett jämnt fördelat inre övertryck gäller, /1/

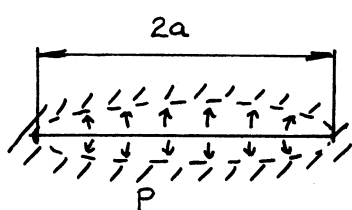


fig. 1

$$K_I = p \sqrt{\pi a} \quad (1)$$

För fallet centralt angripande kraftpar F , där F representerar kraftverkan från ett gasfyllt borrhål gäller om radien $R \ll a$

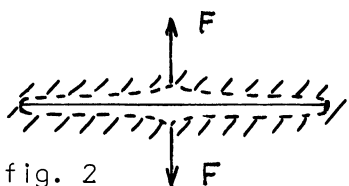


fig. 2

$$K_I = \frac{F}{\sqrt{\pi a}} \approx \frac{2pR}{\sqrt{\pi a}} \quad (2)$$

En jämförelse mellan K_I -värden ur (1) och (2) är inte meningsfull så länge trycken inte kan relateras till varandra, vilket görs med den elasticitetsteoretiskt beräknade volymen V (m^3) och en gaslag av något slag. För en allmännare balanserad tryckfördelning gäller, /4/.

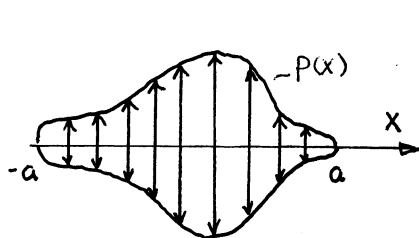


fig. 3

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a p(x) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \quad (3)$$

(1) och (2) är specialfall av denna. För att underlätta de fortsatta räkningarna används en symmetrisk tryckfördelning med konstant amplitud p och variabel längd $2b$. Se fig. 4. Gasvolymen bestäms av, /5/ s.118.

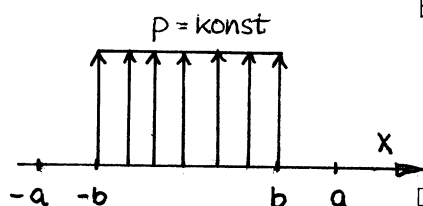


fig. 4

$$V = \frac{2U}{p} \quad (4)$$

Den elastiska energin U är i sin tur given av, /2/ eller /6/

$$U(b,a) = U(b,b) + 2 \cdot \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \int_b^a K_I^2(b,x) dx \quad (5)$$

Här ges $K_I(b,a)$ av (3)

$$K_I(b,a) = \frac{p}{\sqrt{\pi} a} \int_{-b}^b \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = \frac{2p}{\pi} \cdot \sqrt{a} \arcsin \frac{b}{a} \quad (6)$$

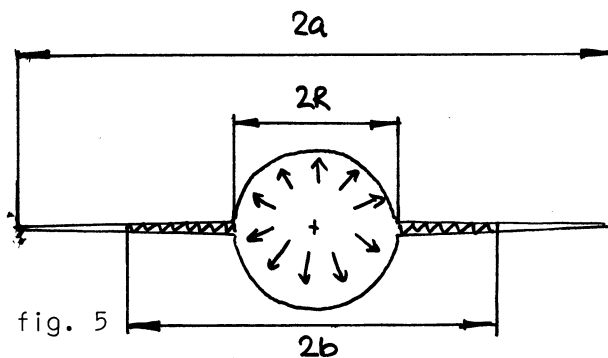
Uttrycken (4), (5) och (6) ger gasvolymen, integralen löses med standardmetoder, se appendix 1.

$$U(b,a) = \frac{8(1-\nu^2)}{\pi E} p^2 \cdot \left[\frac{a^2}{2} \cdot \arcsin^2 \frac{b}{a} + b \sqrt{a^2 - b^2} \arcsin \frac{b}{a} - b^2 \ln \frac{b}{a} \right] \quad (7)$$

$$V = \frac{16(1-\nu^2)p}{\pi E} \left[\frac{a^2}{2} \cdot \arcsin \frac{b}{a} + b \sqrt{a^2 - b^2} \arcsin \frac{b}{a} - b^2 \ln \frac{b}{a} \right] \quad (8)$$

Rimlighetskontroll av uttrycket (8) ger

$$\begin{cases} \lim_{b \rightarrow a} V = \frac{2\pi(1-\nu^2)pa^2}{E} \\ \lim_{b \rightarrow 0} V = 0 \end{cases} \quad (9)$$



Hänsyn måste också tas till borrhålens volym, analogt [7] förutsätts

$$a \gg b > 2R \quad (10)$$

Den totala gasvolymen ges av, se [2]

$$V(a, \frac{b}{a}) \approx \pi R^2 + \frac{8(1-\nu^2)pa^2}{\pi E} \cdot \left[\arcsin^2 \frac{b}{a} + 2 \frac{b}{a} \cdot \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2} \arcsin \frac{b}{a} - 2(\frac{b}{a})^2 \ln \frac{b}{a} \right] \quad (11)$$

Med en gaslag av Poissonstyp, där index 0 anger begynnelsevärden,

$$pV^{\chi} = \text{konst} = C_0 \quad (12)$$

erhålles ett implicit uttryck för $K_I(a, \frac{b}{a})$ ur (6) och (11) med R och C_0 som parametrar utöver materialkonstanterna χ , E och ν . Detta får formen

$$C_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot a^{1/2} \arcsin \frac{b}{a} = K_I \cdot \left\{ \pi R^2 + \frac{4(1-\nu^2)}{\sqrt{\pi} \cdot E} a^{3/2} \cdot K_I \cdot \left[\arcsin \frac{b}{a} + 2 \frac{b}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} - \frac{2 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \ln \frac{b}{a}}{\arcsin \frac{b}{a}} \right] \right\}^2 \quad (13)$$

1.2 Förändringar i borrhålsranden.

Eftersom området närmast borrhålsranden utsätts för mycket höga tryck måste inverkan av olika typer av möjliga förändringar i denna uppskattas. Dessa typer är

1. Rent elastiska deformationer
2. Icke elastiska eller irreversibla deformationer
3. En utbildad krosszon kring borrhålet

Den statiska elastiska volymsökningen för en hålkropp utsatt för inre övertryck ges av

$$\Delta V_0 = \frac{2\pi(1+\nu)pR^2}{E} \quad (14)$$

De icke elastiska deformationer som uppträder är svårare att uppskatta men troligtvis kan de bli avsevärda t.ex. när en laddning bringas detonera i ett fulladdat borrhål, se /8/ .

Med krosszon menas här ett område närmast den ursprungliga borrhålsranden där bergmaterialet krossats och som spränggaserna genomträngt så att det blivit allsidigt komprimerat. Se fig. 6.

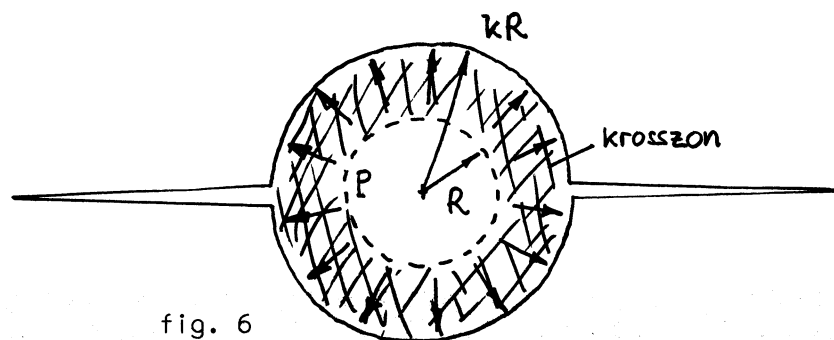


fig. 6

Om bergmaterialets kompressibilitetskoefficient betecknas med κ och krosszonens utsträckning med $k \cdot R$ erhålles

$$\Delta V_0 = \pi \kappa p (k^2 - 1) R^2 \quad (15)$$

1.3 Numeriska beräkningar.

Beräkningen av $K_I(a, \frac{b}{a})$ har gjorts med en Hewlett-Packard bordskalkylator 9100B och program 70014 för lösning av implicita ekvationer varför (13) skrivits på formen $f(a, \frac{b}{a}; K_I)$. Värden på ingående parametrar har valts som i /2/, K är taget från /9/.

$$\begin{aligned} E &= 10.5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \\ \nu &= 0.228 \\ \chi &= 1.33 \\ p_0 &= 10^8 \text{ N/m}^2 \\ V_0 &= 3.71 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{m} \\ R &= 0.01 \text{ m} \\ K &= 2 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N} \end{aligned} \quad (16)$$

Resultaten finns redovisade i tabell 1 och diagram 1-3. De relativa bidragen från (14) och (15) blir maximalt, $k \leq 3$

$$\frac{\Delta V_0}{V_{0 \text{ max}}} = 0.003 \text{ resp. } 0.016 \quad (17)$$

De försummas.

2. Sprickbreddens variation med spricklängd och fyllnadsgrad.

2.1 Analys

För en plan spricka helt fylld med gas av konstant tryck blir sprickformen elliptisk, /10/. Tvärdeformationen ges av

$$u(x) = \frac{2(1-\nu^2)p}{E} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (18)$$

Sprickbredden ändras förhållandevis lite över ett stort längdintervall varför $u(0)$ används som representativt breddmått

$$u(0) = \frac{2(1-\nu^2)p}{E} a \quad (19)$$

Eftersom $K_I(a)$ redan är beräknad ger (1)

$$u(0) = \frac{2(1-\nu^2)}{\sqrt{\pi} E} \cdot K_I(a) \cdot a^{1/2} \quad (20)$$

För stora a kan πR^2 - termen i parentesen i H.L. i (13) försummas varför

$$\lim_{a \rightarrow \infty} K_I \propto a^{-\frac{3\mathcal{R}-1}{2(\mathcal{R}+1)}} = 0 \quad (21)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} u(o) \propto a^{-\frac{\mathcal{R}-1}{\mathcal{R}+1}} = 0 \quad (22)$$

För en plan spricka delvis fylld med gas av konstant tryck erhålles dels för deformationen i mittpunkten $V(o)$, dels för deformationen i den punkt där tryckfördelningen slutar $V(\frac{b}{a})$, se appendix 2.

$$V(o) = \frac{2(1-\nu^2)pa}{E} \left[\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2}}{1 - \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2}} \right] \quad (23)$$

$$V(\frac{b}{a}) = \frac{4(1-\nu^2)pa}{\pi E} \left[\sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2} \arcsin \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \ln \frac{b}{a} \right] \quad (24)$$

Ur (23) erhålles (19) när $\frac{b}{a} \rightarrow 1$, när $\frac{b}{a} \rightarrow 0$ går täljaren i $\ln$ -termen mot 0 så att deformationen under en angripande kraft, jfr fig 2 går mot ∞ . Eftersom $V(\frac{b}{a})$ är avgörande för hur snabbt gasen kan fortsätta att tränga in i sprickan skrivs (24) om med uttryck (6)

$$V(\frac{b}{a}) = \frac{2(1-\nu^2)}{\sqrt{\pi} E} \cdot K_I(a, \frac{b}{a}) \cdot a^{1/2} \cdot \left[\sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2} - \frac{\frac{b}{a} \ln \frac{b}{a}}{\arcsin \frac{b}{a}} \right] \quad (25)$$

2.2 Numeriska beräkningar.

Beräkningarna har skett som under 1.3. Resultaten finns för $u(o)$ redovisade i tabell 2 och diagram 4 samt för $V(\frac{b}{a})$ i tabell 3 och diagram 4-5. Sprickbredden är 2 ggr de värden som beräknats.

3. Diskussion av resultaten.

Ur tabell 1 och diagram 1-3 kan utläsas att spänningsintensitetsfaktorn K_I ökar med fyllnadsgraden oberoende av spricklängden. Beroendet är kraftigast när gasen antingen nästan inte alls trängit in i sprickorna eller när den nästan helt fyller ut dem. I ett intervall $0.1 \leq \frac{b}{a} \leq 0.8$ varierar K_I obetydligt med fyllnadsgraden för långa sprickor.

Vid konstant fyllnadsgrad uppvisar K_I :s beroende av spricklängden ett maximum som med ökande fyllnadsgrad förskjuts mot allt kortare spricklängder. Beroende på hur fyllnadsgraden ändras med ökande spricklängd kan detta max. förstärkas eller helt försvinna.

Beträffande sprickbredden kan genom tabell 2-3 och diagram 4-5 konstateras att oavsett spricklängd uppträder en markant ökning av lutningen i $V(\frac{b}{a})$ för $\frac{b}{a} = 0.8$ dvs det blir snabbt allt svårare för gasen att fylla ut sprickan med ökande fyllningsgrad. Vidare att inom intervallet $0.1 \leq \frac{b}{a} \leq 0.8$ sprickbredden varierar förhållandevis lite. För längre sprickor uppvisar $V(\frac{b}{a})$ ett max. vid mycket små fyllnadsgrader.

Sprickbreddens beroende av spricklängden vid konstant fyllnadsgrad har samma principiella utseende som $K_I(a)$. En jämförelse mellan K_I -värdena för helt gasfyllda sprickor resp. sprickor där gasen stannar i borrhålet ger en 10-faktor, se diagram 1. En jämförelse direkt ur (1) och (2) skulle för $a = 1$ m givit $c:a$ 150 och för $a = 10$ m $c:a$ 1500. Sprickbredden är som störst ca 0.8 mm, ett mått som är av samma storlek som sprickväggarnas ytråhet.

Både spänningsintensitetsfaktorn K_I och sprickbredden går mot 0 för ökande spricklängder, se (21) resp (22). Det sistnämnda förhållandet försvårar en eventuell ökning av fyllnadsgraden allteftersom sprickan fortplantas.

Beträffande gasens framträngning i sprickorna och dess inverkan på sprickfortplantningen kan då följande sägas.

1. Sprickfortplantningen underlättas av en hög fyllnadsgrad, en stor spricklängd verkar i motsatt riktning.
2. Sprickbreddens minskning med ökande fyllnadsgrad blir allt påtagligare för stora spricklängder. Härigenom minskar sannolikheten för att gasen skall fylla ut sprickan ju längre denna blir så länge $K_I > K_{IC}$

När spänningsintensitetsfaktorn K_I underskrider ett för materialet karakteristiskt värde som kallas brottsegheten, K_{IC} stannar sprickan. Detta villkor behandlas närmare i /1/ och /2/. Det värde på K_{IC} som användes i /2/ var

$$K_{IC} = 0.9 \cdot 10^7 \text{ N/m}^{3/2} \quad (26)$$

Ur diagram 2 och 3 kan en möjlig bild av sprickfortplantningsförloppet presenteras. Sprickorna initieras, /3/ och /8/ och har redan från början en viss längd $5 \times R$ vilket alltså svarar mot en fyllnadsgrad ≈ 0.2 .

Detta räcker för att sprickorna skall fortplantas. Under ungefärligen konstant fyllnadsgrad växer därefter sprickorna tills de är 2-3 m långa.

Denna fas sker med höghastighet. För att sprickorna sedan skall fortsätta att växa krävs en ökande fyllnadsgrad, K_l oscillerar kring det kritiska värdet K_{lc} varför denna fas sker diskontinuerligt och med betydligt lägre medelhastighet. Inverkan av bl.a. den axiala gasströmningen i borrhålet och avvikelser från den idealiserade tryckfördelningen gör att det värde på spricklängden vid fyllnadsgraden som svarar mot (26) bör betraktas som en övre gräns för möjlig sprickfortplantning.

Värdet av diskussionen skall ses mot bakgrund av dels det kvasistationära betraktelsesättet dels godtyckligheten i valda begynnelsevärden p_0 och V_0 i (16). Den ansluter till resultaten i /2/.

Tabell 1.

Spänningsintensitetsfaktorn K_I som funktion av spricklängd a och fyllnadsgrad $\frac{b}{a} K_I i [N/m^{3/2}] \times 10^{-8}$

$\frac{b/a}{a}$	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
0.05	0.4619	0.3306	0.2757	0.2324	0.1946	0.1597		0.0945		0.0315
0.1	0.5607	0.4042	0.3413	0.2922	0.2490	0.2084	0.1686	0.1284	0.0871	0.0442
0.2	0.5679	0.4135	0.3553	0.3114	0.2732	0.2369	0.1999	0.1598	0.1142	0.0688
0.3	0.5240	0.3835	0.3325	0.2951	0.2633	0.2333	0.2026	0.1683	0.1265	0.0717
0.4	0.4796	0.3519	0.3068		0.2471	0.2220	0.1963	0.1675	0.1311	0.0787
0.5	0.4412	0.3244	0.2837	0.2548	0.2311	0.2094	0.1876	0.1631	0.1316	0.0833
0.6	0.4089	0.3009	0.2638		0.2165	0.1975		0.1574		0.0860
0.7	0.3816	0.2812	0.2469	0.2230	0.2038	0.1867		0.1514		0.0875
0.8	0.3584	0.2642	0.2323			0.1771		0.1455		0.0881
0.9	0.3383	0.2496	0.2197	0.1991		0.1685		0.1400		0.0880
1.0	0.3209	0.2368	0.2086	0.1893	0.1741	0.1609	0.1483	0.1348	0.1175	0.0876
1.5	0.2588	0.1912	0.1689			0.1324		0.1139	0.1024	0.0824
2.0	0.2203	0.1630	0.1441			0.1139	0.1066	0.0994		0.0762
3.0	0.1741	0.1289	0.1141	0.1044	0.0970	0.0909	0.0857	0.0806	0.0749	0.0658
5.0	0.1281	0.0949	0.0841			0.0675		0.0606		0.0521
10.0	0.0835	0.0619	0.0549	0.0504	0.0470	0.0444	0.0421	0.0402	0.0383	0.0361
20.0	0.0540	0.0400	0.0356			0.0288		0.0263		0.0241

Tabell 2.

Halva sprickbredden $u(o)$ för en plan gasfylld spricka som funktion av spricklängden a

a [m]	0.5	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0	5.0	10.0	20.0
a $[N/m^{3/2}] \times 10^{-8}$	0.4619	0.5607	0.5679	0.5240	0.4412	0.3209	0.2203	0.1741	0.1281	0.0835	0.0540
$u(o)$ [m] $\times 10^{-3}$	0.1052	0.1806	0.2587	0.2924	0.3178	0.3269	0.3174	0.3072	0.2918	0.2690	0.2460

Tabell 3.

Halva sprickbredden $V(\frac{b}{a})$ för en plan spricka delvis fylld med gas som funktion av spricklängd a , fyllnadsgrad

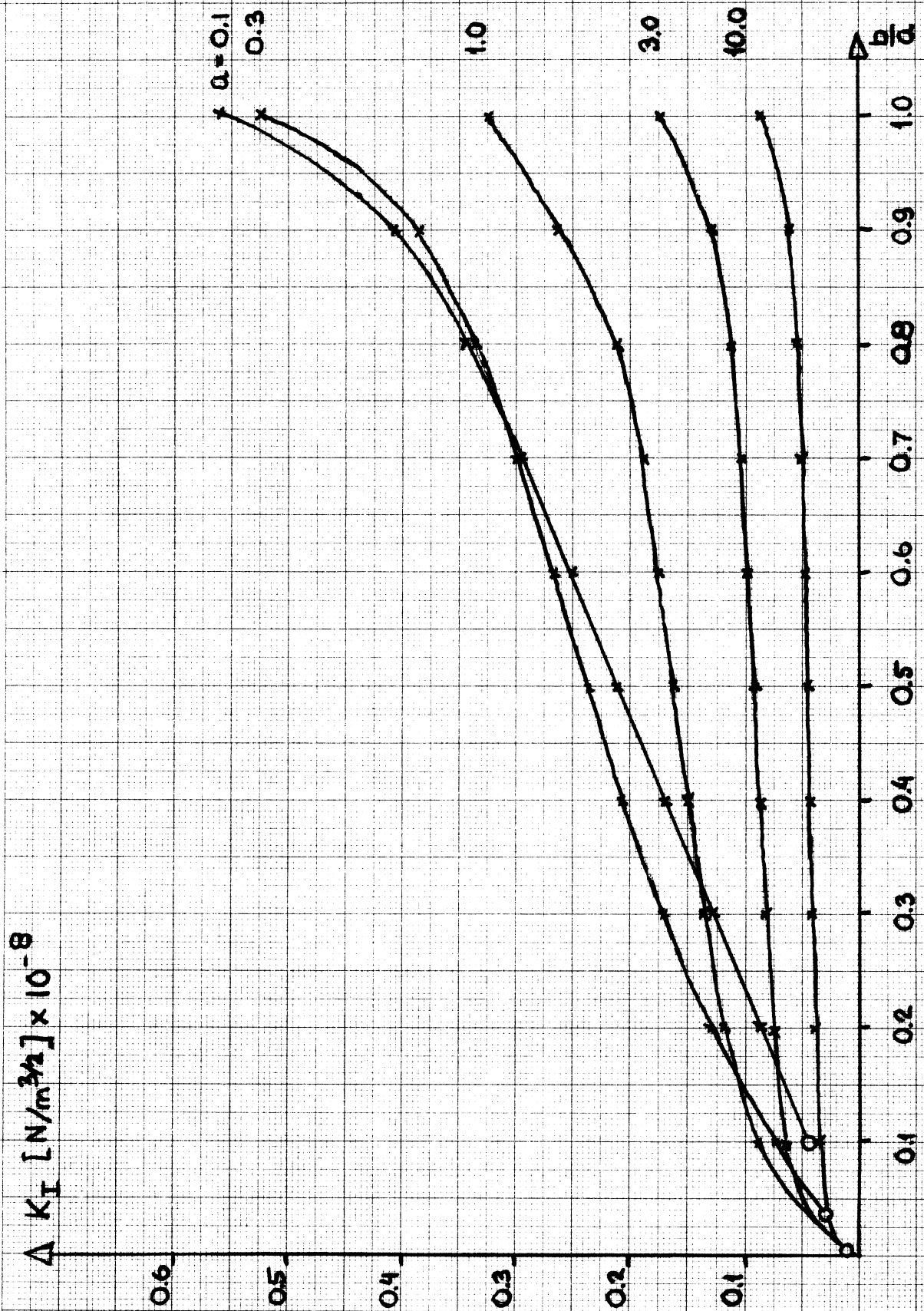
$$\frac{b}{a}; V(\frac{b}{a}) \text{ i } [m] \times 10^3$$

$\frac{a}{b/a}$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0	5.0	10.0	20.0
0.1	0.0236	0.0469	0.1032	0.1318	0.1977	0.2939	0.3616	0.3824	0.3909	0.3831	0.3617
0.2		0.0724	0.1342	0.1820	0.2444	0.3086		0.3408		0.3181	
0.3	0.0461	0.0885	0.1558	0.2009	0.2514	0.2938	0.3064	0.3043	0.2953	0.2771	0.2564
0.4		0.0982	0.1646	0.2043	0.2442	0.2730	0.2776	0.2733		0.2451	
0.5	0.0556	0.1026	0.1649	0.1989	0.2305	0.2505	0.2507	0.2451	0.2349	0.2186	0.2005
0.6	0.0566	0.1024	0.1589	0.1875	0.2125	0.2264		0.2185		0.1933	
0.7	0.0549	0.0975	0.1470	0.1706	0.1902	0.1998		0.1909		0.1682	
0.8	0.0498	0.0871	0.1283	0.1470	0.1620	0.1684	0.1645	0.1596	0.1518	0.1402	0.1285
0.9	0.0265	0.0457	0.0662	0.0752	0.0821	0.0847	0.0825	0.0799	0.0759	0.0700	0.0640
1.0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

SPÄNNINGSINTENSITETSFAKTORN K_I SOM
FUNKTION AV FYLNADSGRADEN VID
KONSTANT SPRICKLÄNGD.

DIAGRAM 1

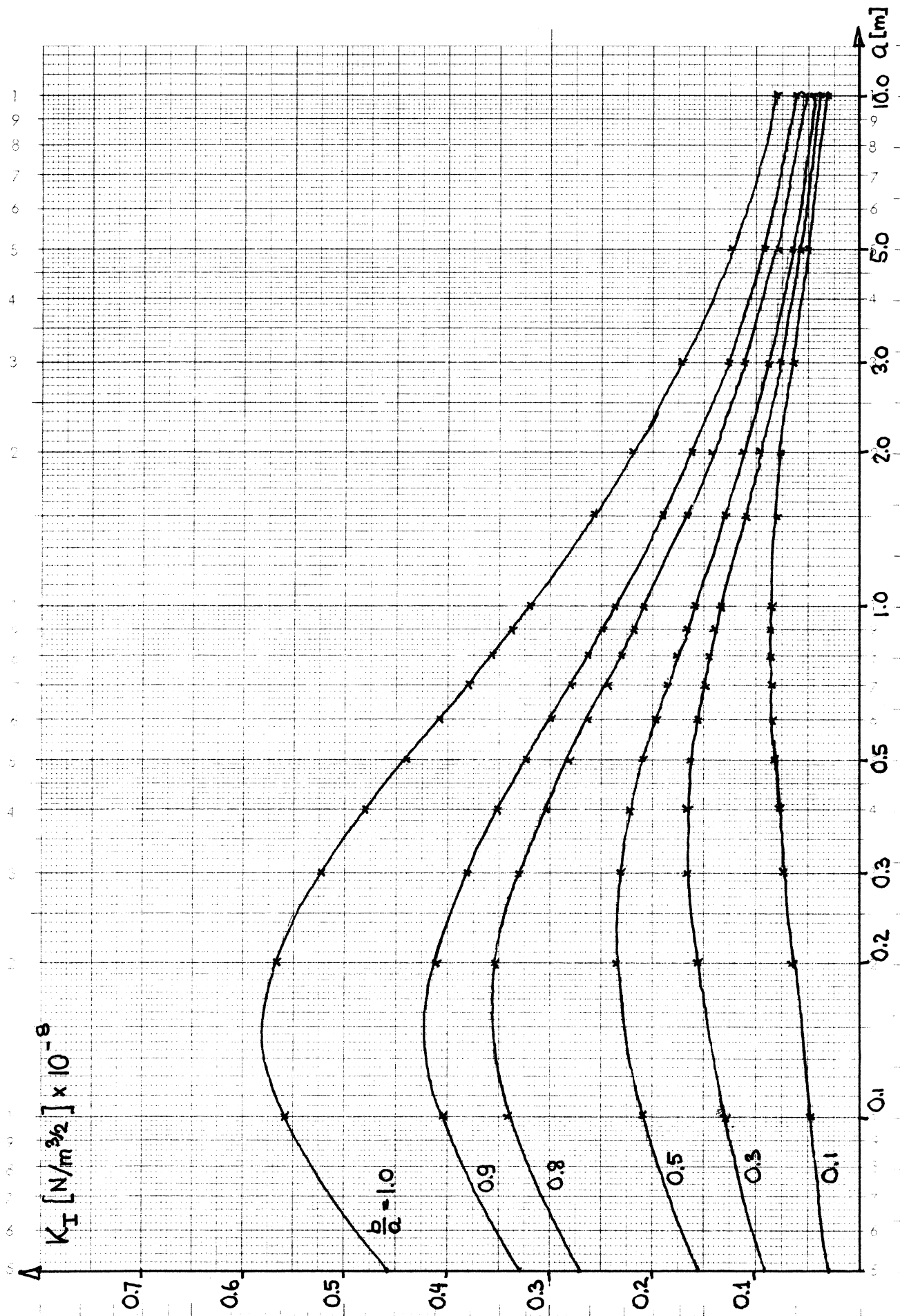
F0M - 70



SPÄNNINGSINTENSITETSFAKTORN K_I SOM
FUNKTION AV SPRICKLÄNGDEN VID KONSTANT
FYLLEADSGRAD

DIAGRAM 2

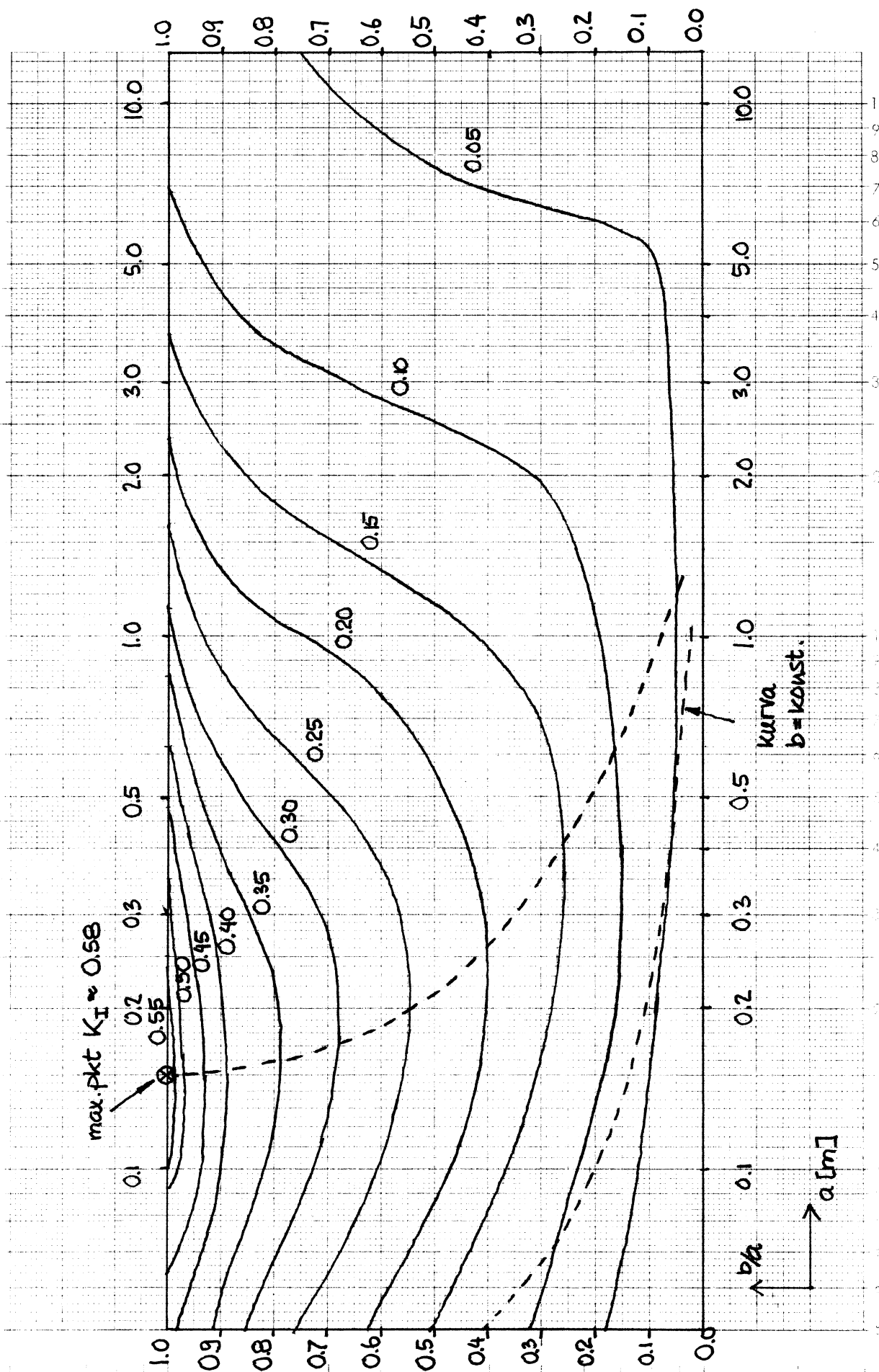
F04-70



NIVÅLINJER FÖR SPÄNNINGSINTENSITETS -
FAKTORN K_I SOM FUNKTION AV SPRICK-
LÄNGD OCH FYLLNADSGRAD.

DIAGRAM 3

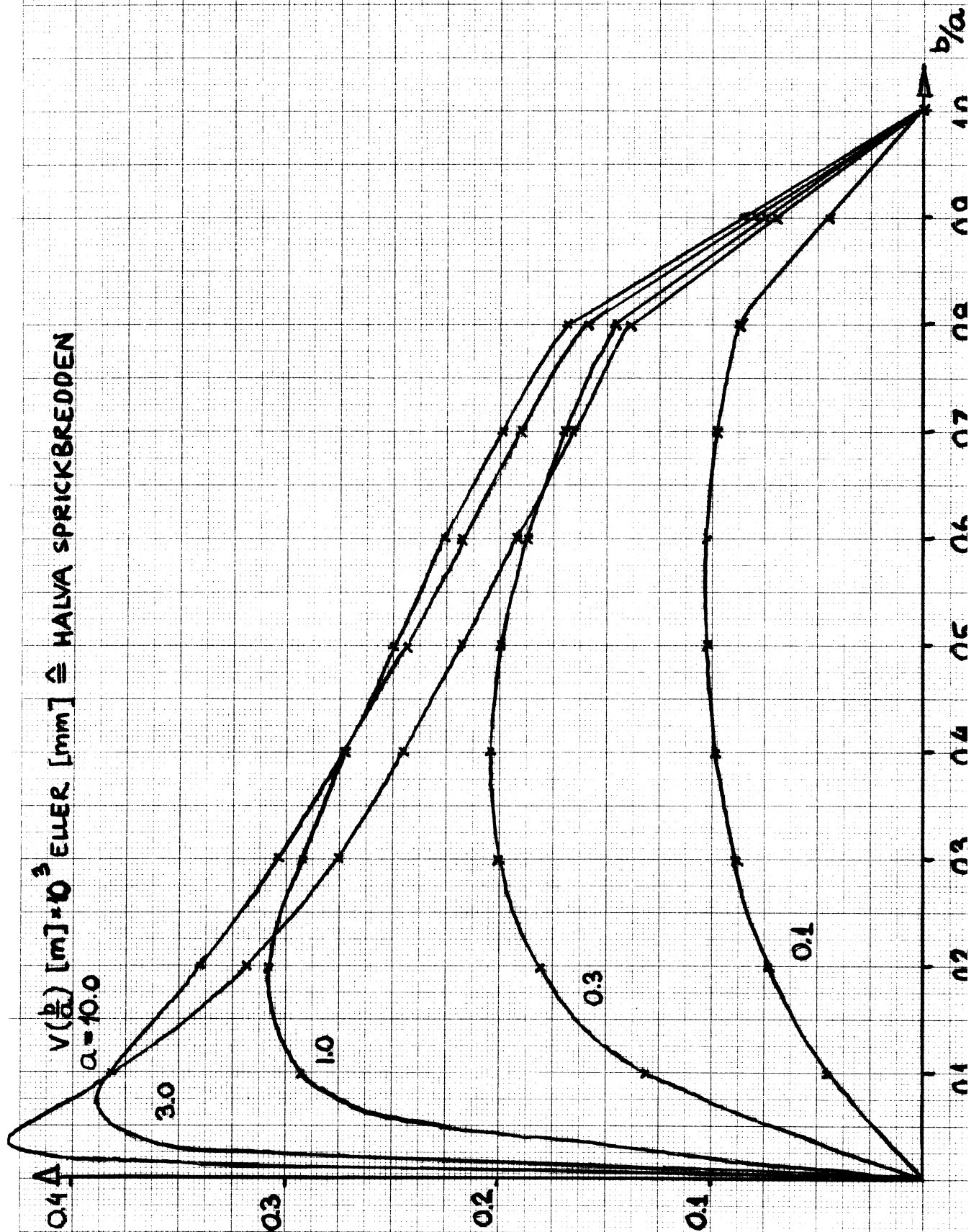
F04 - 70



SPRICKBREDDEN $V(\frac{b}{a})$ SOM FUNKTION AV
FYLNADSGRADEN VID KONSTANT SPRICK-
LÄNGD.

DIAGRAM 4

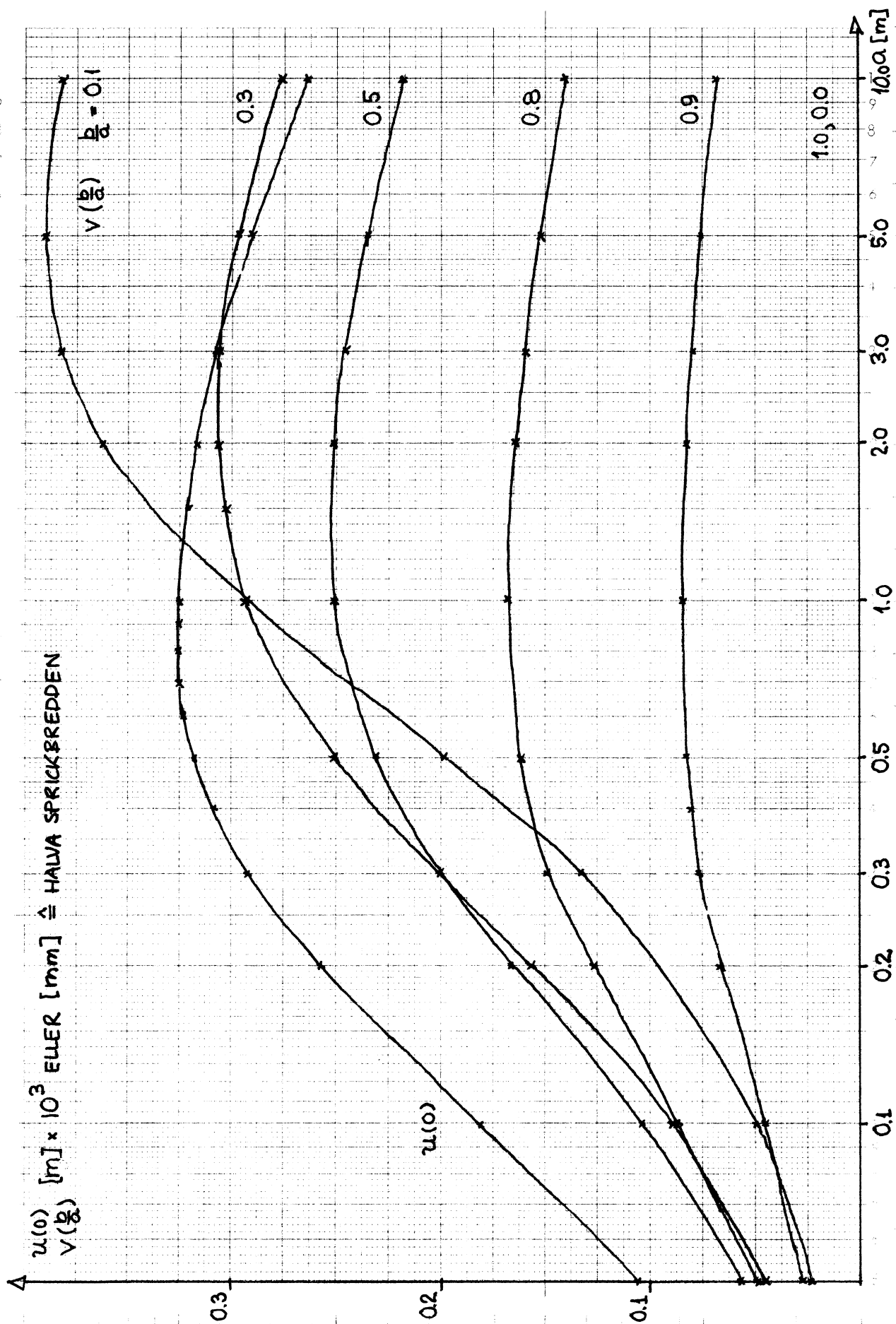
F02-70



SPRICKBREDDEN $u(0)$ RESP. $v(\frac{b}{a})$ SOM
FUNKTION AV SPRICKLÄNGDEN VID KONSTANT
FYLLENSGRAD FÖR EN PLAN SPRICKA

DIAGRAM 5

$F_{02} - 70$



Appendix

I. Beräkning av integralen i (5)

Bortsett från onödiga konstanter ger (5) och (6)

$$\int_b^a K_1^2 dx \propto I = \int_b^a x \arcsin^2\left(\frac{b}{x}\right) dx \quad (A1)$$

Införes substitutionen $\frac{b}{x} = t$ erhålles

$$I = b^2 \cdot \int_{b/a}^1 \arcsin^2 t + \frac{dt}{t^3} \quad (A2)$$

Partialintegrering av uttrycket ger

$$I/b^2 = \left[-\frac{1}{2t^2} \arcsin^2 t \right]_{b/a}^1 + \int_{b/a}^1 \frac{\arcsin t \, dt}{t^2 \sqrt{1-t^2}} \quad (A3)$$

Substitutionen $t = \sin u$ i integralen i H.L ger

$$I_1 = \int_{\arcsin \frac{b}{a}}^{\pi/2} \frac{u du}{\sin^2 u} = \left[\ln(\sin u) - u \cot u \right]_{\arcsin \frac{b}{a}}^{\pi/2} \quad (A4)$$

eller

$$I_1 = \left[\ln t - \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \arcsin t \right]_{\frac{b}{a}}^1 \quad (A5)$$

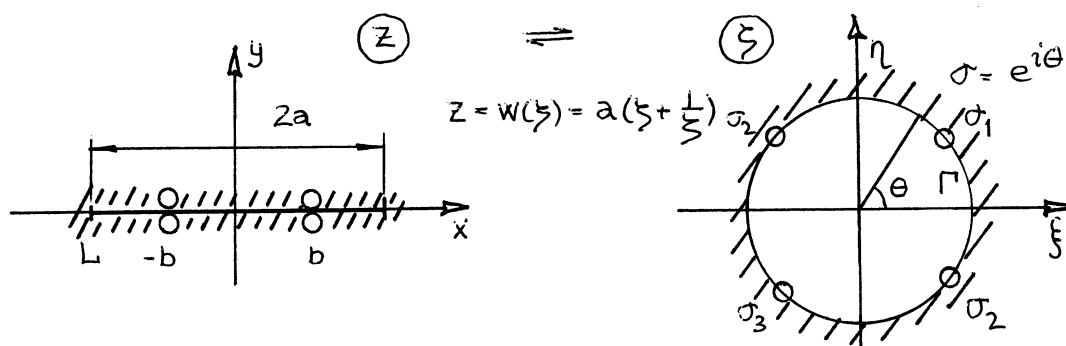
Funktionens värde för övre gränsen = 0. I slutligen ges av

$$I = \frac{1}{2} a^2 \arcsin^2 \frac{b}{a} - \frac{\pi b^2}{8} + b \sqrt{a^2 - b^2} \arcsin \frac{b}{a} - b^2 \ln \frac{b}{a} \quad (A6)$$

Härmed kan U och V lösas ut.

2. Beräkning av deformationen, uttrycken (23) och (24)

Metoden med komplexa spänningsfunktioner används, /11/ - /13/. Området utanför sprickan Li z-planet avbildas konformt på området utanför enhetscirkeln Γ i bildplanet, ζ -planet.



/11/ § 6.2 ger direkt de komplexa spänningsfunktionerna $f(\zeta)$ och $g(\zeta)$

$$\begin{cases} f(\zeta) = I_1(\zeta) - A_0(\zeta) \\ g(\zeta) = B_0(\zeta) + I_2(\zeta) \end{cases} \quad (A7)$$

I (A7) ges $A_0(\zeta)$ och $B_0(\zeta)$ av belastningsfunktionen $H(\sigma)$ som i detta fall får formen, /11/ § 6.34

$$H(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{på bågen} & \sigma_4 \sigma_1 \\ -p w(\sigma) + pb & & \sigma_1 \sigma_2 \\ 2pb & & \sigma_2 \sigma_3 \\ -p w(\sigma) + pb & & \sigma_3 \sigma_4 \end{cases} \quad (A8)$$

Här är w den komplexa avbildningsfunktionen och σ en komplex randkoordinat på Γ . För w gäller

$$\begin{cases} w(\zeta) = a\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \\ w(\zeta) = \overline{w(\bar{\zeta})} \quad \sigma = e^{i\theta} \end{cases} \quad (A9)$$

Härigenom erhålles

$$\begin{cases} H(\sigma) = \overline{H(\sigma)} \\ A_0(\zeta) = B_0(\zeta) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{H(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} \end{cases} \quad (\text{A10})$$

$I_1(\zeta)$ och $I_2(\zeta)$ ges av [9] s 101-102

$$\begin{cases} I_2(\zeta) = -3 \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} f'(\zeta) \\ I_1(\zeta) = 0 \end{cases} \quad (\text{A11})$$

Förskjutningarna ges av, G är materialets skjuvmodul

$$2G(u_x + iv_y) = (3-4\nu) \cdot f(\zeta) - \frac{w(\zeta)}{w'(\zeta)} \cdot \overline{f'(\zeta)} - \overline{g(\zeta)} \quad (\text{A12})$$

På randen $\zeta=0$ erhålles ur (A7) - (A11)

$$\begin{cases} 2G(u_x + iv_y) = (3-4\nu) \cdot f(\sigma) - \overline{f(\sigma)} \\ \text{dvs } 2Gv_y = \text{Im} \left\{ 4(1-\nu) \cdot f(\sigma) \right\} \end{cases} \quad (\text{A13})$$

$f(\zeta)$ i sin tur erhålles ur (A7) - (A11) genom direkt integration, bortsett från konstanta termer

$$\begin{aligned} f(\zeta) = & -\frac{pa}{\pi} \arcsin \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\zeta} + \frac{pa}{4\pi i} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \ln \left[\frac{\zeta^2 + e^{2i\varphi_0}}{\zeta^2 + e^{-2i\varphi_0}} \right] \\ & - \frac{pb}{2\pi i} \ln \left[\frac{\zeta^2 + 2i\zeta \cos \varphi_0 - 1}{\zeta^2 - 2i\zeta \cos \varphi_0 - 1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

På randen erhålles

$$\begin{aligned} f(\sigma) = & -\frac{pa}{\pi} \arcsin \frac{b}{a} \cdot e^{-i\theta} + \frac{pa}{2\pi i} \cos \theta \cdot \ln \left[\frac{e^{2i\theta} + e^{2i\varphi_0}}{e^{2i\theta} - e^{2i\varphi_0}} \right] \\ & - \frac{pb}{4\pi i} \ln \left[\frac{\sin \theta + \cos \varphi_0}{\sin \theta - \cos \varphi_0} \right] \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

Vinkeln φ_0 är given av

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{b}{a} \quad (\text{A16})$$

(A13) och (A15) ger de sökta deformationerna. $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ svarar mot sprickans mittpunkt. För denna gäller

$$\left\{ \begin{array}{l} f(i) = i \left\{ \frac{pa}{\pi} \arcsin \frac{b}{a} + \frac{pb}{2\pi} \ln \left[\frac{1+\cos\varphi_0}{1-\cos\varphi_0} \right] \right\} \\ v(o) = \frac{2(1-\nu^2)pa}{E} \cdot \left\{ \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \ln \left[\frac{1+\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}}{1-\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}} \right] \right\} \end{array} \right. \quad (A17)$$

De punkter på Γ som svarar mot tryckfördelningens slutpunkter $\pm b$ är $\theta = \pm \frac{\pi}{2} \pm \varphi_0$. Beräkningen av $f(\sigma)$ sker genom gränsövergång

$$\left\{ \begin{array}{l} f(e^{i(\frac{\pi}{2}-\varphi_0)}) = i \frac{pa}{\pi} \arcsin \frac{b}{a} \cdot e^{i\varphi_0} + \lim_{\delta \rightarrow 0} D(\delta) \\ D(\delta) = \frac{pb}{2\pi i} \cdot \left[2i\varphi_0 + i\pi + i\delta + \ln \left(1 - \frac{\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0} \cdot \frac{1-\cos\delta}{\sin\delta} \right) + 2\ln \sin\varphi_0 \right] \end{array} \right. \quad (A18)$$

Gränsövergången ger f och slutligen

$$v\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{4(1-\nu^2)pa}{\pi E} \cdot \left[\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2} \arcsin \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \ln \frac{b}{a} \right] \quad (A19)$$

LITTERATUR

- /1/ Ouchterlony, F. Brottmeکانik och sprickor i berg.-
SSDF rapport DS 1970:48.
- /2/ Ouchterlony, F. Uppskattning av sprickutbredningen kring
ett borrhål.-
SSDF rapport DS 1970:49.
- /3/ Kutter, H.K. The Interaction between Stress Wave and
Gas Pressure in the Fracture Process of
an Underground Explosion in Rock, with
Particular Application to Presplitting.-
Ph.D. thesis Univ. Minn. (1967).
- /4/ Rice, J.R. Fracture: An Advanced Treatise
H. Liebowitz ed.
Vol 2 Mathematical Fundamentals.-
Kap 3 s. 192-308
Academic Press, London (1968).
- /5/ Jaeger, J.C. Fundamentals of Rock Mechanics.-
Cook, N.G.W. Methuen, London (1969).
- /6/ Rooke, D.P. The Crack Energy and the Stress Intensity
Sneddon, I.N. Factor for a Cruciform Crack Deformed by
Internal Pressure.-
Int. J. Engng. Sci. Vol 7 s. 1079-089 (1969).
- /7/ Bowie, O.L. Analysis of an Infinite Plate Containing
Radial Cracks Originating at the Boundary
of an Internal Circular Hole.-
J. Math. Physics Vol 25 s. 60-71 (1956).
- /8/ Asklöf, C.A. Cylindriskt och sfäriskt symmetriska våg-
Nylander, Å. utbredningsförlopp i bergmaterial.-
FOA 2 rapport nr C 2286-44 (1968).
- /9/ Johansson, C.H. Berglossningsmekanismen vid pallsprängning.-
SSDF rapport DL 1968:27.
- /10/ Persson, A. Exempel på användning av integralekvationer
inom elastomeکانiken.-
CTH inst. för hållfasthetslära publ.nr 13,
(1962).
- /11/ Persson, A. Plana tillstånd inom elastomeکانiken.-
CTH inst. för hållfasthetslära publ.nr 17,
(1965).
- /12/ Muskhelishvili, N.I. Some Basic Problems of the Mathematical
Theory of Elasticity.-
Nordhoff, Groningen (1953), (1963).
- /13/ Milne-Thomson, L.M. Plane Elastic Systems.-
Springer, Berlin (1960), (1968).

SSDF betyder Stiftelsen Svensk Detonikforskning.