

UPPSKATTNING AV SPRICKUTBREDNINGEN  
KRING ETT BORRHÅL

Finn Ouchterlony

DS 1970:49

26.11.1970

STIFTELSEN  
SVENSK DETONIKFORSKNING  
SWEDISH DETONIC RESEARCH FOUNDATION

VINTERVIKEN — 117 48 STOCKHOLM  
SWEDEN

UPPSKATTNING AV SPRICKUTBREDNINGEN  
KRING ETT BORRHÅL

Finn Ouchterlony

DS 1970:49

26.11.1970

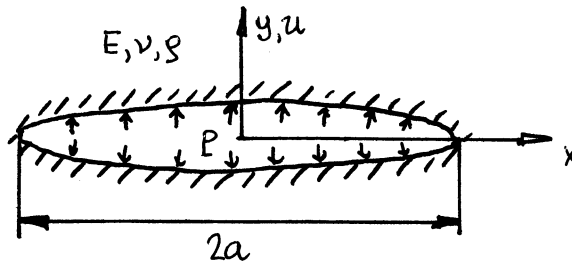
Sammanfattning

Rapporten är en direkt uppföljning av en annan, "Brottmekanik och sprickor i berg" [18]. Den innehåller en analys av sprickutbredningen kring ett borrhål för fallet en plan spricka baserad dels på det i den linjära brottmekaniken centrala begreppet energibalansen i sprickspetsen dels på en total energibalans. De resulterande villkoren för sprickutbredningens gräns är identiska. Till slut beräknas denna gräns och resultaten utvidgas till en sprickros med godtyckligt antal armar.

# 1. Uppskattning av sprickutbredningen kring ett borrhål.

## 1.1 Analys av en plan spricka

Vi betraktar en plan spricka i berg. Bergmaterialet antas vara linjärt elastiskt, isotropt och homogent. Det beskrivs av sin E-modul  $E$ , Poissons tal  $\nu$  och densiteten  $\rho$ . Plant deformationstillstånd (P.D.) antas råda. Sprickan antas vidare fylld med gas av konstant tryck, dess form blir då elliptisk, se [1]. Deformationen tvärs sprickans huvudaxel ges av



$$u(x) = \frac{2(1-\nu^2)p}{E} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \quad (1)$$

Fig. 1.

Den volym som är förknippad med sprickan blir då

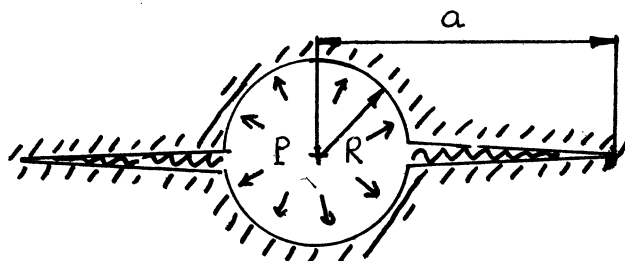
$$V(m^3/m) = \pi a \cdot u(0) = \frac{2\pi(1-\nu^2)}{E} p a^2 \quad (2)$$

Och den elastiska energi som finns upplagrad i kroppen, vilken, se tex [2] s 118, är lika med halva det arbete som den slutliga belastningen uträttar genom sina förskjutningar från det obelastade tillståndet till jämviktstillståndet, ges av

$$U(Nm/m) = \frac{1}{2} pV = \frac{\pi(1-\nu^2)}{E} p^2 a^2 \quad (3)$$

Vi tänker oss nu utgå från en lätt modifierad geometri enligt fig. 2 i vilken spänningstillståndet i sprickspetsarna är opåverkat av borrhålet. Enligt St. Venant's princip gäller detta om  $a \gg R$ .

Bowie, [3] ger gränsvärdet



$$a > 2R \quad (4)$$

Fig. 2.

Volymen torde då kunna skrivas

$$V = \frac{2\pi(1-\nu^2)}{E} p a^2 + \pi R^2$$

$$V - V_0 = \frac{2\pi(1-\nu^2)}{E} \cdot [p a^2 - p_0 a_0^2] \quad (5)$$

Om gasen antages följa en lag enligt

$$pV^{\kappa} = p_0 V_0^{\kappa} = \text{konst} \quad (6)$$

så ger (5) och (6) ett uttryck för spricklängden som funktion av volymen

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{V_0}{\theta}} \cdot \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\kappa/2} \cdot \sqrt{\frac{V}{V_0} - \left(1 - \frac{\theta a_0^2}{V_0}\right)} \\ \text{där } \theta = \frac{2\pi(1-\nu^2)p_0}{E} \end{cases} \quad (7)$$

vilket uttryck i sin tur ger

$$\frac{da}{dV} = \frac{1}{2\sqrt{\theta V_0}} \cdot \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{\kappa}{2}-1} \cdot \frac{(1+\kappa)\frac{V}{V_0} - \kappa\left(1 - \frac{\theta a_0^2}{V_0}\right)}{\sqrt{\frac{V}{V_0} - \left(1 - \frac{\theta a_0^2}{V_0}\right)}} \quad (8)$$

eftersom  $\frac{da}{dV} > 0$  för  $\frac{V}{V_0} > 1$  är  $a(V)$  monoton och har en entydig invers  $V(a)$

dvs. vi kan välja  $V/V_0$  som oberoende variabel

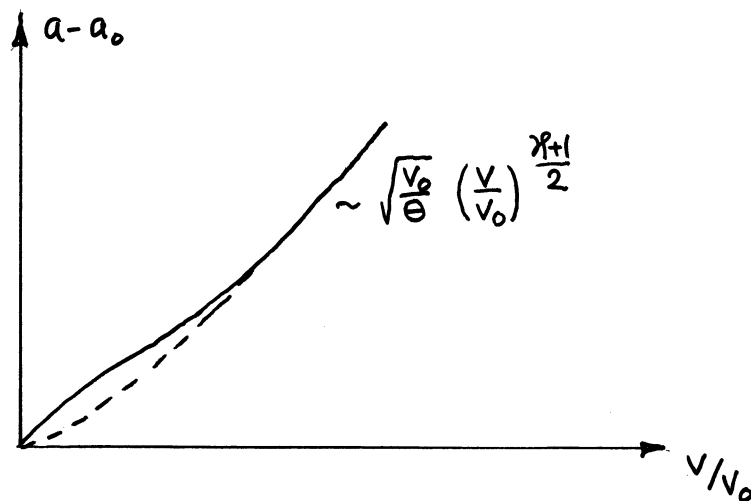


Fig. 3.

När sprickans volym ökar uträttar gasen i spräckan ett arbete och kroppens elastiska energi förändras. Om vi betraktar två tillstånd i tänkt jämvikt  $(p_0, V_0)$  och  $(p, V)$  gäller för det utifrån tillförda arbetet

$$W - W_0 = \int_{V_0}^V p dV = \frac{p_0 V_0}{\kappa - 1} \cdot \left(1 - \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\kappa-1}\right) \quad (9)$$

$$\text{resp. } \frac{dW}{d(V/V_0)} = pV_0 = p_0 V_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^\chi \quad (9a)$$

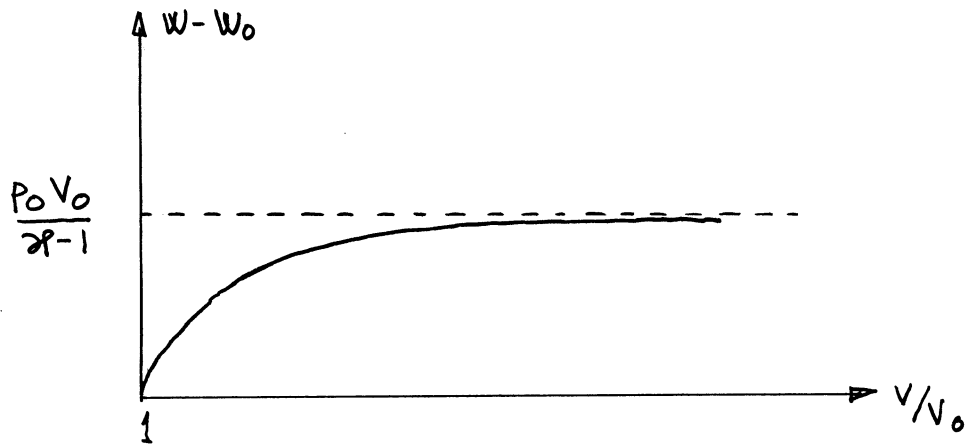


Fig. 4.

För den elastiska energin skriver vi

$$U - U_0 = \frac{\pi(1-\nu^2)}{E} \cdot (p_a^2 - p_0^2 a_0^2) \quad (10)$$

dvs den elastiska energin vid konstant tryck ökar med ökande spricklängd. Omformning av (10) ger

$$\left\{ \begin{aligned} U - U_0 &= \frac{p_0 V_0}{2} \left[ \left(\frac{V_0}{V}\right)^\chi \left[ \frac{V}{V_0} - \left(1 - \frac{\theta_{a_0}^2}{V_0}\right) \right] - \frac{\theta_{a_0}^2}{V_0} \right] \end{aligned} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dU}{d(V/V_0)} &= \frac{p_0 V_0}{2} \cdot \left(\frac{V_0}{V}\right)^\chi \cdot \left[ 1 - \chi \cdot \left[ 1 - \frac{V_0}{V} \cdot \left(1 - \frac{\theta_{a_0}^2}{V_0}\right) \right] \right] \end{aligned} \right. \quad (11a)$$

Eftersom  $1 - \frac{\theta_{a_0}^2}{V_0} = \frac{\pi R^2}{V_0} < 1$  inses att  $U - U_0$  har ett max. för  $V/V_0 > 1$  om

$$\frac{\chi}{\chi-1} \left(1 - \frac{\theta_{a_0}^2}{V_0}\right) > 1 \text{ dvs om } \frac{\pi R^2}{V_0} > \frac{\chi-1}{\chi}$$

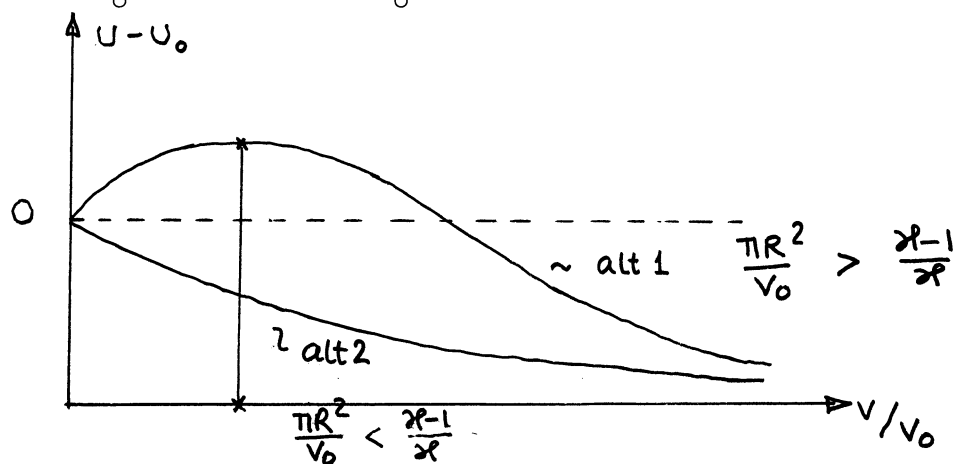


Fig. 5.

Det existerar ett värde,  $\frac{V}{V_0} = \frac{\chi}{\chi-1} \frac{\pi R^2}{V}$  för vilket den elastiska energin minskar trots ökande spricklängd, dvs både gasens arbete och upplagrad elastisk energi finns tillgänglig för övergång till andra energiformer.

Två möjligheter att uppskatta huruvida sprickfortplantning är möjlig eller inte är

1. Ett för sprickspetsen lokalt energivillkor.
2. Ett integrerat energivillkor.

1. Om sprickans tillväxt tänkes som en relaxation av "snittkrafter" över längdökningen kommer ett arbete att uträttas mot dessa dvs elastisk energi frigörs, [4] s 81, vilken ges av

$$-\frac{dU}{da|_{lok}} = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot K_I^2 \quad (12)$$

här är  $K_I$  den s.k. spänningsintensitetsfaktorn och index  $I$  anger deformation modus  $I$  dvs normalkrafter verkande  $\perp$  sprickans plan. Inom den linjära brottmekaniken antages brott inträffa när  $-\frac{dU}{da}$ , som kallas sprickutbredningskraft eller sprickenergigradient, överstiger ett visst för materialet karakteristiskt kritiskt värde

$$-\frac{dU}{da|_{lok}} \geq G_{Ic} \quad (13)$$

eller vilket är samma sak

$$K_I \geq K_{Ic} \quad (14)$$

Både  $G_{Ic}$  och  $K_{Ic}$  kallas brottseghet,  $G_{Ic}$  också kritisk sprickutbredningskraft.  $G_{Ic}$  resp.  $K_{Ic}$  antages vara materialkonstanter och är förknippade med dels den ytenergi som åtgår vid bildandet av nya ytor dels den plastiska deformation av materialet vid sprickspetsen som föregår utbredningen, se bl.a. [5] kap 11 s 8-14 och [4] s. 85-86. Med brott avses i dessa referenser spricktillväxt som leder till haveri för belastningskonfigurationen. Denna spricktillväxt kallas också instabil, innebörden i detta är att de belastade ränderna är så långt bort att spricktillväxten kan tänkas ske utan växelverkan mellan sprickspets och last. För den här studerade geometrin med gas verkande inuti sprickan gäller antagandet om försumbar växelverkan inte längre, modellen tar hänsyn till detta genom uttrycken för sprickans volym (5) och gaslagen (6). Härigenom blir (13) inte längre ett brottvillkor utan ett villkor som uttrycker om spricktillväxt är möjlig eller inte.

Spänningsintensitetsfaktorn bestäms genom elasticitetsteoretiska beräkningar. Den beror linjärt av den pålagda lasten och i övrigt av sprickans och kroppens geometri.  $K_I$  är känt för ett stort antal geometrier.

2. Det integrerade villkoret uttrycker att yttre tillfört arbete måste överstiga ökningen i "effektiv ytenergi" och elastisk energi om sprickans dvs kroppens kinetiska energi skall kunna öka. Detta ger då ju sprickan har två spetsar

$$p \cdot \frac{dV}{da} \geq \frac{dU}{da} + 2 \cdot G_{lc} \quad (15)$$

eller

$$p \cdot V_o \geq \frac{dU}{d(V/V_o)} + 2 \cdot G_{lc} \cdot \frac{da}{d(V/V_o)} \quad (15a)$$

(5), (10) och (15) ger

$$p \cdot \frac{dV}{da} - \frac{dU}{da} = \frac{\theta}{p_o} \left[ p \cdot \frac{d}{da} (p a^2) - \frac{1}{2} \frac{d}{da} (p^2 a^2) \right]$$

$$\text{dvs} \quad p \frac{dV}{da} - \frac{dU}{da} = \frac{\theta}{p_o} p^2 a \quad (15b)$$

För fallet en plan spricka under inre övertryck gäller

$$K_I = p \sqrt{\pi a} \quad (16)$$

En jämförelse mellan det lokala och det integrerade villkoret ger att de är identiska

$$\left\{ \begin{array}{l} - \frac{dU}{da}_{\text{lok}} = \frac{\theta}{2p_o} p^2 a \geq G_{lc} \\ p \frac{dV}{da} - \frac{dU}{da} = \frac{\theta}{p_o} p^2 a \geq 2 G_{lc} \end{array} \right. \quad (17)$$

eller uttryckt som fkn av  $V/V_o$

$$\frac{p_o \sqrt{V_o \theta} \cdot \sqrt{\frac{V}{V_o} - (1 - \frac{\theta a_o^2}{V_o})}}{(\frac{V}{V_o})^{\frac{3\lambda}{2}}} \geq 2G_{lc} \quad (18)$$

Uttrycket i V.L. är monotont avtagande för alla  $\frac{V}{V_o}$  om  $\frac{\pi R^2}{V} \leq \frac{3\lambda - 2}{3\lambda}$  och annars för  $\frac{V}{V_o} \geq \frac{3\lambda}{3\lambda - 2} \cdot \frac{\pi R^2}{V_o}$  dvs normalt för alla  $\frac{V}{V_o}$

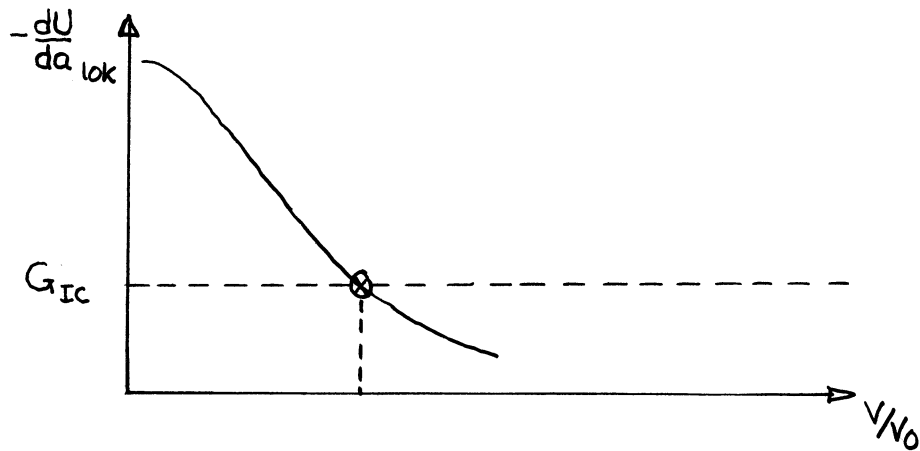


Fig. 6.

Jämförelsen utsäger att för mindre värden på  $a$  än det som motsvarar gränsvärdet i (17) kan inte den kinetiska energin minska. Det blir då av intresse om sprickans utbredningshastighet kan minska. Mott, [6] ger av dimensionshänsyn följande uttryck för den kinetiska energin

$$K = \frac{k_g}{2E^2} p^2 a^2 \left(\frac{da}{dt}\right)^2 \quad (19)$$

(19), (10) och (11) ger att sprickans utbredningshastighet,  $\dot{a}$ , inte kan minska om  $\frac{v}{v_0} \geq \frac{\chi}{\chi-1} \frac{\pi R^2}{v_0}$  så att för rimliga värden på ingående storheter sprickans utbredningshastighet inte börjar minska innan den kinetiska energin börjar minska. (19) kan omformas mha

$$\frac{da}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{da}{dv} \quad (20)$$

$$K = \frac{k_g}{32 \pi^2 (1-\nu^2)} \left[ (1+\chi) - \frac{v_0}{v} \cdot \chi \cdot \left(1 - \frac{\theta_{a_0}^2}{v_0^2}\right)^2 \right]^2 \cdot \dot{v}^2 \quad (21)$$

Uttrycket före parentesen är konstant och det innanför avtar monotont så att  $v$  kan i vilket fall inte minska innan den kinetiska energin minskar.

Analysen bygger på statiska värden för den elastiska energin och kan härigenom inte förväntas ge alltför bra resultat om sprickans utbredningshastighet närmar sig hastigheten för Rayleighvågorna i mediet  $C_R$  som enligt Broberg [7] mfl. utgör en övre gräns för sprickans utbredningshastighet. I praktiken finner Bieniawski [8] en gränshastighet på ca  $0.7 \times C_R$  för norit något som man enl. Broberg [9] också skulle vänta sig om man använder

Rayleighvågans hastighet i det belastade materialet vid sprickspetsen i stället för i det obelastade materialet som gränshastighet.

Huruvida sprickan propagerar utöver den i (18) givna gränsen ger denna kvasistatiska analys ingen möjlighet att uppskatta, men den bör ge en rimlig kvantitativ uppfattning om hur långt sprickorna kring ett borrhål kan nå.

## 1.2 Numeriska värden.

Bieniawski [10], Brace [11] och Clark [12] ger värden på bergets egenskaper tabell 1

| Bergart       | E-modul<br>$[N/m^2]$       | Poissons tal. | $G_{IC}$<br>$[Nm/m^2]$ | Ytenergi<br>$[Nm/m^2]$ | ref. |
|---------------|----------------------------|---------------|------------------------|------------------------|------|
| Quincy granit | $3.5-4.3 \times 10^{10}$   | 0.10-0.33     |                        |                        | 12   |
| Subury        | $8.36-8.82 \times 10^{10}$ | 0.22-0.27     |                        |                        | 12   |
| Norit         | $10.5 \times 10^{10}$      | 0.228         | 735                    |                        | 10   |
| Kvartsit      |                            |               | 615                    |                        | 10   |
| Granit        | $3.9-5.6 \times 10^{10}$   |               |                        | 8                      | 11   |
| Kvartsit      | $4.8-7.9 \times 10^{10}$   |               |                        | 0.5                    | 11   |

Enl. Jaeger & Cook [2] s 181, baserat på mätningar av Brace m.fl., är  $E_{dyn}$  c:a 20% större än  $E_{stat}$  för granit och värdena ökar kraftigt med det hydrostatiska trycket från  $0.5 \cdot 10^{11} N/m^2$  vid 0-tryck till  $1.0 \cdot 10^{11} N/m^2$  vid 700 bar ( $E_{stat}$ ). Det existerar alltså en viss osäkerhet vid val av representativ E-modul. För beräkningar används Bieniawskis värden för norit därför att bestämningen av  $G_{IC}$  enligt honom verkligen bygger på det brottmekaniska begreppet kritisk sprickenergigradient, [13]. Normalt bestämda  $G_{IC}$ -värden kan ligga avsevärt lägre enl. Clausen [14] eftersom bestämningen beror av provets geometri och hur stelt provsystemet är.

Värden på övriga parametrar enligt

$$\begin{cases} P_0 = 1 \text{ kbar} = 10^8 N/m^2 \\ R = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ a_0 = 10 \cdot R = 0.1 \text{ m} \end{cases} \quad (22)$$

ger

$$\begin{cases} \theta = 0.566 \cdot 10^{-2} \\ V_0 = 3.71 \cdot 10^{-4} m^3/m \end{cases} \quad (22a)$$

och med  $\mathcal{K} = 1.33$  ger (18) och (17)

$$\frac{V}{V_0} \leq 21.5$$

$$a \leq 9 \text{ m}$$
(23)

### 1.3 Flerarmade sprickor

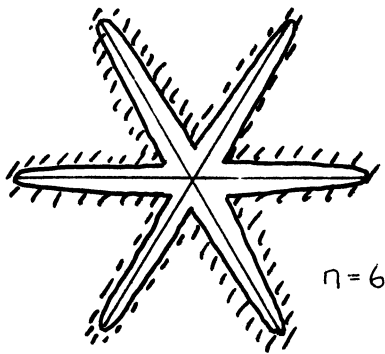


Fig.7.

Det finns ett flertal referenser bl.a. [15],[16] och [17] som behandlar en spricka i form av ett kors eller allmännare en n-armad spricka, se fig 7, med lika långa armar. Enligt Westmann [17] gäller för stora n approx.  $f(n) \approx 2/\sqrt{n}$  där

$$K_I(n) = f(n) p \sqrt{\pi a} \quad (16n)$$

Detta ger oss enl. Rooke och Sneddon [16] möjlighet att beräkna den elastiska energin ur

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{dU(n)}{da} = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot K_I^2(n) \quad (24)$$

vilket ger

$$U(n) = \frac{nf(n)^2}{2} \cdot \frac{\pi(1-\nu^2)}{E} p^2 a^2 \quad (3n)$$

Härur erhålles då sprickvolymen mha (3)

$$V(n) = \frac{nf(n)^2}{2} \cdot \frac{2\pi(1-\nu^2)}{E} pa^2 \quad (2n)$$

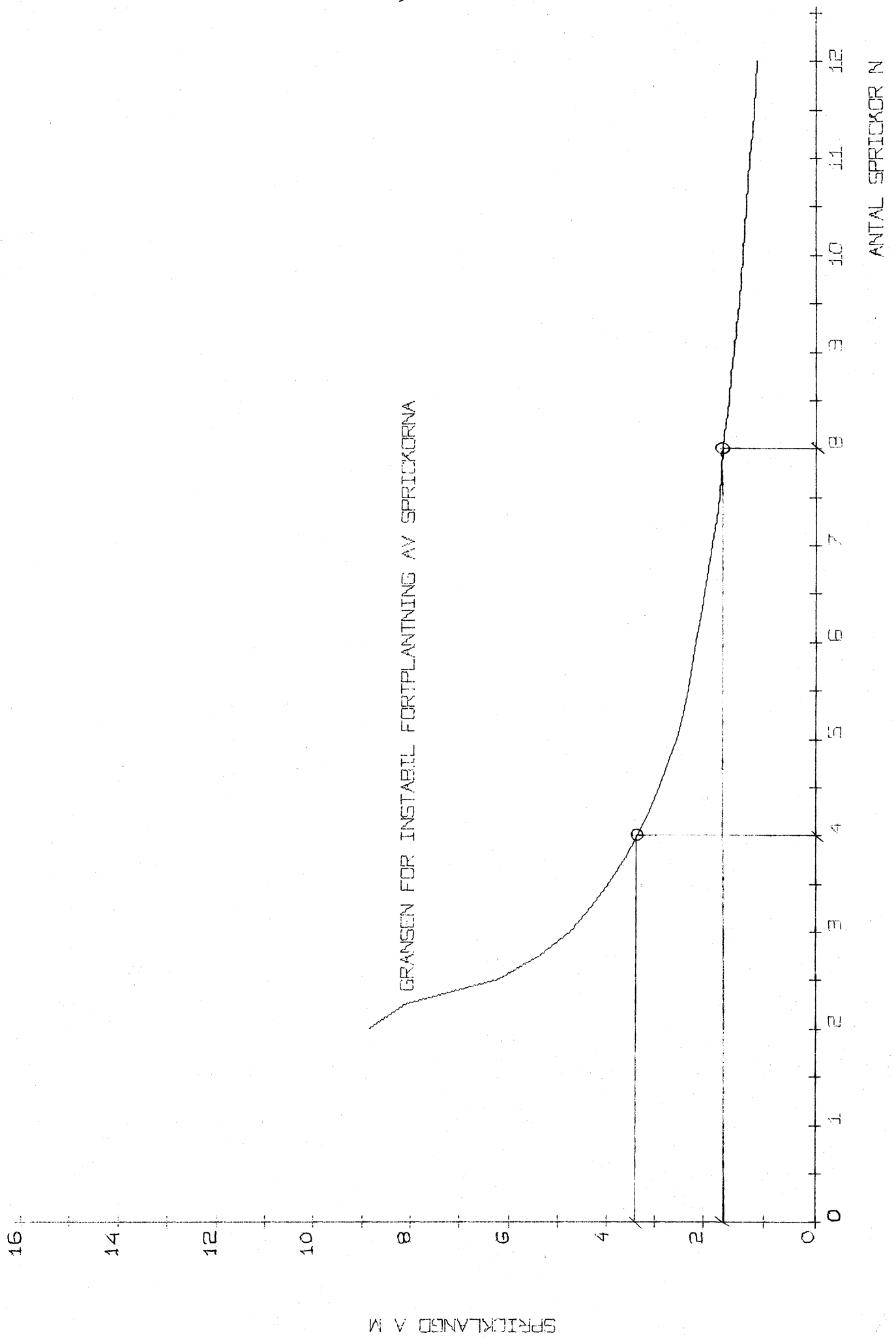
Om samma modell som i fig 2 användes kan vi skriva, (5) och (7)

$$V(n) - V(n)_0 \approx S(n) \cdot \frac{2\pi(1-\nu^2)}{E} [pa^2 - p_0 a_0^2] \quad (5n)$$

$$a(n) = \sqrt{\frac{V_0}{S\theta}} \cdot \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\mathcal{K}/2} \cdot \sqrt{\frac{V}{V_0} - \left(1 - \frac{S\theta a_0^2}{V_0}\right)} \quad (7n)$$

dvs villkoret (18) får formen

$$\frac{p_0 \cdot \sqrt{V_0 \theta} \sqrt{\frac{V}{V_0} - \left(1 - \frac{S\theta a_0^2}{V_0}\right)}}{\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{3\mathcal{K}}{2}}} \gg \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot n^{3/2} f(n) G_{Ic} \quad (18n)$$



Uttrycket i HL är för stora  $n \propto n$ . Gränsvärdet i (18n) har beräknats för  $n = 2-12$  och ritats in i diagram sid 9 m.h.a. en IBM 1130 dator vid Atlas Copco:s Centrala Systemlaboratorier ZD.

## 2. Diskussion av resultaten.

Gränsen för sprickutbredningen avtar mycket snabbt med ett ökande antal sprickor. Normalt bildas vid sprängning i ett fulladdat borrhål ett stort antal mindre sprickor och några större, vanligen 4-8 till antalet. Enligt sid 9 svarar detta mot en gräns för sprickutbredningen för ett 20 mm:s hål på 1.5-3.5 m vilket i medeltal är c:a 2 ggr större än vad som erhållits vid praktisk sprängning. Valet av begynnelsestryck  $P_0$  påverkar kraftigt resultaten. Det har tagits ur räkningar på det dynamiska förloppet kring ett borrhål efter en detonation, [19] och är snarare för lågt än för högt.

Antagandet om att gasen helt fyller ut sprickan och överallt har samma tryck medför att spricklängden överskattas, något som alltså balanserar det valda begynnelsestryckets inverkan.

## LITTERATUR

1. Persson, Allan  
Exempel på användning av integralekvationer inom elastomekaniken.- CTH inst. för hållfasthetslära publ. nr 13, (1962).
2. Jaeger, J.C.,  
Cook, N.G.W.  
Fundamentals of Rock Mechanics.- Methuen, London (1969).
3. Bowie, O.L.  
Analysis of an Infinite Plate Containing Radial Cracks Originating at the Boundary of an Internal Circular Hole.- J. Math. Physics Vol 25, s 60-71 (1965).
4. Carlsson, Janne,  
Larsson, S.G.  
Brotmekaniken, dess grunder och tillämpningar.- KTH inst. för hållfasthetslära publ. nr 158, (1969).
5. Carlsson, Janne, m.fl.  
Kurslitteratur till STF - TLI kurs i "Brotmekanik och Fraktografi".- Stockholm 23-24.4 (1969).
6. Mott, N.F.  
Fracture of Metals: Theoretical Considerations. Engineering Vol 165, s 15-18 (1948).
7. Broberg, K.B.  
The propagation of a Brittle Crack.- Arkiv för fysik Band 18 nr 10, s 159-192 (1960).
8. Bieniawski, Z.T.  
Fracture Velocity of Rock.- CSIR rapport MEG 517, Sydafr. Rep. (1966).
9. Broberg, K.B.  
On the Speed of a Brittle Crack.- J. Appl. Mech. Vol. 31 no 3, s 546-47 (1964).
10. Bieniawski, Z.T.  
Propagation of Brittle Fracture in Rock.- CSIR rapport MEG 664, Sydafr. Rep. (1968).

