

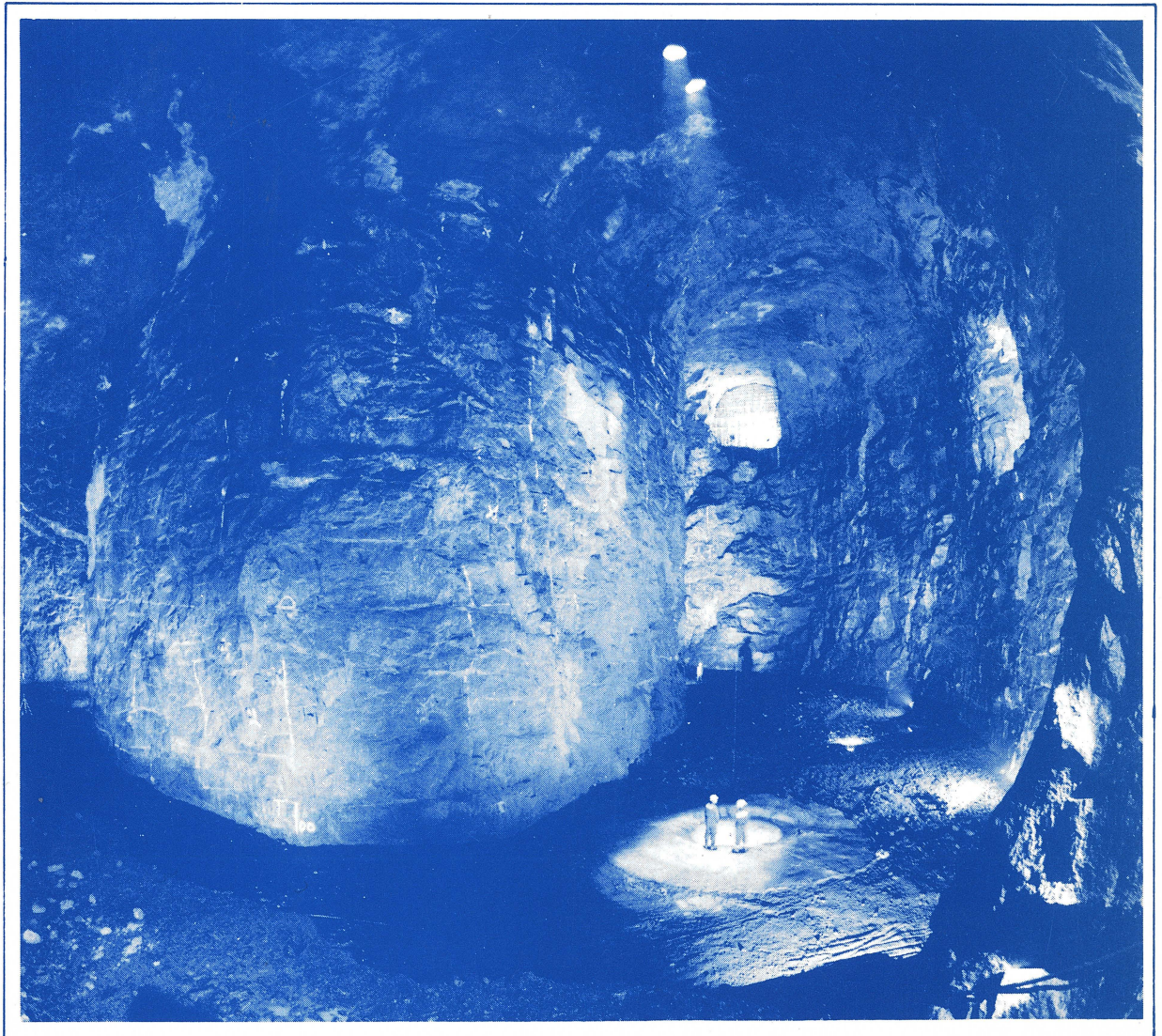
10.9.2/84

BeFo

Lyckeboprojektet

Mätning av bergets töjningar

Göran Rehbinder



Stiftelsen Bergteknisk Forskning — BeFo
Byggforskningsrådet — BFR

Lyckeboprojektet

Mätning av bergets töjningar

Göran Rehbinder
Vattenfall

INNEHÅLL

Förord

Bakgrund..... 1

Beskrivning av mätprogram och installationer..... 2

Töjningsmätningar

Teoretiska synpunkter..... 6

Mätresultat..... 7

Slutsatser.....27

Referenser.....29

Bilaga 1

Bilaga 2

FÖRORD

Lyckeboprojektet är den första fullskaleanläggning i vilken hetvatten säsongslagras för bostadsuppvärmning. Anläggningen har byggts för att demonstrera solfångarteknikens möjligheter i kombination med ett lager och är till väsentlig del finansierad av Byggforskningsrådet, konstruerad och byggd av SKANSKA och drivs av Uppsala Kraftaktiebolag.

Lagret vars volym är $100\,000\text{ m}^3$ värms tillsvidare huvudsakligen med elektrisk energi och till mindre del av solfångare.

När Lyckeboanläggningen börjat byggas beslöt man att vissa begränsade bergtekniska specialstudier skulle utföras. De bedrivs i BeFos regi och omfattar fyra moment nämligen geohydrologiska, bergmekaniska, vattenkemiska och värmeberäkningstekniska. Resultaten redovisas i BeFo-rapporter, projekt 109 (BFR projekt 820673-5).

En allmän beskrivning av anläggningen presenteras i en rapport från Byggforskningsrådet "Solvärme med säsongslagring i berg för 550 lägenheter i Lyckebo Uppsala. Från idé till idrifttagning", BFR projekt nr 790348-0.

Solfångarstudierna redovisas i institutionsrapporter från Studsvik Energi AB (BFR projekt nr 820716-8).

Slutligen planeras en sammanfattande BFR-rapport, innehållande en totalutvärdering av projektet, där anläggningens roll i värmeförsörjningssystemet belyses.

Bakgrund

Om hetvatten lagras i oinklädda bergrum kan ett flertal intressanta bergtekniska fenomen förutses. Hetvattnet kan genom bergmassans permeabilitet komma på avvägar, vilket inte blott påverkar värmeekonomin utan även grundvattenförhållandena runt lagret. Hetvattnet kan laka ur mineral ur berget med risk för deposition i vattnets cirkulationssystem. Vidare kan den stegrade temperaturen orsaka spänningar och deformationer i bergmassan av sådan omfattning att bergstabiliteten kan råka i fara. Speciellt intressant är givetvis den pulserande last som temperaturväxlingar mellan sommar och vinter åstadkommer.

Dessa typer av problem, jämte andra, har under flera år studerats inom ramen för det s k Avestaprojektet, se ref. [1]. Detta projekts syften har varit rent vetenskapliga; avsikten med dem har med andra ord inte varit att bygga något som ekonomiskt kan motiveras.

Något annorlunda ställer sig Lyckeboprojektet, eftersom bostäderna i Lyckebo för sin uppvärmning är beroende av att såväl lagret, solfångarsystemet som driftsystemet fungerar. Efter det att Lyckeboprojektet var igångsatt fattades ett beslut att komplettera detta med ett begränsat forskningsprogram. Forskningsprogrammet skulle omfatta samma spörsmål som Avestaprojektet samt tjäna som ett komplement till detta. Ett av dessa spörsmål gäller de termiska deformationerna av berget, vilket redovisas i denna rapport.

Beskrivning av mätprogram och installationer

Mätprogrammet är så gott som uteslutande bestämt utifrån de erfarenheter som tidigare vunnits vid motsvarande mätningar inom Avestaprojektet. Det kan därför vara skäl att i kortet beröra de bergmekaniska synpunkter som ligger till grund för mätprogrammet för Avestaprojektet.

Spänningar och deformationer i berget kring ett lager uppkommer dels till följd av utsprängningen, dels till följd av upphettningen av vattnet. Det kan vara givande att göra en grov storleksuppskattning av förväntade spänningar.

I många fall är en horisontell tryckspänning en framträdande huvudspänning i själva bergmassan. Om en kavitet sprängs ut i ett sådant berg kommer detta att leda till att taket i kaviteten erfar en tryckspänning som är större än den nämnda huvudspänningen under det att väggen erfar en dragspänning som är ungefär lika stor som huvudspänningen. Till dessa spänningar skall sedan läggas de som temperaturen åstadkommer. De maximala termiskt inducerade spänningarna är tangentiella tryckspänningar på kavitetsrand, vars storlek är

$$\sigma \approx \frac{\alpha E T_0}{1 - \nu}$$

där α är längdvidgningskoefficienten, E någon lämplig elasticitetsmodul, ν Poissons tal samt T_0 temperaturstegringen. Vid termisk belastning sprider sig spänningarna in i materialet med temperaturen.

Om några realistiska värden antas

$$E = 12 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,15$$

$$T_0 = 100 \text{ K}$$

$$\alpha = 8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

så blir

$$\sigma_t \approx 10 \text{ MPa}$$

vilket skall jämföras med den största huvudspänningen.

Man ser härav att de temperaturinducerade spänningarna kan förväntas vara större än dem som utsprängningen orsakar samt att de i egenskap av säkra tryckspänningar reducerar alla uppkomna dragspänningar. Spänningarna leder till förskjutningar och ju mer symmetrisk geometrin och belastningen är i desto högre grad sker förskjutningarna vinkelrätt mot bergrumssytan. De krav som måste ställas på mätnoggrannheten kan uppskattas ur Hookes lag. Låt ϵ_n vara töjningen vinkelrät mot bergrumssytan så fås största töjningen

$$\epsilon_n \sim T_0 \alpha \frac{1 + \nu}{1 - \nu}$$

Om siffrorna ovan sätts in fås

$$\epsilon_n \sim 10^3$$

100 mikrostrain innebär att ett mätdon som har en mätsträcka av exempelvis 1 meter måste ha en upplösning på 0,1 mm för att överhuvudtaget registrera något. Det är således uppenbart att mätnoggrannheten måste vara minst 0,05 mm per meter om utvecklingen skall kunna följas.

Ett spørsmål av största vikt i detta sammanhang är temperaturinflytandet på själva mätningen. Om deformationsmätaren sitter fixerad i berget måste man vara beredd på två komplikationer, nämligen dels drift av givarens "nollsignal" under mätperioden, dels kravet på kompensation av signalen till följd av själva instrumentets uppvärmning. Erfarenheter från de deformationsmätningar som utfördes inom ramen för KBS-projektet i Stripa under slutet av 1970-talet visade att risken för denna typ av komplikationer inte kan försummas.

En möjlighet att helt undvika dessa problem är att ha ett löst instrument som förs in i mät hålen endast vid de speciella mättillfällena och då kyls så att temperaturens inverkan på instrumentet undviks. En förutsättning för att detta skall vara möjligt är att mätningen tar så kort tid att kylningen av instrumentet inte orsakar någon nämnvärd temperatursänkning och därmed relaxation av berget vid mät punkten.

Ett mätinstrument som uppfyller de ovan nämnda kraven är den s k SLIDING MICROMETER ISETH. En beskrivning av detta instrument och hur det används finns redovisat i ref [5]. Instrumentet har emellertid en begränsning, nämligen den att någon kontinuerlig utsignal inte kan erhållas. Detta är naturligtvis oacceptabelt om deformationsövervakningen måste vara automatisk av t ex säkerhetsskäl. Bedömningen har emellertid varit den att riskerna med "konventionella" extensometrar inte kunnat försummas och att fördelarna med SLIDING MICROMETERn uppvägt nackdelen med det hantverksmässiga mätförfarandet. Utrustningen till SLIDING MICROMETERn har krävt två modifieringar av standardutförandet.

1. Plaströren som injekteras fast i borrhålen är normalt tillverkade av PVC-plast. Denna tål emellertid inte hög temperatur utan att mjukna, vilket skulle kunna innebära att rörets deformation hindrar mät donet att passera. Av detta skäl bör samtliga rör som injekterats fast i rören vara av värmetålig ABS-plast, vilken är väsentligt dyrare än PVC-plasten.

2. Normalt sker en renspolning av mätrören omedelbart innan mätning. Denna spolning sker med en lös slang som förs ned genom röret till mät hålets botten. Vid mätningarna är bergets temperatur så hög att kylning med hjälp av spolning måste ske under hela mätförloppet. Av detta skäl måste en permanent spolslang, vilken via en "adapter" är ansluten till mätrörens nedre del, vara injekterad parallellt med

mätröret i hålet. Den kylning som sker under mätproceduren får som nämnts inte återverka på berget eftersom detta skulle leda till relaxation. En teoretisk uppskattning av den exponeringstid för kylning som kan tillåtas visar att 5 % relativ temperaturändring av borrhålsväggen uppnås efter mer än 15 minuter. Detta innebär att det finns mycket god tid att genomföra en mätning innan risk för märkbar relaxation inträffar.

De deformationsmätningar som beskrivits ovan karaktäriseras därav att alla uppmätta värden är relativa i den meningen att någon fix punkt inte finns. Enda möjligheten att utföra en absolut deformationsmätning är givetvis att finna en fix punkt till vilken övriga deformationer relateras. Detta är endast möjligt genom avvägning, vilket alltså innebär att markytans vertikala förskjutning mäts från någon punkt som bedöms som opåverkad av temperaturen. En mätning av detta är förenad med särskilda problem. Det är besvärligt att förvissa sig om att fixpunkten verkligen är en fixpunkt. Om marken ovan lagret är moränmark måste de avvägda punkterna vara fast i berget. Slutligen är mätnoggrannheten vid avvägningen betydligt sämre än den som gäller för SLIDING MICROMETERn.

Töjningsmätningar

Vid planeringen av mätningarna i Lyckebo framstod det som speciellt värdefullt att koncentrera dessa till det som är unikt för Lyckobolagret, nämligen mittpelaren.

Mittpelaren bär ju tryckbelastning och möjliggör ett kompakt rum med given volym.

Vid statisk uppvärmning av berget kommer givetvis tryckbelastningen i pelaren att kvarstå till följd av den termiska utvidgningen. Vid cykliskt varierande vattentemperatur kommer "värmevågor" och därmed också "deformationsvågor" att sprida sig såväl i pelaren som i det omgivande berget. En intressant fråga blir då om dessa "vågor" amplitud och faseftersläpning åstadkommer dragspänningar i någon del av mittpelaren.

I avsikt att undersöka detta beslöts att utföra mätningar av mittpelarens axiella töjning. Önskvärt vore naturligtvis om denna töjning kunde mätas i ett flertal hål från pelarens mitt ut mot dess sida. Genom en sådan mätning skulle "töjningsvågorna" och särskilt då deras dämpning kunna studeras. Detta var dock omöjligt eftersom de tillgängliga pengarna skulle medge högst två hål. Två hål kom också att borraras. Båda borrhålen frångick från markytan samt instrumenterades på samma sätt som beskrivits ovan vad gäller Avestaprojektet. Det ena av hålen borrhades rakt över hjässan av rummet och det andra genom hela pelarens höjd. Placeringen av hålet i pelaren gjordes med hänsyn till teoretiska och praktiska hänsyn. Eftersom endast ett hål skulle borrhades borde det vara placerat så nära pelarväggen som möjligt eftersom den största inverkan väntas ske där. Risken att borrhålet skulle bli krokigt och kanske gå genom pelarväggen utgjorde dock en begränsning härvidlag. Hålet är därför placerat halvvägs mellan pelarens mitt och dess sida. Figur 1 visar en skiss av bergrummet samt hålen placering.

Som nämnts ovan ger de deformationer som mäts i hålen ingen uppfattning om de verkliga förskjutningarna utan endast om mätklackarnas förskjutning relativt varandra. Detta innebär att mätvärdena endast kan tolkas som töjningar såvida inte översta mätklacken kan avvägas från en pålitlig fixpunkt. Någon avvägning av markytan har emellertid inte skett.

Teoretiska synpunkter

Några enkla teoretiska uppskattningar av temperatur, spänningar och töjningar i berget låter sig göras. Speciellt gäller detta i pelaren om denna anses lång. Härledning av temperatur och spänningar och axialtöjning redovisas i bilaga 1.

Om pelarens yta utsätts för ett temperatursteg T_0C sprider sig temperaturen och därmed töjningar och spänningar in mot pelarens centrum. Denna spridning sker förhållandevis långsamt. Sålunda är pelaren genomvärd, dvs har vattnets medeltemperatur, efter 2-3 år. Den stora tidskonstanten som är en följd av den stora värmetrögheten ger anledning förmoda att om pelarens vägg är utsatt för cykliskt varierande temperatur kommer t o m säsongsvariationer att te sig snabba med litet inträngningsdjup för "värmevågor" som följd. Vidare är det klart att pelarens och det omgivande bergets temperaturer samverkar och att denna samverkan blir tydligare ju knubbigare pelaren är. I avsikt att belysa dessa ting har en numerisk lösning av det fullständiga tredimensionella värmeledningsproblemet med cykliskt varierande temperatur lösts. Redovisningen av detta finns i bilaga 2.

Slutsatserna är att temperaturvariationernas inverkan på pelaren dämpas mycket snabbt med avståndet till väggen samt att temperaturtillståndet i pelaren är plant även om pelarens höjd-diameterförhållande är så litet som 1. Dessa slutsatser gäller emellertid under förutsättning att vatt-

nets temperatur är konstant i höjddled. Detta är dock inte fallet. Se figur 14 och 15. Till följd av vattnets vertikala temperaturgradient uppträder vertikala temperaturgradienter i pelaren. I ref [8] visas emellertid att de radiella och vertikala temperaturgradienterna kan väntas vara jämförbara, vilket innebär att påtagliga vertikala töjningsgradienter knappast kan väntas.

Temperaturvariationernas ringa inflytande medför att spänningar och deformationer enbart reagerar på den höjning av vattnets medeltemperatur som äger rum från starten.

Mätresultat

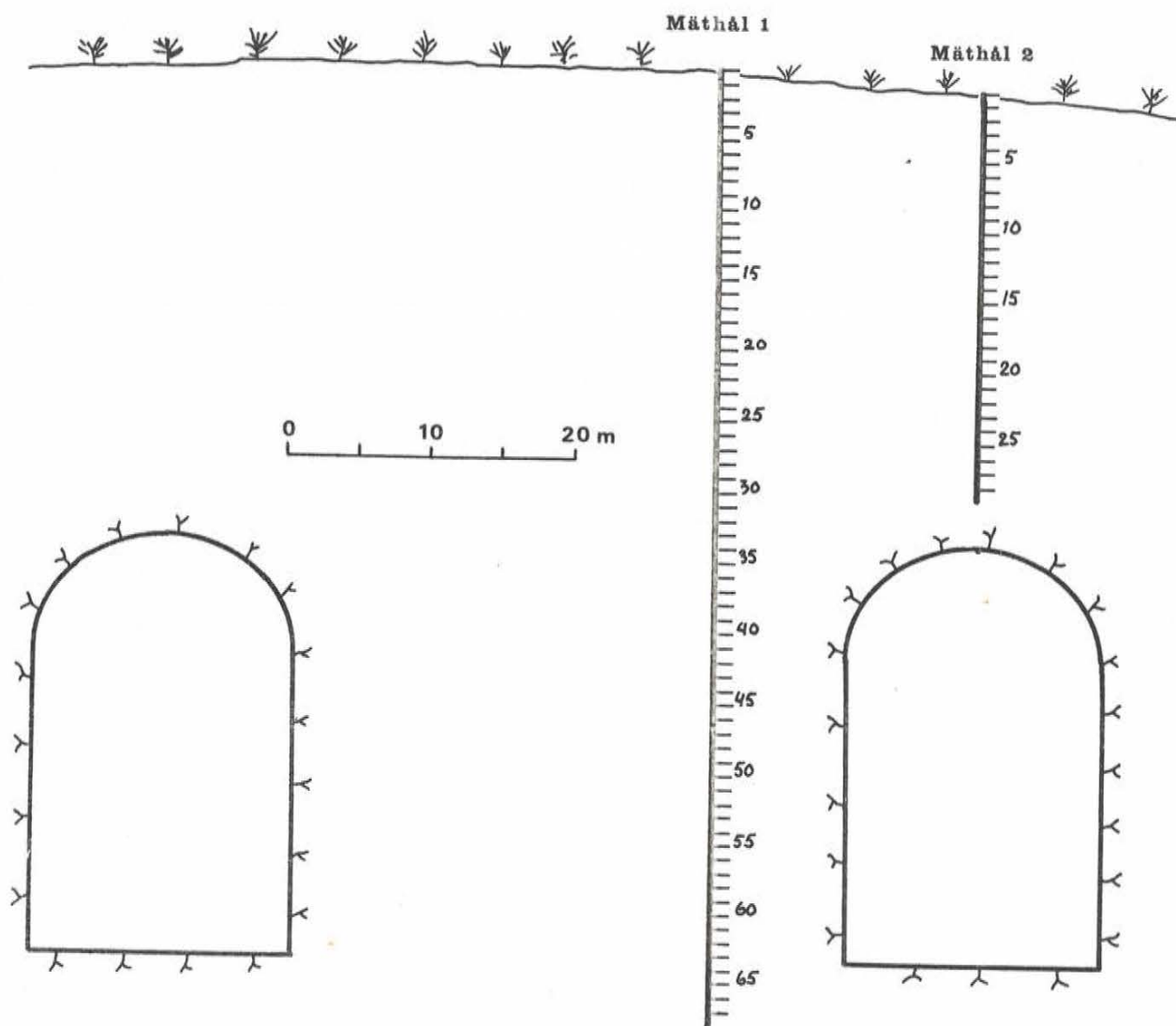
Resultaten av töjningsmätningarna visas i figurerna 2-15. Mätningar har utförts vid 6 tidpunkter mellan april 1983 och oktober 1984. De första av figurerna, 2-7, visar de vertikala töjningarna i mätthål 1. Figur 2 visar att töjningarna är noll utom i ett begränsat område strax ovan rummets hjässa där en mycket kraftig expansion ägt rum. Denna expansion fortsätter med tiden, vilket framgår av de följande fem figurerna. I själva verket är töjningarna så stora att mätinstrumentets mätområde knappt räcker. Vid uppritningen av töjningarna har den maximala töjningen skrivits i marginalen vid sidan om diagrammet. Det förefaller helt uppenbart att dessa stora töjningar hänför sig till ett sprickplan. Figurerna 5 och 6 saknar mätvärden nedanför de mätklackar där den stora deformationen ägt rum. Skälet till detta är att sprickplanet även genomgått en skjuvdeformation som är så stor att SLIDING MICROMETERn inte kunnat passera. Denna allvarliga olägenhet har emellertid kunnat kringgåas därigenom att den styranordning som anbringas under mätsonden och inte kunnat passera i röret, tagits bort. På grund härav finns mätvärden för hela hålets längd vid det sista mättillfället, figur 7. Om man bortser från de stora deformationerna vid sprickplanet kan man göra tre intressanta iakttagelser.

1. Töjningarna nere i pelaren synes vara lika vid varje tidpunkt, dvs plant spänningstillstånd synes råda.
2. Vid mätningen den 22 juni 1983 visar sig töjningen vara negativ, vilket stämmer överens med enkla teoretiska uppskattningar. Se bilaga 1. Denna kompression skall senare försvinna och övergå i expansion, vilket de senare mätningarna visar.
3. Töjningarna i berget ovanför pelaren är i början negativa men ökar sedan för att bli positiva. Storleken minskar dock som temperaturen med avståndet från rummet. Detta stämmer också med teoretiska uppskattningar.

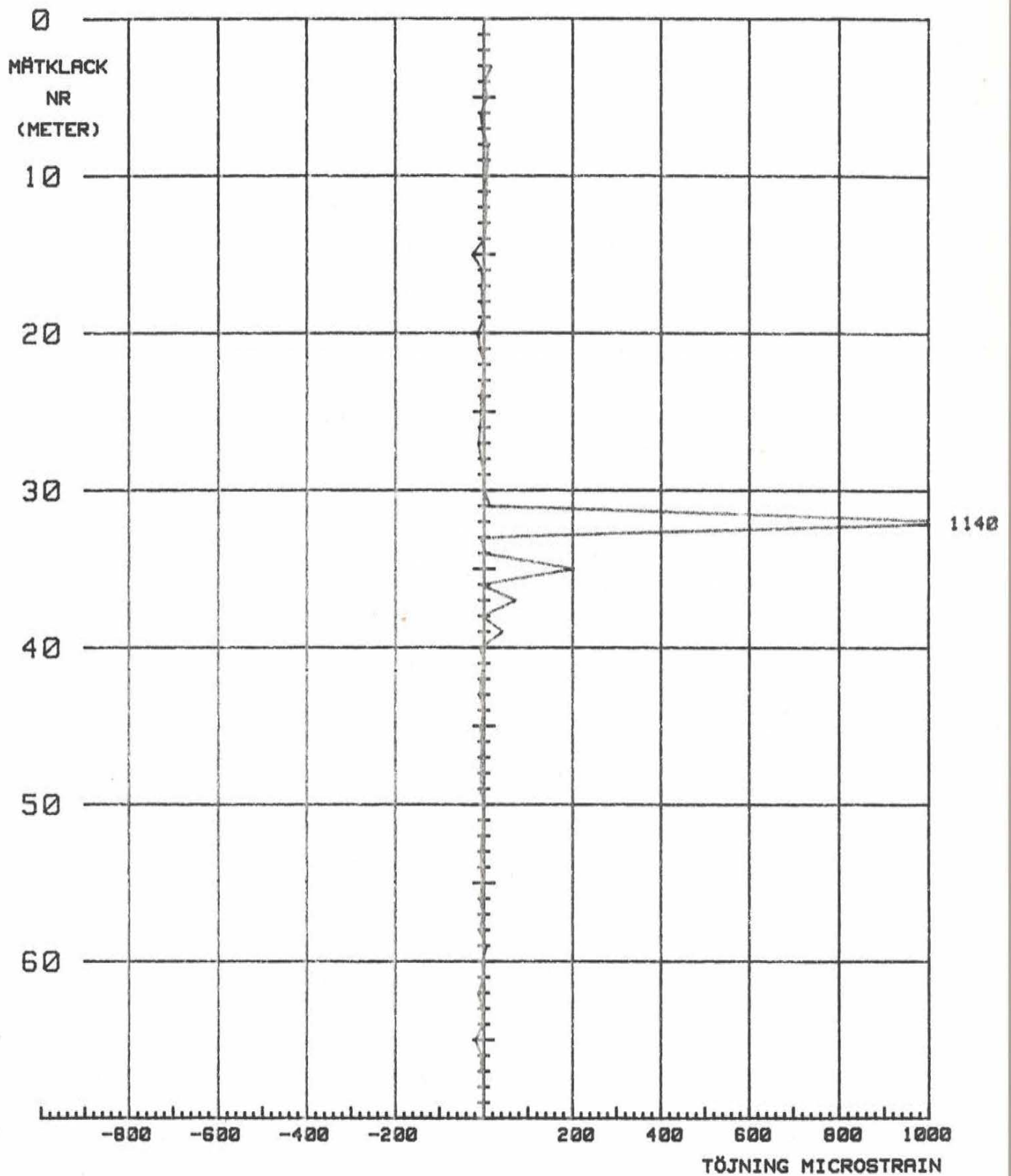
Töjningarna i mätthål 2 visas i figurerna 8-13. Dessa töjningar besvärar inte av några lokala kraftiga avvikelser från teoretiskt förväntat beteende. I början är töjningarna noll, figur 8. Därefter sprider sig en expansion nedifrån och uppåt. Vidare är området omedelbart ovanför expansionen utsatt för en mindre kompression. Dessa resultat stämmer mycket väl överens med dem som erhållits vid hetvattenlagret i Avesta. Se ref [2].

Figurerna 14 och 15 visar töjningar för några mätpunkter som funktion av tiden. Valet av mätpunkter har skett så att de mycket stora töjningarna kring mätklackarna 31-35 har undvikits. Parallellt med töjningskurvorna visas temperaturkaraktäristiken för det lagrade vattnet. Temperaturprofilerna visar att övre delen av bergmassan exponerats kraftigare för temperaturen än den nedre.

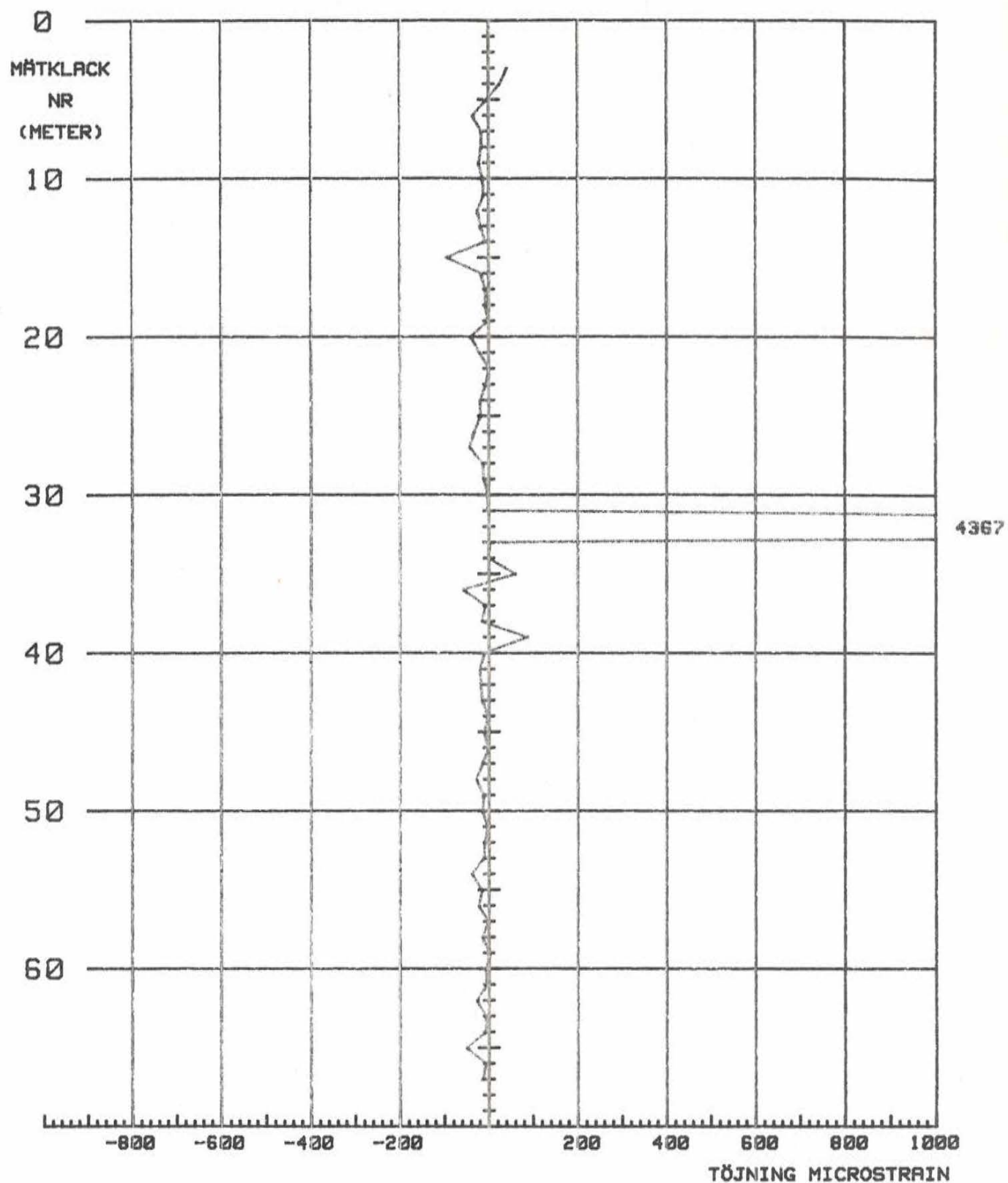
Figurerna 16-17 visar förskjutningarna relativt översta mätklacken i de båda hålen. Om de översta mätklackarna hade kunnat avvägas skulle det sålunda ha varit möjligt att få de verkliga förskjutningarna. Figur 16 visar att relativa förskjutningen i mätthål 1 är mycket stor (~ 16 mm) men att denna förskjutning så gott som helt faller inom sprickplanet.



Figur 1. Mäthålens placering i förhållande till berggrummet. Numreringen utmed hålen anger mätpunkterna, vilkas inbördes avstånd är 1 meter.



Figur 2.

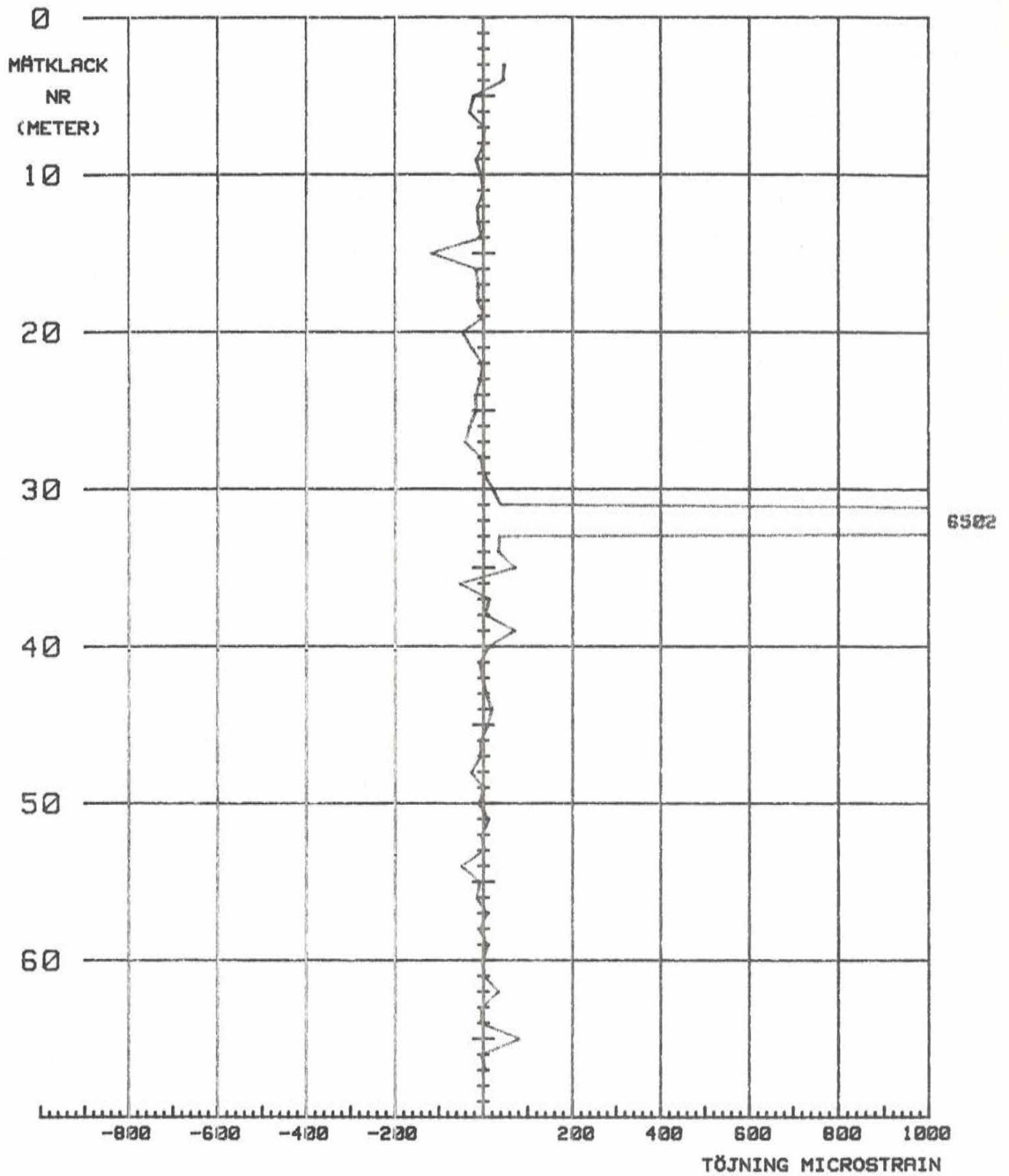


LYCKEBO. BERGTÖJNINGAR I HÅL 1

MÄTNING 4. 830622

TEMPERATUR 7/41 GRADER

Figur 3.

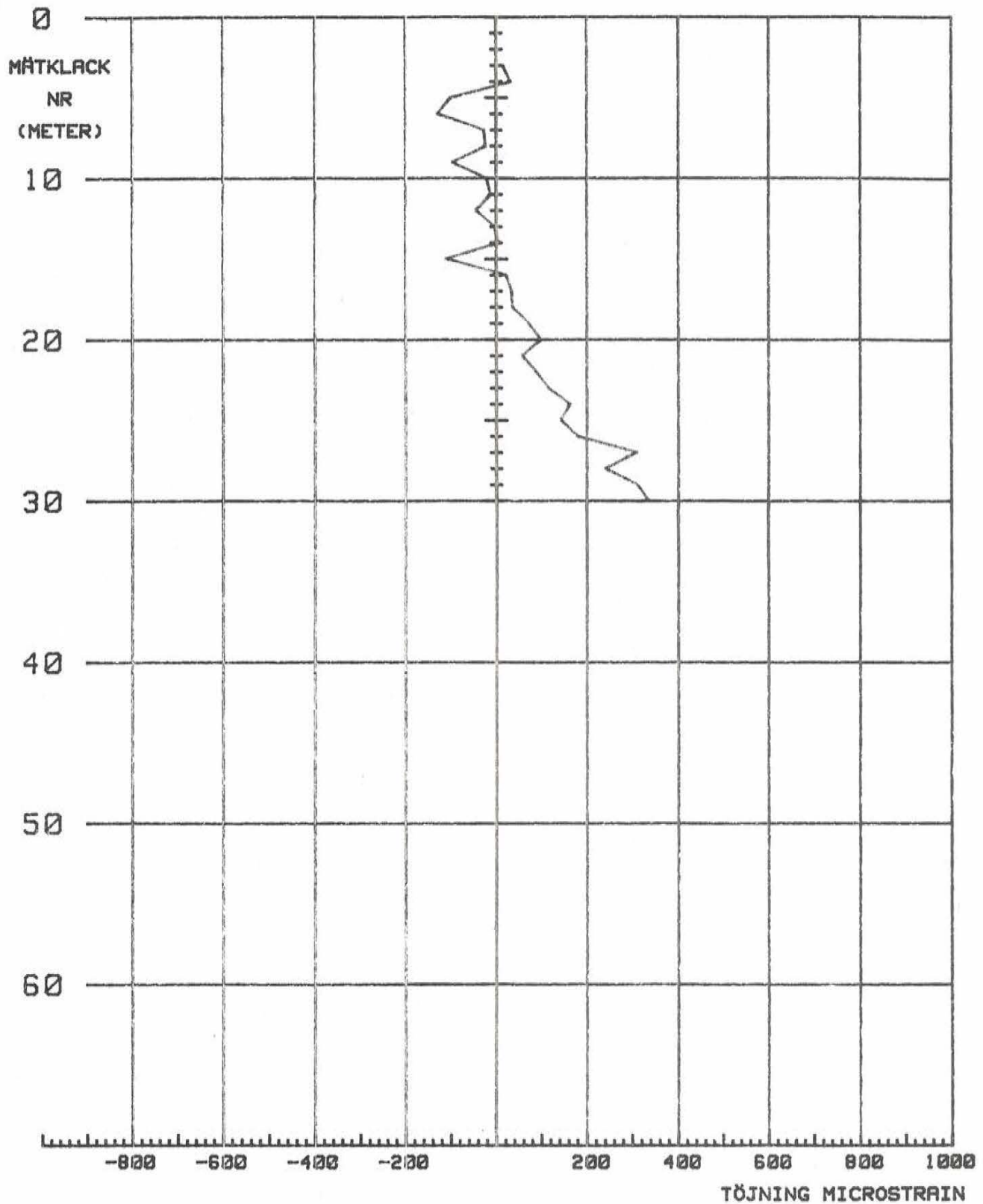


LYCKEBO. BERGTÖJNINGAR I HÅL 1

MÄTNING 5. 830912

TEMPERATUR 19/70 GRADER

Figur 4.

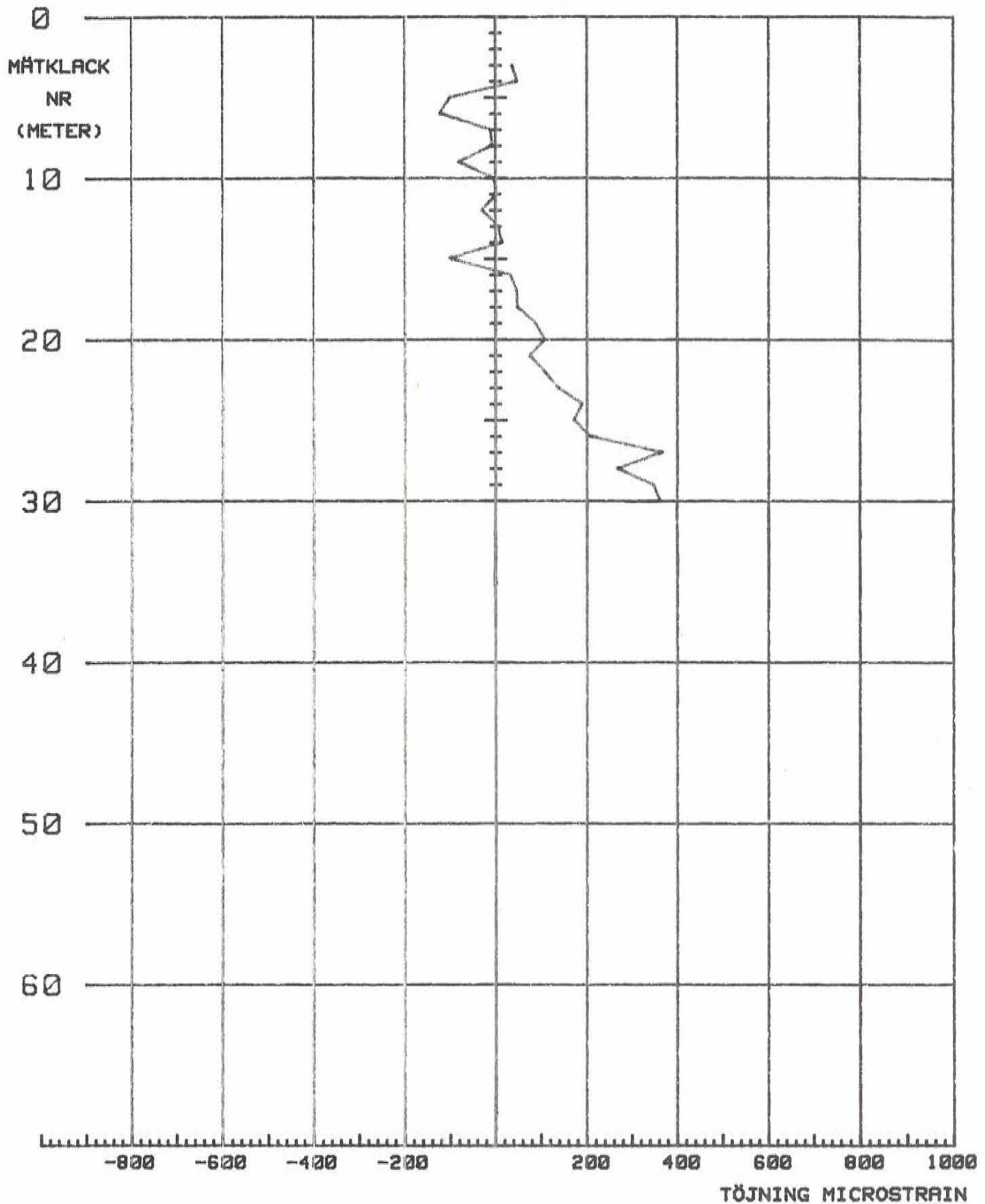


LYCKEBO. BERGTÖJNINGAR I HÅL 1

MÄTNING 6. 840706

TEMPERATUR 80/21 GRADER

Figur 5.

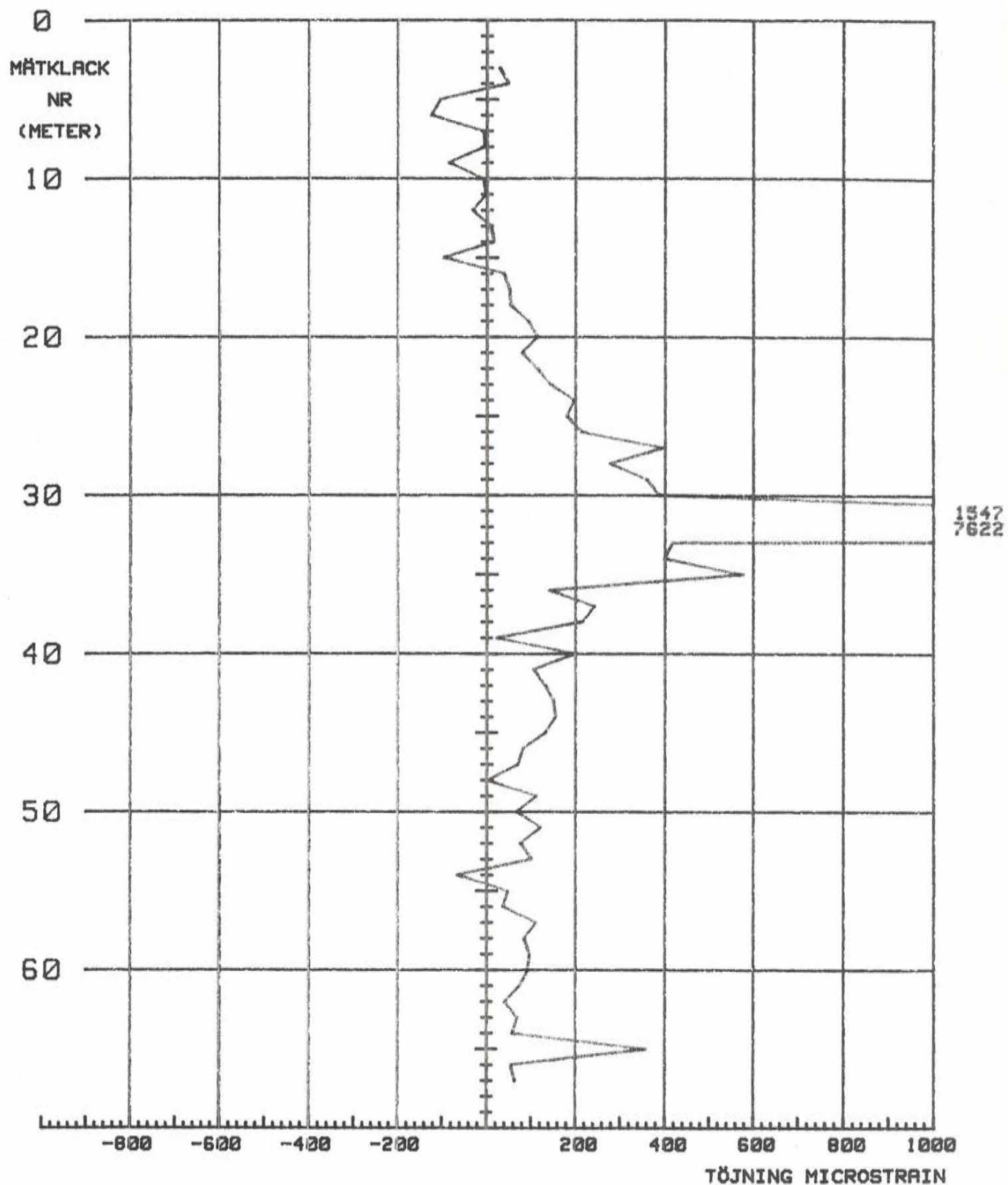


LYCKEBO. BERGTÖJNINGAR I HÅL 1

MÄTNING 7. 840906

TEMPERATUR 06/22 GRADER

Figur 6.

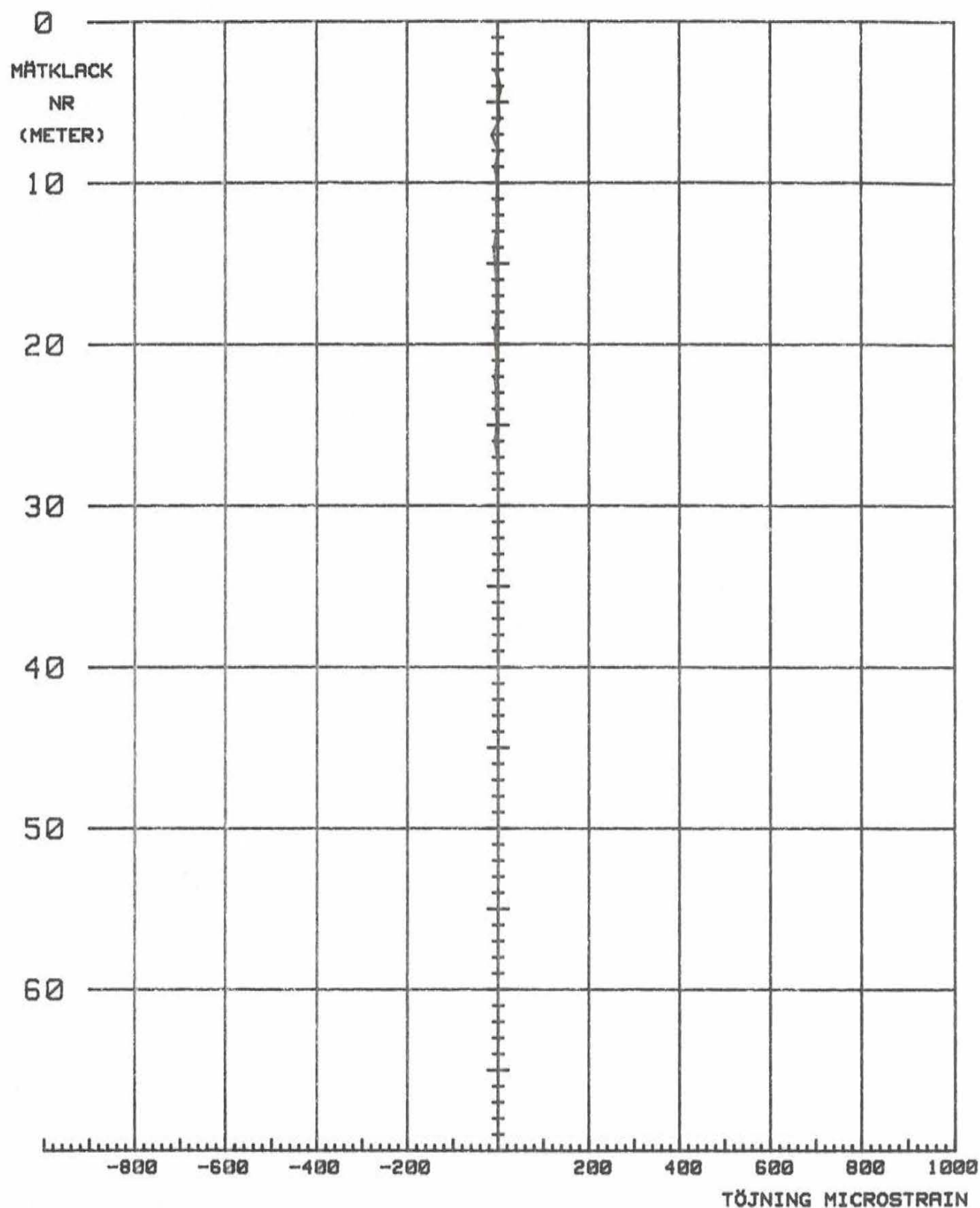


LYCKEBO. BERGTÖJNINGAR I HÅL 1

MÄTNING 8. 841009

TEMPERATUR 86/25 GRADER

Figur 7.

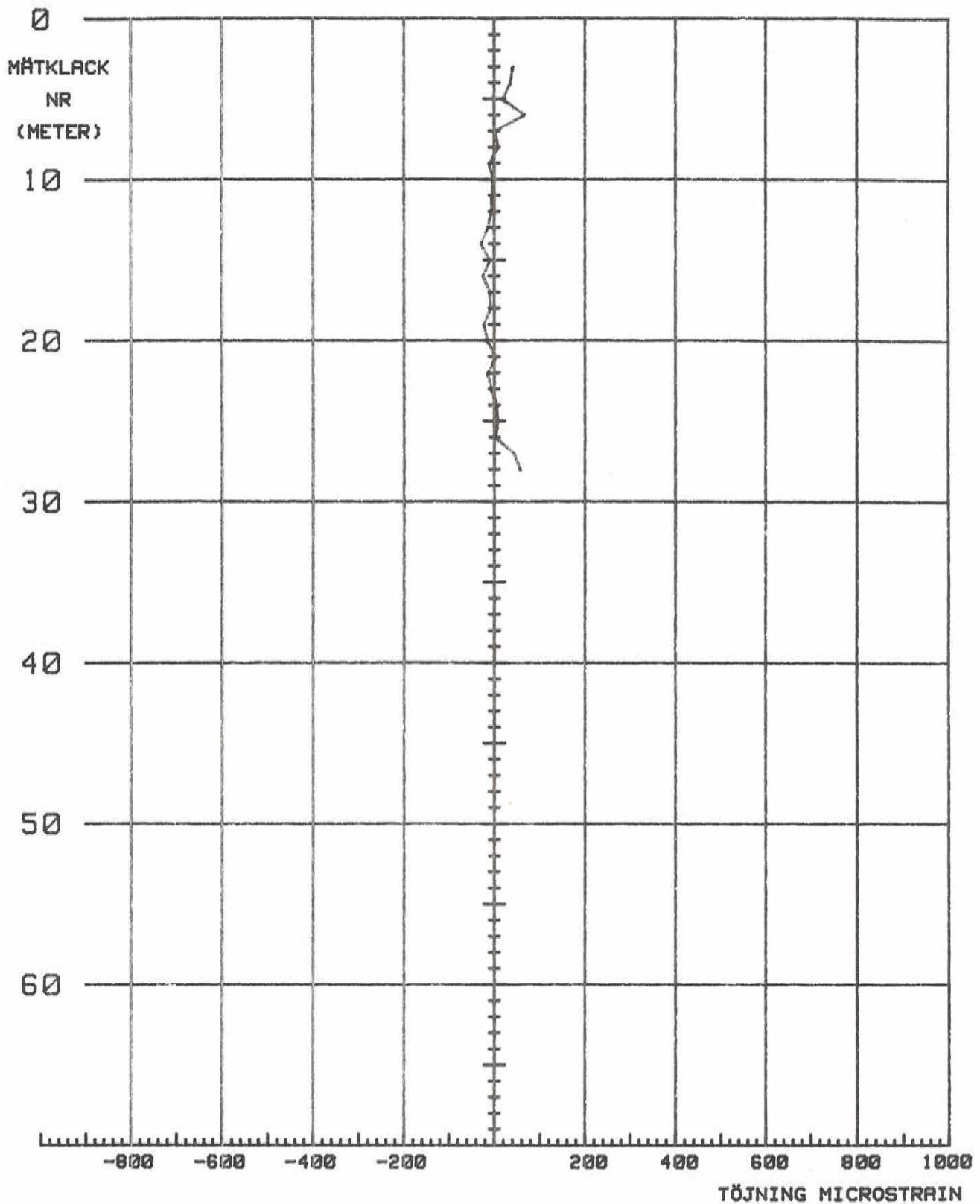


LYCKEBO. BERGTÖJNINGAR I HÅL 2

MÄTNING 3. 030422

TEMPERATUR 7/33 GRADER

Figur 8.

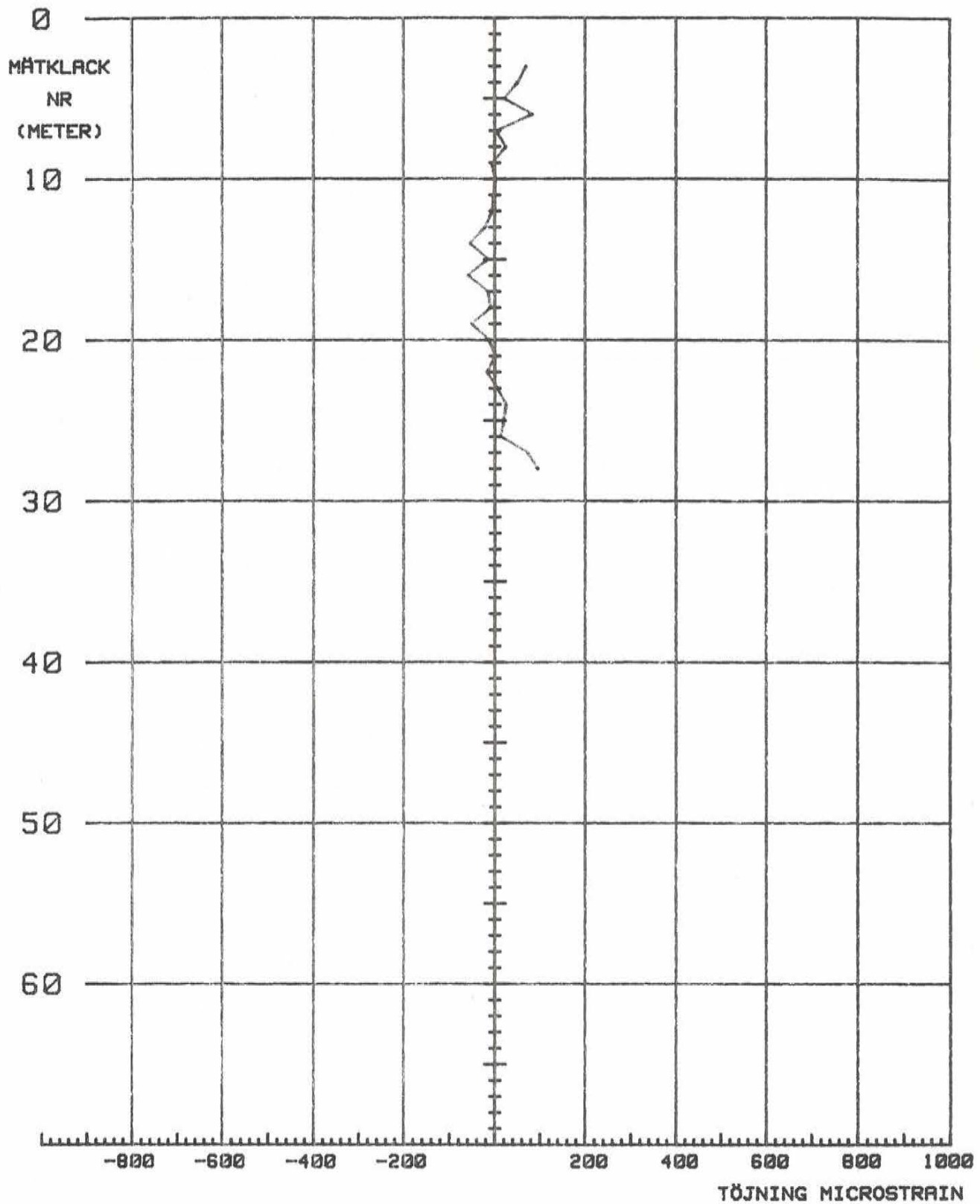


LYCKEBO. BERGTÖJNINGAR I HÅL 2

MÄTNING 4. 830622

TEMPERATUR 7/41 GRADER

Figur 9.

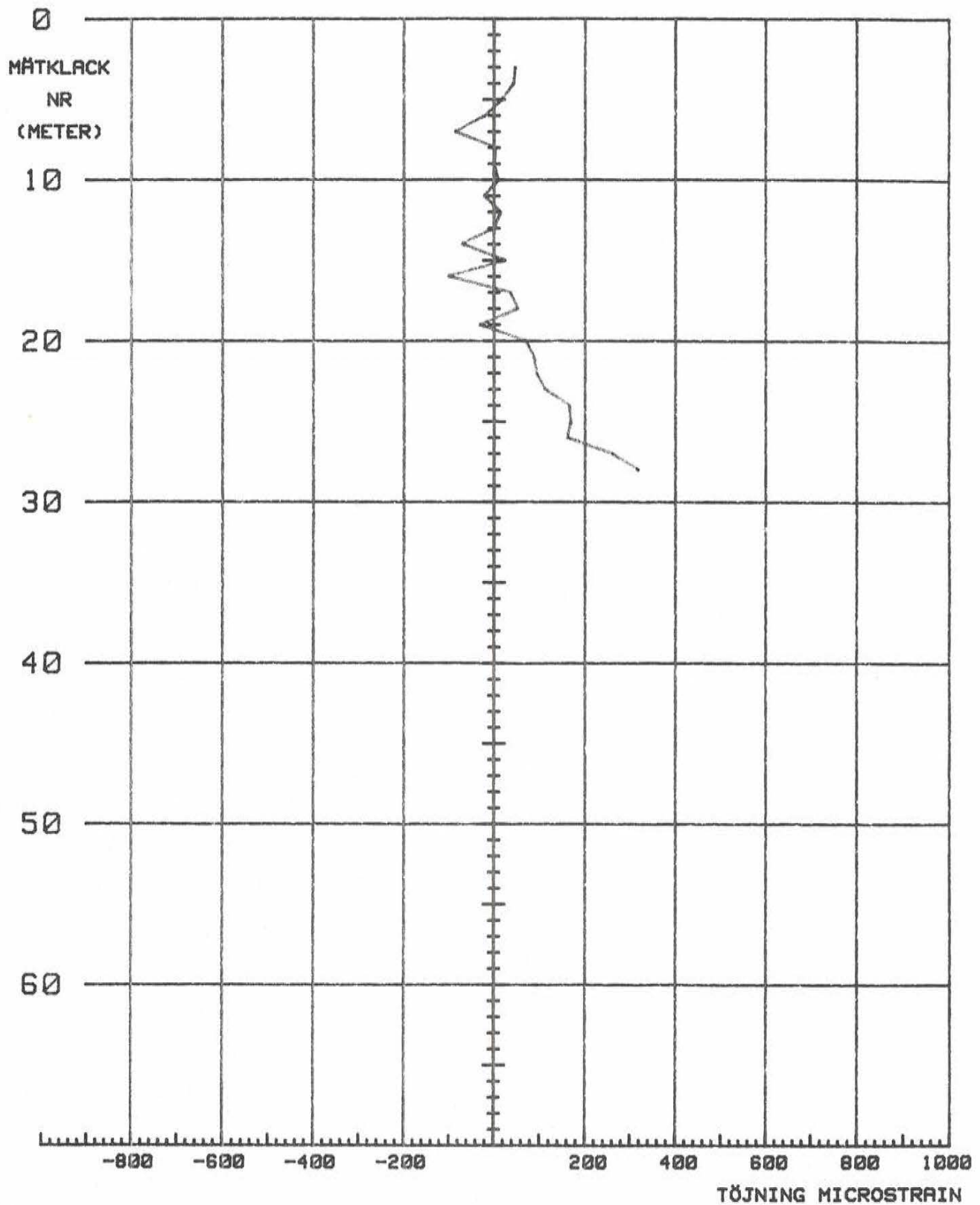


LYCKEBO. BERGTÖJNINGAR I HÅL 2

MÄTNING 5. 830912

TEMPERATUR 19/70 GRADER

Figur 10.

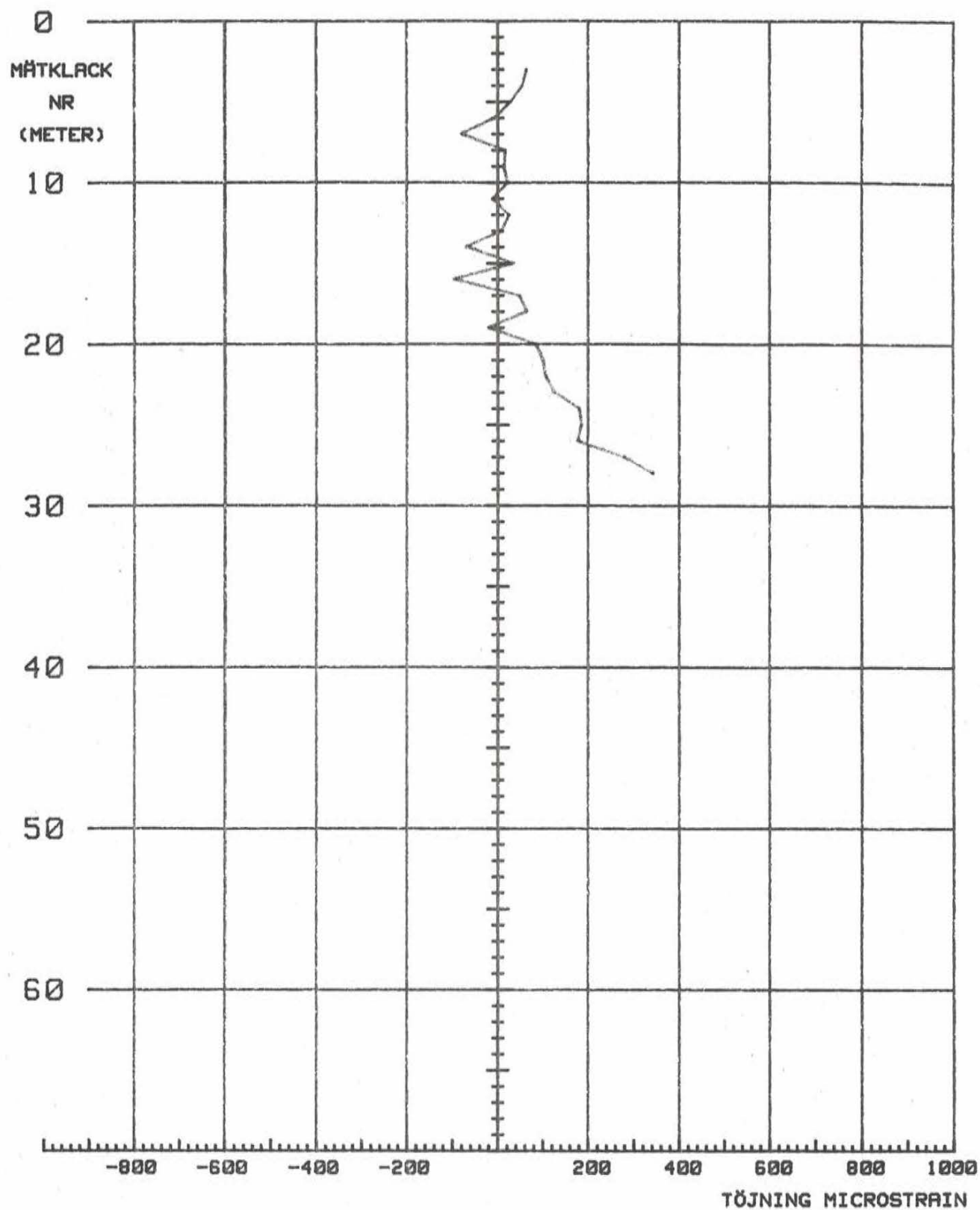


LYCKEBO. BERGTÖJNINGAR I HÅL 2

MÄTNING 6. 840706

TEMPERATUR 80/21 GRADER

Figur 11.

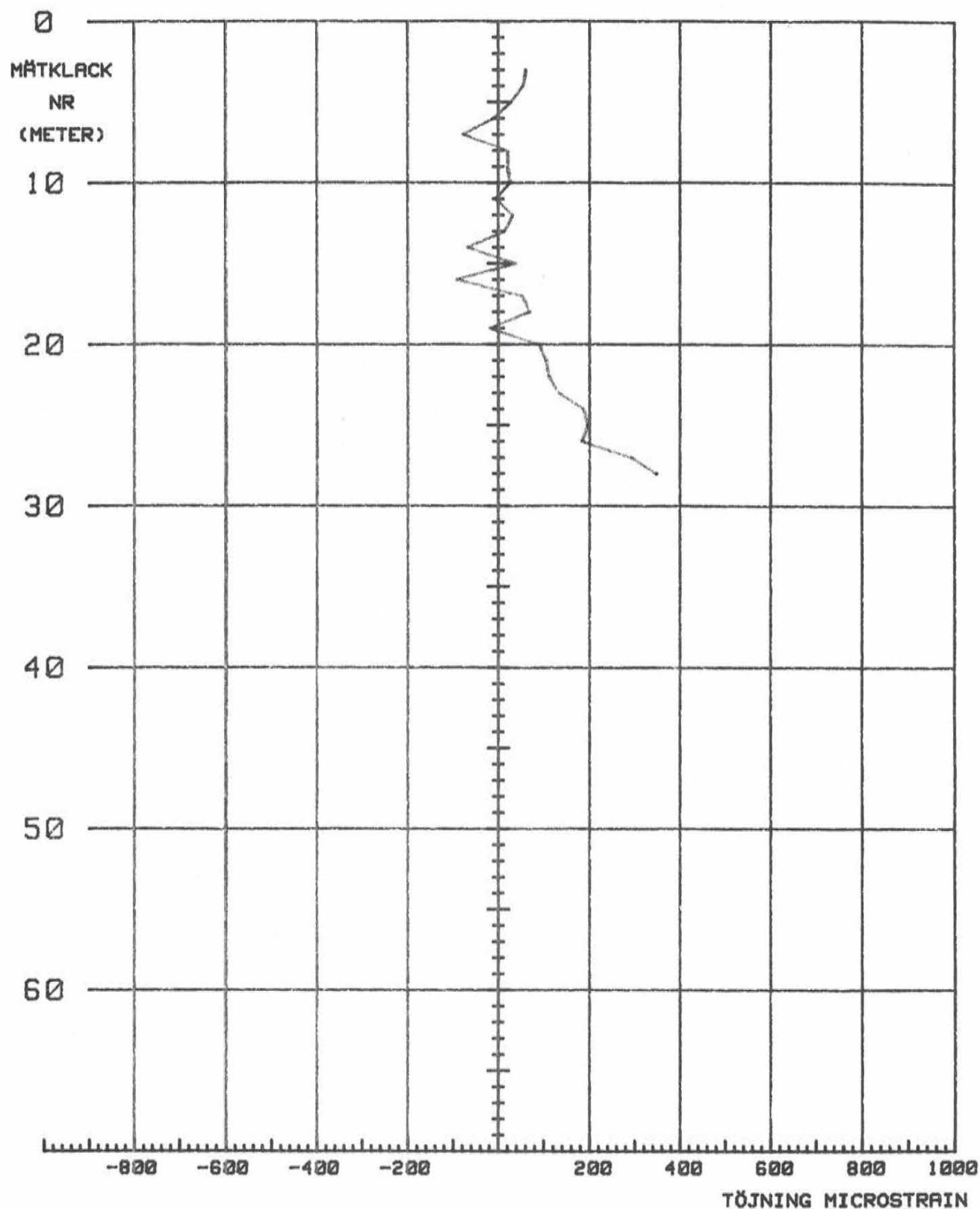


LYCKEBÖ. BERGTÖJNINGAR I HÅL 2

MÄTNING 7. 840906

TEMPERATUR 86/22 GRADER

Figur 12.

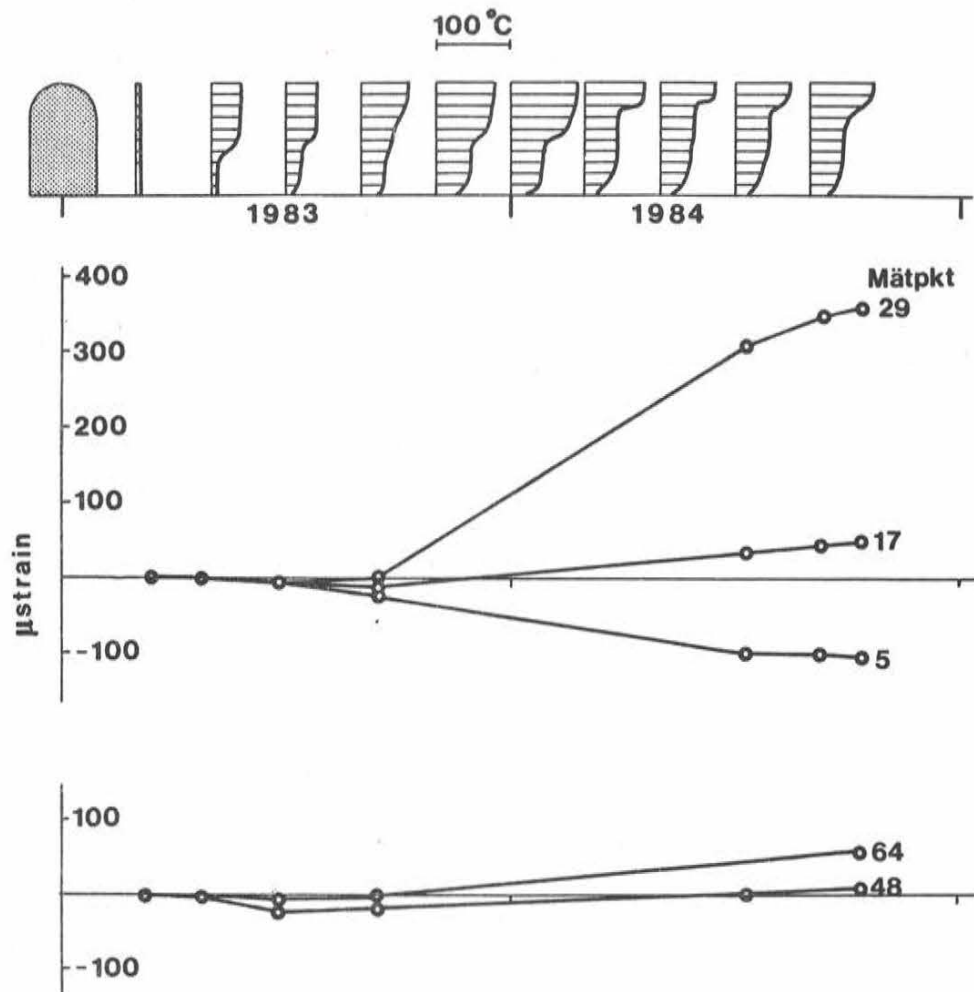


LYCKEBO. BERGTÖJNINGAR I HÅL 2

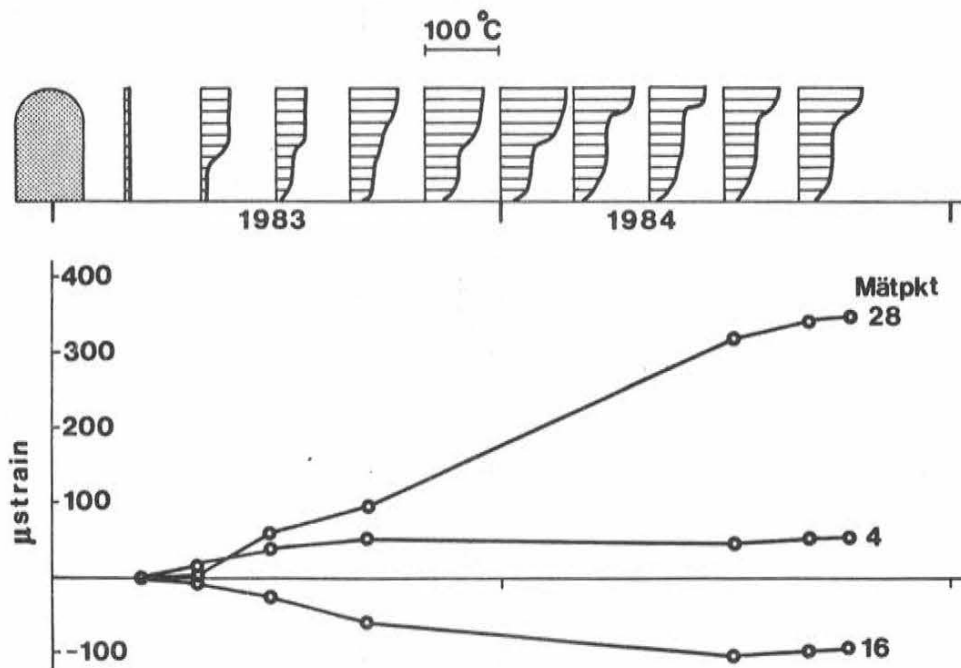
MÄTNING 8. 841009

TEMPERATUR 86/25 GRADER

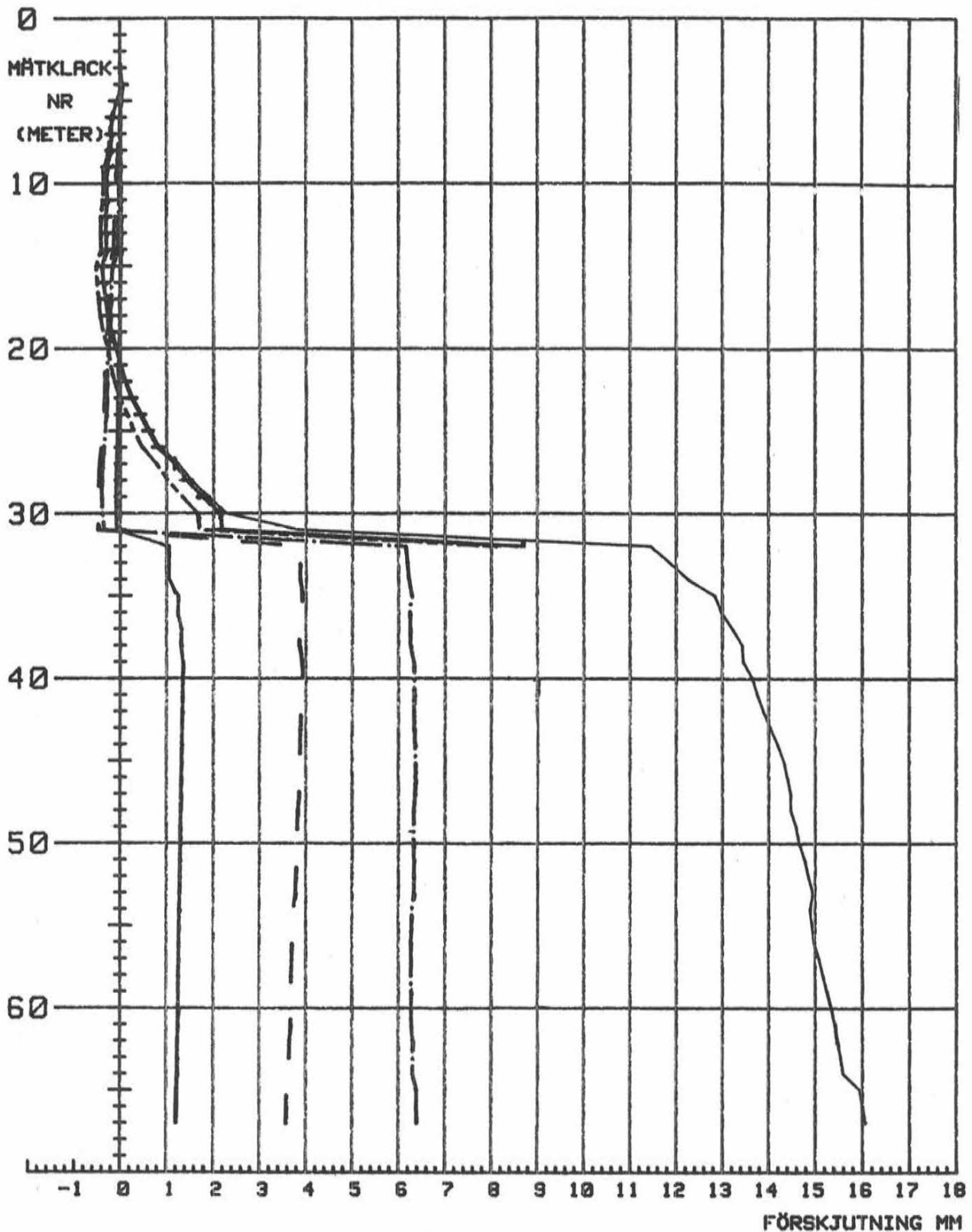
Figur 13.



Figur 14. Töjningarna i mäthål 1 som funktion av tiden samt lagrets temperaturprofil som jämförelse. De tre övre kurvorna hänför sig till punkter i själva pelaren, de två undre till punkter ovanför hjässans nivå.



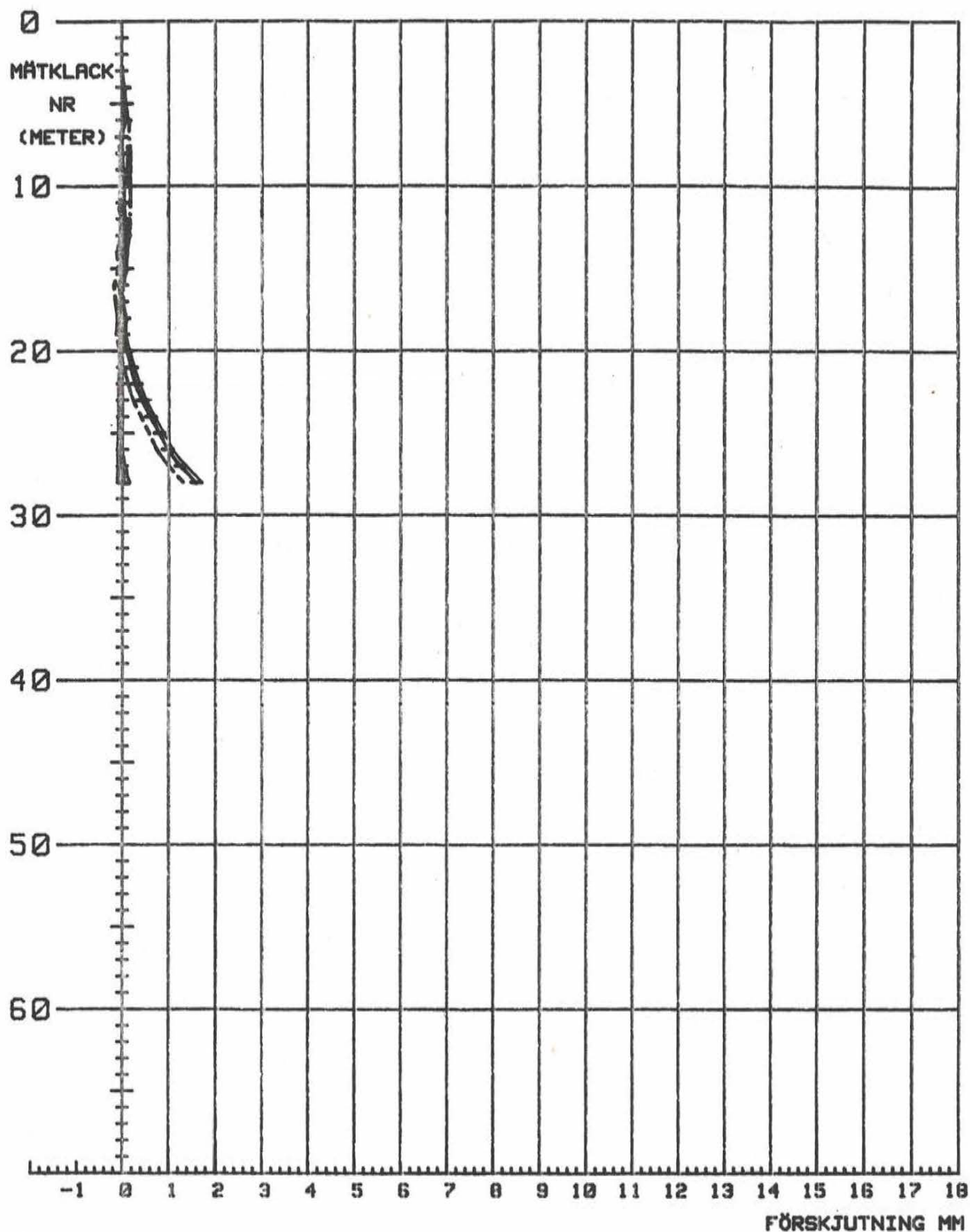
Figur 15. Töjningarna i mäthål 2 som funktion av tiden samt lagrets temperaturprofil som jämförelse.



LYCKEBÖ. BERGFÖRSKJUTNINGAR I HÅL 1

MÄTNING 3.	030422	—————	TEMPERATUR 7/33 GRADER
4.	0622	——— ———	6.9/41 GRADER
5.	0912	—————	19/70 GRADER
6.	040706	——— · ———	00/21 GRADER
7.	0906	—————	06/22 GRADER
8.	1009	—————	06/25 GRADER

Figur 16.



LYCKEBO. BERGFÖRSKJUTNINGAR I HÅL 2

MÄTNING	3.	838422	_____	TEMPERATUR 7/33 GRADER
	4.	8622	_____	6.9/41 GRADER
	5.	8912	_____	19/70 GRADER
	6.	848786	_____	88/21 GRADER
	7.	8986	_____	86/22 GRADER
	8.	1009	_____	86/25 GRADER

Figur 17.

Slutsatser

Avgörande slutsatser om bergets, och då i synnerhet om pelarens, stabilitet kan omöjligen dras med ledning av de mätningar som täcker blott 1,5 år. Dylika fordrar uppskattningsvis 15 år med fortlöpande, dock icke nödvändigtvis täta, mätningar.

De mätningar som hittills hunnit utföras har emellertid givit värdefulla resultat. Av dessa kan noteras:

1. Töjningarna såväl i pelaren som över rummets hjässa reagerar enbart på medeltemperaturen i det lagrade vattnet. Blott någon meter från väggen reagerar berget på fluktuationerna. Dessa slutsatser är teoretiskt väl motiverade och stämmer väl överens med dem som dragits av motsvarande mätningar i Avestalagret.
2. Den intressanta frågan om pelaren är utsatt för axiellt tryck eller drag kan nu besvaras. Endast under den första uppvärmningsperioden (~ 1 år) känner pelarens centrum av en ytterst obetydlig dragning. När pelaren omsider blir mättad med värme blir hela pelaren utsatt för tryck med undantag för den omedelbara närheten till väggen som kan erfara drag när temperaturen sjunker.
3. Mycket stora deformationer har mätts inom en zon av 1-2 m tjocklek. Av allt att döma utgörs denna zon av ett sprickplan som helt saknar förmåga att bära drag- och skjuvspänning. Följden har blivit mycket stora deformationer (10-15 mm). Det är oklart hur dessa lokalt stora deformationer kommer att utvecklas när temperaturen går mot stationärt tillstånd. De behöver inte nödvändigt öka ännu mer. Hittills har det visat sig att sprickplanet har såväl vidgats som skjuvats. Det förefaller mycket troligt att sprickplan som genom kartering funnits ligga i närheten av något planerat hetvattenlager kommer att

uppvisa deformationer liknande dem som konstaterats i Lyckebo. Frågan om denna typ av stora deformationer kan vara allvarlig för bergets stabilitet är svår att besvara. Om inga andra deformationer blir följden torde de vara harmlösa. Deras inverkan på konvektiva värmeförluster genom grundvattenrörelser får emellertid inte underskattas.

Som nämnts ovan kräver en tillförlitlig bedömning av bergets stabilitet ca 15 års mätningar. Denna tid kan med fog synas orimligt lång, inte minst från ekonomisk synpunkt. Ur fysikalisk synvinkel är emellertid saken annorlunda. Efter tio år råder någorlunda stationära förhållanden. Efter dessa tio år har lagret givetvis endast genomlöp 10 belastningsväxlingar. Om ett lager väntas vara i funktion 50 år eller mera torde en undersökningstid av 15 år på ett forskningsobjekt knappast kunna undvikas.

Referenser

- [1] Beskrivning av anläggning och forskningsprogram (Karlsson & Reh binder, red.). Avestaprojektet, rapportnr 1981:1 (BeFo).
- [2] Reh binder, G & Ingevald, K: Mätning av termiska spänningar och deformationer i berget. Etapp I. Avestaprojektet, rapportnr 1983:4 (BeFo).
- [3] Stille, H, Groth, T & Fredriksson, A: FEM-beräkningar av termoinducerade spänningar och förskjutningar. Avestaprojektet, rapportnr 1983:5 (BeFo).
- [4] Röshoff, K & Norin, J: Bergmekanisk dokumentation och stabilitetsanalys av Avesta bergackumulator. Avestaprojektet, rapportnr 1983:1 (BeFo).
- [5] Kovari, K, Amstad, Ch, Köppel, J (1979): New development in the instrumentation of underground openings. Proc. of the 4th rapid excav. and tunneling conf. Atlanta, USA.
- [6] Timoshenko, S P & Goodier, J N: Theory of Elasticity, New York, 1970.
- [7] Carslaw, H S & Jaeger, J C: Conduction of heat in solids. Oxford 1980.
- [8] Brander, O & Reh binder, G: A theoretical analysis of the dynamics of hot water underground stores of general shape. Journ. of Phys. D. Appl. Phys. 16(1983), p. 2039-2060.

Bilaga 1

Betrakta en cirkulär cylindrisk kropp av ett värmeledande elastiskt material. Om kroppens mantelyta utsätts för temperaturvariationer sprider sig temperaturen och de därav orsakade spänningarna in i kroppen. Antag att cylinderkroppen är lång och töjningarna plana.

1. Låt kroppens begynnelse-temperatur vara noll samt låt mantelytan utsättas för ett temperatursprång vid tiden noll. Temperaturfältet finns redovisat i ref [7] samt spänningsfältet i ref [6]. De lyder:

$$T = T_0 \left(1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-p_n t} \frac{J_0(r\beta_n/a)}{\beta_n J_0(\beta_n)} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_r = \frac{2\alpha E T_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-p_n t} \frac{1}{\beta_n^2} \left(1 - \frac{a}{r} \frac{J_1(\beta_n r/a)}{J_1(\beta_n)} \right) \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{2\alpha E T_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-p_n t} \frac{1}{\beta_n^2} \left(1 + \frac{a}{r} \frac{J_1(\beta_n r/a)}{J_1(\beta_n)} - \beta_n \frac{J_0(\beta_n r/a)}{J_1(\beta_n)} \right) \quad (3)$$

$$\sigma_z = \frac{2\alpha E T_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-p_n t} \left(\frac{1}{\beta_n^2} 2\nu - \beta_n \frac{J_0(\beta_n r/a)}{J_1(\beta_n)} \right) \quad (4)$$

$$p_n = \kappa \beta_n^2 / a^2 \quad (5)$$

där κ , α , E , ν är bergets temperaturdiffusivitet, volymutvidgningskoefficient, elasticitetsmodul samt tvärkontraktionstal respektive. a är pelarens radie, r den radiella koordinaten samt t tiden. Slutligen är β_n nollställena till J_0 , dvs

$$J_0(\beta_n) = 0 \quad (6)$$

Temperaturen som funktion av radien med tiden som parameter visas i figur 1 nedan. Denna figur visar således att om $\kappa = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ samt $a = 18 \text{ m}$ är pelaren någorlunda genomvärd 2-3 år efter det att maximaltemperaturen uppnåtts.

Om spänningen antas plan, något som experimenten visar, kommer pelarens centrala delar att vara komprimerade omedelbart efter det att temperaturen stegrats för att senare expandera. Den tidpunkt när pelaren helt expanderar gives av nollstället t_0 till följande ekvation:

$$0 = \varepsilon_z(r=0) = T_0 \alpha \left[1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t_0} \left(\frac{1}{\beta_n^2} - \frac{1}{\beta_n J_1(\beta_n)} \right) \right] \quad (7)$$

Lösningen är

$$t_0 = 0.157 \frac{a^2}{\kappa} \quad (8)$$

Således är $t_0 \approx 1$ år

2. Låt mantelytan vara utsatt för sinusformade temperaturvariationer med cirkelfrekvensen ω samt beräkna det stationära temperaturfältet och spänningsfältet. Lösningen kan härledas ur formler i referenserna [6] och [7].

$$T = T_0 \frac{J_0(kr/a)}{J_0(k)} \quad (9)$$

$$\sigma_r = \frac{\alpha E T_0}{1-\nu} \left(\frac{J_1(k)}{kJ_0(k)} - \frac{a}{kr} \frac{J_1(kr/a)}{J_0(k)} \right) \quad (10)$$

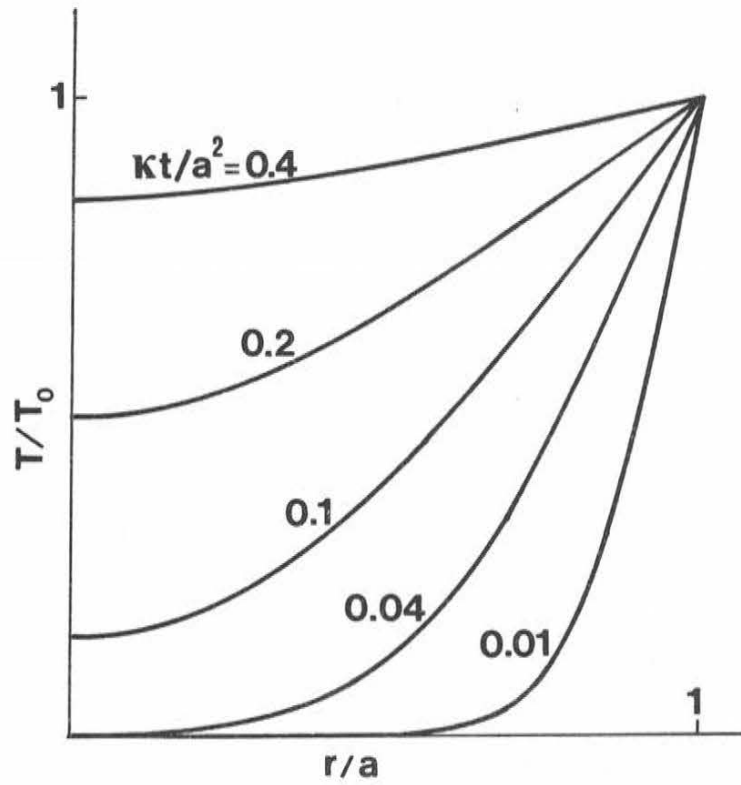
$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E T_0}{1-\nu} \left(\frac{J_1(k)}{kJ_0(k)} - \frac{a}{kr} \frac{J_1(kr/a)}{J_0(k)} - \frac{J_0(kr/a)}{J_0(k)} \right) \quad (11)$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E T_0}{1-\nu} \left(2 \frac{J_1(k)}{kJ_0(k)} - \frac{J_0(kr/a)}{J_0(k)} \right) \quad (12)$$

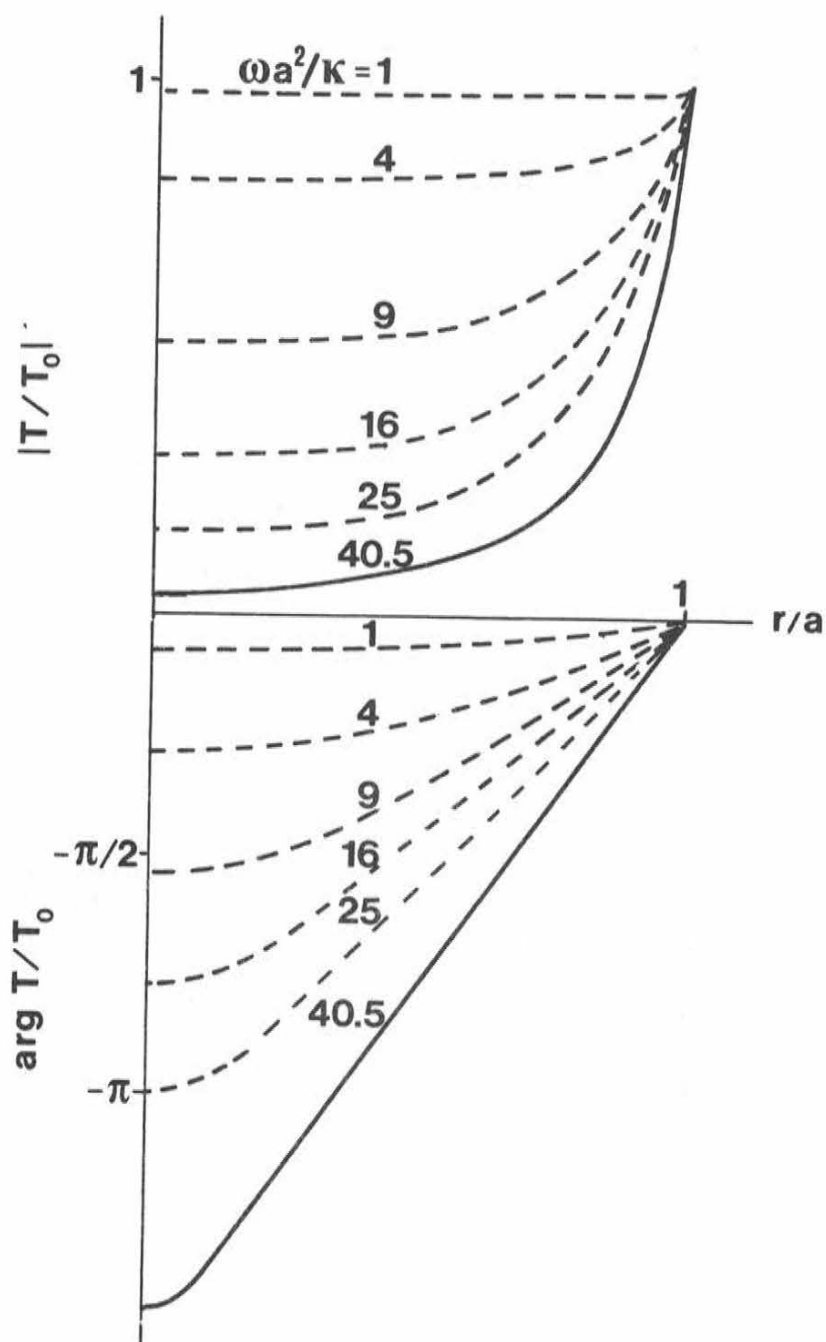
$$k = \frac{i-1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega a^2 / \kappa} \quad (13)$$

Temperaturvariationerna i pelaren visas i figur 2 nedan. Säsongsvariationer innebär en mycket hög dimensionlös frekvens, vilket visar att kraftiga temperaturväxlingar sträcker sig endast ett par meter in i pelaren.

Slutsatsen av dessa kvalitativa överläggningar blir att pelaren efter några år är genomvärmd samt har vattnets medeltemperatur, under det att temperaturvariationerna över året endast förmår tränga in 1-2 meter i pelaren.



Figur 1. Temperaturen i en cylinder som funktion av radien med tiden som parameter. Cylinderns mantelyta belastad med en stegtemperatur.



Figur 2. Belopp och fasvinkel för den kvasi-stationära temperaturen i en cylinder som funktion av radien med frekvensen som parameter. Cylinderns mantelyta belastad med cykliskt varierande temperatur.

Heat conduction in a rock mass with an annular hot water store

G. Rehbinder* and L. Reichelt†

Vast subterranean caverns may be used for hot water storage in district heating schemes; such caverns can be annular, with a central pillar. This paper considers the quasi-steady solution of the heat conduction equation for this geometry with periodic temperature variations

Keywords: *heat storage, conduction, mathematical models*

Research into seasonal heat storage is attracting great interest in Sweden today. Surplus heat from industry or solar heat can be stored advantageously in large water-filled rock caverns (100 000–500 000 m³). Relative heat losses are small if the volume is great and construction costs for rock caverns are relatively small.

If the total volume of the cavern is large, it may be necessary, for construction reasons, to build several separate caverns or an annular cavern with a 'pillar' left at its centre. The latter concept was used for the Lyckebo hot water store outside the city of Uppsala, Sweden, where an area including 550 apartments, shops, public buildings, schools etc, will be heated during the winter using the water heated during the summer by solar collectors. The shape and dimensions of the store are shown in Fig 1.

The design of an annular hot water store has several interesting facets. One is that the pillar contributes to storage performance in a more pronounced way than the rest of the surrounding rock. It is, therefore, of interest to study the interaction between the heat stored in the water in the cavern, the heat stored in the pillar, and the heat stored in the surrounding rock.

The operation of a seasonal hot water store implies that the temperature varies between two limits well above the undisturbed ground temperature. The consequence of this is that the net heat loss is proportional to the difference between the average temperature of the water in the store and the temperature of the undisturbed ground, to the length scale of the cavern and to the heat conduction coefficient of the rock. Initially when the heating of the water starts, the rock will consume considerable heat and the net losses will be great.

Theoretically, quasi-steady state will be reached after infinite time but, from a practical point of view, one can say that 3 years after the moment when the heating starts the 'pillar' has almost the average temperature of the water. Considering the heat flux to infinity, one can say that it takes 5 years for the average heat loss to

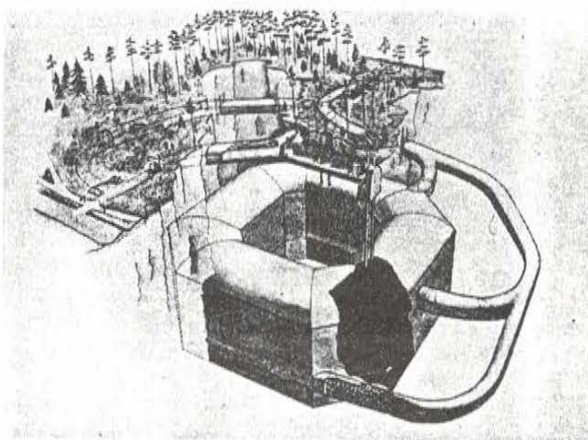


Fig 1 Hot water storage system at Lyckebo, Sweden

decrease to twice the steady value. These simple estimations are easily found from the solutions given by Carslaw and Jaeger¹.

The aim of this paper is to study theoretically the quasi-steady solution of the heat conduction equation for periodic temperature variations. In the general case this is identical to an exterior Helmholtz problem. Such a theoretical investigation makes it possible to calculate the heat flow between the rock and the water in the cavern. This is of great interest since the heat flow always counteracts the loading and unloading of the store. It also makes it possible to calculate the temperature in the pillar, especially its damping and phase lag to the temperature in the storage. This latter study is most interesting since the temperature induces stresses and deformations in the pillar and it is not *a priori* evident that the pillar carries a pressure load thus supporting the over-burden.

The following analysis is based upon a number of simplifications and assumptions. We assume that the convection of heat with the ground water can be neglected. We also assume that the density and heat capacity of the rock are constants and that the heat conduction coefficient is isotropic and constant. Finally we assume that the cavern is a torus with cylindrical symmetry. The cavern is assumed to be located well below the ground, implying that the presence of a free ground surface can be

* Swedish Rock Mechanics Research Foundation, Stockholm, Sweden

† Mathematics Research Center, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin, USA

Received 18 February 1983 and accepted for publication on 5 December 1983

neglected. The first assumptions, dealing with the rock properties, are reasonable; for economic reasons the cavern has been located in very good quality rock. The shape of the cavern is not perfectly symmetrical but the deviation is small. The last assumption, that the ground surface has no influence, is the most questionable since the distance between the top and bottom of the cavern is equal to the distance between the top of the cavern and the ground surface. This difficulty can of course be avoided by the use of the method of image, a calculation planned but not yet performed.

Non-dimensional equations

Consider a region exterior to a torus Ω symmetric with respect to the z -axis, with the boundary $\partial\Omega$. Let the inner radius of $\partial\Omega$ be the characteristic length a of the problem (Fig 2). At $\partial\Omega$ the temperature T is prescribed $T_0\Phi(t, r)$ where the constant T_0 is the characteristic temperature of the problem, and $\Phi(t, r)$ is a given function of $[0, \infty) \times \partial\Omega$. The temperature is assumed to vanish at infinity. The initial temperature is zero. The region consists of a rock whose heat conduction is λ , heat capacity c and density ρ . These parameters can be combined giving the diffusivity $\kappa = \lambda/\rho c$. Thus with cylindrical coordinates:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad \text{in } R^3 \setminus \Omega \quad (1)$$

$$T(r, z, t) = T_0\Phi(t, r) \quad \text{on } \partial\Omega \quad t \geq 0 \quad (2)$$

$$T(r, z, t) = 0 \quad r^2 + z^2 \rightarrow \infty \quad t > 0 \quad (3)$$

$$T(r, z, t) = 0 \quad \text{in } R^3 \setminus \Omega \quad t < 0 \quad (4)$$

A general solution is not easily found. It has recently been shown by Brander and Reh binder² that the solution can be expressed with the T-matrix representation used in scattering theory. As mentioned in the introduction our aim is to solve the limiting problem $\phi(t, r) = \exp(i\omega t)$ when $t \rightarrow \infty$. Introducing the following variables:

$$u = T e^{-i\omega t} / T_0 \quad (5)$$

$$\xi = r/a \quad (6)$$

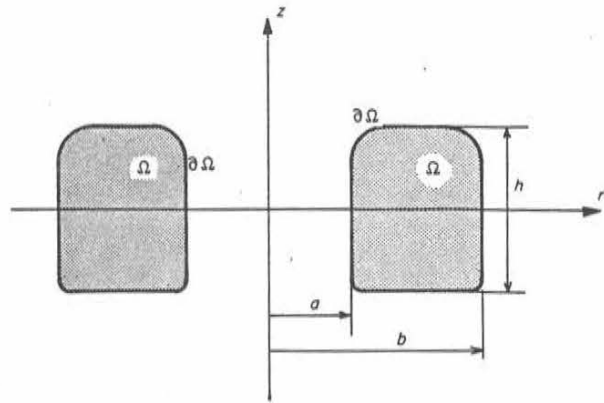


Fig 2 The torus Ω

$$\zeta = z/a \quad (7)$$

$$\tau = \kappa t/a^2 \quad (8)$$

$$\hat{b} = b/a \quad (9)$$

$$\hat{h} = h/a \quad (10)$$

$$\hat{\omega} = \omega a^2/\kappa \quad (11)$$

$$k = e^{3\pi i/4} \hat{\omega}^{1/2} \quad (12)$$

the heat conduction problem above is then reduced to a boundary value problem for the Helmholtz equation. The parameters a , b and h can be varied to study their effect on u .

Numerical approximation by particular solutions

In accordance with the discussion above, we will solve the Helmholtz problem in cylindrical coordinates:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + k^2 u = 0 \quad \text{in } R^3 \setminus \Omega \quad (13)$$

$$u = 1 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (14)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial u}{\partial R} - iku \right) = 0 \quad R = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} \quad (15)$$

Notation

$a_{\ell j}$	Multipole coefficients	T_0	Reference temperature
a	Inner radius of the torus	t	Time
b	Outer radius of the torus	u	Dimensionless amplitude of the temperature
$\hat{b}$	Dimensionless outer radius of the torus, b/a	w_j	Auxiliary coordinate
c	Heat capacity of the rock	z	Axial coordinate
$G_j(z)$	Greens' function	ξ	Dimensionless radial coordinate, r/a
h	Height of the torus	θ	Azimuthal coordinate
$\hat{h}$	Dimensionless height of the torus, h/a	ζ	Dimensionless axial coordinate, z/a
$H_j(z)$	Harmonic auxiliary function	ξ', θ', ζ'	Integration variables
j, l, m	Auxiliary parameters (natural numbers)	τ	Dimensionless time, $\kappa t/a^2$
n, p, q		λ	Heat conduction coefficient of the rock
K_ν, I_ν	Modified Bessel functions	ρ	Density of the rock
M_ν, N_ν	Amplitudes of Kelvin functions	κ	Heat diffusivity of the rock, $\lambda/\rho c$
r	Radial coordinate	ω	Circular frequency
$\bar{r}'$	(ξ', θ', ζ')	$\hat{\omega}$	Dimensionless circular frequency, $\omega a^2/\kappa$
$\bar{r}$	(ξ, θ, ζ)	θ_ν, ϕ_ν	Phase of Kelvin function
s'	Arclength along the circle γ_j	γ_j	Circular curve within the torus
T	Temperature	Γ	Cross section curve of the torus
		Ω	Region occupied by the torus
		Φ	Dimensionless temperature in the torus

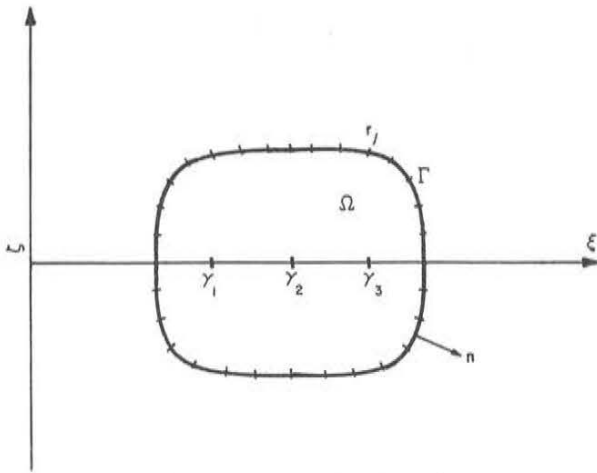


Fig 3 Torus Ω showing the location of the collocation points and the circles γ_j

Eq (15) is the Sommerfeld radiation condition, ensuring the unique solvability of Eqs (13)–(15).

We will seek the solution in the form of a linear combination of particular solutions, which satisfy Eqs (13) and (15). The linear combination is to be chosen so that Eq (14) is approximately satisfied. By using cylindrically symmetric particular solutions, we will see that the cylindrically symmetric three-dimensional problem on an infinite domain is reduced to a one-dimensional approximation problem on a curve of finite length. We will also indicate how fully three-dimensional problems can be treated by this approach. Compared to integral equation methods, our approach has the advantage that no singular integrals have to be computed. This simplifies programming.

Our numerical method requires some decisions.

We must:

1. Choose a subspace of particular solutions and select a basis for this subspace;
2. Choose a finite set of points on the boundary, the collocation points where we require the boundary conditions to be satisfied.

In this section, we describe the particular solutions chosen and in the next section we discuss the selection of collocation points.

There are still some open theoretical questions under investigation on the choices above. In the selections described we have been guided by experience gained from solving two-dimensional problems (see 'Section rationale' below).

Let $\gamma_j, j=1(1)n$, be circles in the interior of Ω and symmetric with respect to the ζ -axis (Fig 3). Let $\vec{r}$ and $\vec{r}'$ be vectors with cylindrical coordinates $\vec{r}=(\xi, \theta, \zeta)$ and $\vec{r}'=(\xi', \theta', \zeta')$. Then for $\vec{r} \in (R^3 \setminus \Omega) \cup \partial\Omega, J=1(1)n$;

$$u_{lj}(\vec{r}) = \int_{\gamma_j} \frac{\partial^{l-1}}{\partial r'^{l-1}} \left(\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) ds' \quad l=1, 2, 3 \dots \quad (16)$$

are particular solutions of Eq (13), independent of θ and satisfying Eq (15). We are to determine the coefficients a_{lj} in:

$$\tilde{u}(\vec{r}) = \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^n a_{lj} u_{lj}(\vec{r}) \quad (17)$$

so that the boundary condition (Eq (14)) is approximately satisfied. Due to the cylindrical symmetry this is a one-dimensional approximation problem. Typical values for m and n used in the computation have been $4 \leq m \leq 6$ and $4 \leq n \leq 7$. Explicit expressions for some u_{lj} are given in the appendix. Note that the kernels are smooth and that the integrals can be computed conveniently by the trapezoidal rule. The following remarks provide some background to the selection of m, n and γ_j .

Selection rationale

Our motivation for selecting n , the number of circles γ_j , greater than 1 is that for oblong cross sections this gives considerably higher accuracy than computation with $n=1$. On the other hand if we seek a linear combination of $u_{lj}, j=1(1)n, m=1$, where the circles γ_j come close, the resulting linear system is severely ill-conditioned. The numerical condition improves if we replace close circles by one circle on which we allow multipoles, ie we reduce n and increase m . Since neither the placement of circles nor the choice of m is critical for the computation, these guidelines suffice to achieve high enough accuracy for many applications. An estimate of the error in the computed solution of Eqs (13)–(15) can be obtained by computing the deviation of the determined linear combination (Eq (16)) from 1 on $\partial\Omega$. Also, when the Laplace equation is to be solved in exterior regions, choices analogous to those of n, m and γ_j have to be made. For two-dimensional problems for the Laplace equation, the influence of these selections on the rate of convergence and numerical conditioning has been analysed elsewhere⁵.

Note also that, for problems with no cylindrical symmetry, the particular solutions u_{lj} are replaced by function:

$$\tilde{u}_{lj}(\vec{r}) = \frac{\partial^{l-1}}{\partial r'^{l-1}} \left(\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right), \quad j=1(1)n, \quad l=1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

where $\vec{r}_j$ are points distributed in the interior of Ω .

Least squares collocation

We introduce the curve Γ defined as the intersection between $\partial\Omega$ and the half plane $\theta=0$. We also allocate a number, ranging between $2mn$ and $3mn$, of collocation points $\vec{r}_j$ on Γ and require $\tilde{u}(\vec{r})$ to satisfy the boundary condition (Eq (14)) at all $\vec{r}_j$ in the least-squares sense. The largest number of points was used in cases when the thickness of Ω was relatively small. That the system of linear equations is over constrained makes the computation less sensitive to the distribution of collocation points than if an $mn \times mn$ system were to be solved. Nevertheless, the allocation of collocation points is important and we will therefore describe the distribution principles. The allocation method is a simplified version of a strategy previously used for two-dimensional problems for the Laplace operator (discussed below). Putting monopoles of unit density over each circle γ_j yields the potential:

$$v(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} ds' \quad (19)$$

Let $\bar{n}$ be the exterior unit normal to Γ in the plane $\theta=0$. Then $\partial v/\partial n < 0$ and:

$$2\pi \int_{\Gamma} |\bar{r}| \frac{\partial v}{\partial n} ds = -4\pi \sum_{j=1}^n 2\pi(\text{radius of } \gamma_j) \quad (20)$$

Let:

$$s_d(\bar{r}) = \frac{-|\bar{r}| \frac{\partial v(\bar{r})}{\partial n}}{4\pi \sum_{j=1}^n \text{radius of } \gamma_j} \quad (21)$$

be the density function for the collocation points on Γ . To compute $s_d(\bar{r})$, we approximate $\partial v/\partial n$ by a trigonometric polynomial, which we integrate and normalize to obtain the distribution function $\tilde{s}_d(\bar{r})$. Then p collocation points $\{\bar{r}_j\}_1^p$ are determined by solving the equations:

$$\tilde{s}_d(\bar{r}_j) = \frac{j-1}{p} \quad j=1, 2, 3, \dots, p \quad (22)$$

For fully three-dimensional problems Eq (19) is to be replaced by:

$$\tilde{v}(\bar{r}) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_j|} \quad (23)$$

where the sum is over all distinct points $\bar{r}_j$. On $\partial\Omega$ one allocates collocation points so that if they were point charges of equal charge they would produce a potential in $R^3 \setminus \Omega$ which approximates the potential obtained from Eq (23). The accuracy requirement is not high.

To motivate Eqs (19)–(23) we conclude this section with an outline of the allocation of collocation points for two-dimensional problems for the Laplace equation. More details have been given elsewhere^{4,5}. Let Ω_2 be an open bounded, simply connected region in the plane, which we identify with the complex plane C . Let f be a continuous real-valued function on $\partial\Omega_2$ and consider the Dirichlet problem:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{in } C \setminus \Omega_2 \\ u &= f & \text{on } \partial\Omega_2 \\ u & \text{ bounded at infinity} \end{aligned} \quad (24)$$

Let $\omega_j, j=1(1)n$, be distinct points in Ω_2 . An approximate solution to Eq (23) is sought in the form:

$$u = a_0 + \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} (z - \omega_j)^{-i} \right) \quad (25)$$

where $a_0 \in R$ and $a_{ij} \in C$. To determine the coefficients one needs at least $2nm+1$ collocation points z_k . To describe a suitable allocation of the z_k we introduce Green's functions $G_j(z)$ for the Laplace operator on Ω_2 with a logarithmic singularity at $z = \omega_j$. The $G_j(z)$ are uniquely determined by:

$$G_j(z) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z - \omega_j|} + H_j(z) \quad (26)$$

where $H_j(z)$ is harmonic in Ω_2 and:

$$H_j(z) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z - \omega_j|}$$

on $\partial\Omega_2$. Let $\partial/\partial n$ denote the normal derivative into Ω_2 and

allocate $q \geq 2nm+1$ collocation points equidistantly with respect to the density function:

$$s(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial G_j}{\partial n}(z) \quad z \in \partial\Omega_2, \quad (27)$$

ie require:

$$s(z_j) = \frac{j-1}{q} \quad j=1(1)q. \quad (28)$$

This allocation has been studied elsewhere^{4,5} and certain convergence results presented there. A density function that is simpler to compute than Eq (27) is obtained by neglecting the $H_j(a):s$ in Eq (26). The modified density function becomes:

$$s(z) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|z - \omega_j|}. \quad (29)$$

When using this density function more collocation points than unknowns should be used. For rotationally symmetric problems (Eq (21) is the analogue of Eq (29). For fully three-dimensional problems the analogue of Eq (24) is Eq (23).

Solutions for pure radial flow

If $\hat{h} \gg 1$, the solution of Eqs (13)–(15) in the vicinity of $\zeta=0$ is equal to the solutions for pure radial flow. These solutions can be found in Carslaw and Jaeger's textbook¹. Thus:

$$u = \frac{K_0(k\xi)}{K_0(k\hat{b})} \quad \xi \geq \hat{b} \quad |k| > 0 \quad (30)$$

$$u = \frac{I_0(k\xi)}{I_0(k)} \quad \xi \leq 1 \quad (31)$$

The modified Bessel functions K_ν and I_ν for a complex argument are most conveniently expressed³ with the moduli M_ν and N_ν and phases θ_ν and ϕ_ν of Kelvin's functions. We can then write the solutions in simple form:

$$u(\xi) = \frac{N_0(\xi\sqrt{\hat{\omega}})}{N_0(\hat{b}\sqrt{\hat{\omega}})} e^{i(\phi_0(\xi\sqrt{\hat{\omega}}) - \phi_0(\hat{b}\sqrt{\hat{\omega}}))} \quad \xi \geq \hat{b} \quad (32)$$

$$u(\xi) = \frac{M_0(\xi\sqrt{\hat{\omega}})}{M_0(\sqrt{\hat{\omega}})} e^{i(\theta_0(\xi\sqrt{\hat{\omega}}) - \theta_0(\sqrt{\hat{\omega}}))} \quad \xi \leq 1 \quad (33)$$

The derivatives of these functions on $\partial\Omega$ are:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=\hat{b}} = \sqrt{\hat{\omega}} \frac{N_1(\hat{b}\sqrt{\hat{\omega}})}{N_0(\hat{b}\sqrt{\hat{\omega}})} e^{i(\phi_1(\hat{b}\sqrt{\hat{\omega}}) - \phi_0(\hat{b}\sqrt{\hat{\omega}}) + \pi/4)} \quad (34)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = \sqrt{\hat{\omega}} \frac{M_1(\sqrt{\hat{\omega}})}{M_0(\sqrt{\hat{\omega}})} e^{i(\theta_1(\sqrt{\hat{\omega}}) - \theta_0(\sqrt{\hat{\omega}}) + \pi/4)} \quad (35)$$

Generally $R^3 \setminus \Omega$ is doubly connected but in this case where $\hat{h} \rightarrow \infty$ the region $R^3 \setminus \Omega$ is split in two separate regions $\xi \leq 1$ and $\xi \geq \hat{b}$ which do not interact. The solutions given by Eqs (32) and (33) are shown graphically in Figs 4–8 together with the numerical solutions for $\hat{h} < \infty$.

The gradients at the inner and outer boundaries of Ω given by Eqs (34) and (35) make it possible to study the relation between the heat fluxes leaving and returning to Ω . Fig 9 shows the ratio between the heat flux q_{out} going outwards through $\xi = \hat{b}$ and the heat flux q_{in} going inwards through $\xi = 1$. We can see that the flux is mainly

rock around the hot water storage. The following parameters will be considered:

$$\begin{aligned}T_0 &= 25 \text{ K} \\a &= 18 \text{ m} \\b &= 38 \text{ m} \\h &= 30 \text{ m} \\\kappa &= 1.6 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \\\omega &= 2 \times 10^{-7} \text{ rad s}^{-1}\end{aligned}$$

The average temperature of the water in the store over a complete year is 60°C. These data yield:

$$\begin{aligned}\hat{b} &= 2.11 \\\hat{h} &= 1.67 \\\hat{\omega} &= k^2 = 40.5\end{aligned}$$

Even for seasonal variations of temperature, the dimensionless frequency is high which implies that the damping is great everywhere in the rock except in the immediate vicinity of the surface of the cavern. This is extremely important since great temperature variations expose the rock to fluctuating stresses that might cause fatigue. The rock in the vicinity of the cavern is less sensitive to load since it is extensively cracked by the blasting that took place during the excavation. It is well known that all rock caverns and tunnels blasted in sound rock are surrounded by a cracked, plastic zone about 1–2 m thick. We thus conclude that no great thermally induced fluctuating stresses in the rock will occur.

We also conclude that the rock pillar in the centre of the storage carries pressure load since it has an average temperature equal to that of the water and since the damping of the temperature variations in the pillar is less than that outside the cavern.

We can calculate easily a lower limit of the damping by simple analysis for radial flow. Also, we can calculate very accurately the phase lag by radial flow. The reason for this is that in a practical case the range of variation of $\hat{b}$ and $\hat{h}$ does not differ from the values calculated above.

Finally the curves in Fig 9 indicate that the heat flux from the water to the surrounding rock compared to the corresponding heat flux to the pillar is almost exclusively determined by the parameter $\hat{b}$. In this case we see that the heat that flows between the water and the surrounding rock is approximately 4.5 times greater than between the water and the pillar. This conclusion is altered neither by the fact that the heat flow is three-dimensional nor by the fact that the heat flux from the cavern prevents T_0 from being sustained.

Acknowledgement

The authors want to thank the construction company Skanska for the permission to use the artists impression of the store shown in Fig 1.

References

1. Carslaw H. S. and Jaeger J. C. Conduction of heat in solids, Oxford 1959

2. Brander O. and Reh binder G. A theoretical analysis of the dynamics of hot water underground storages. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 16 (1983), pp 2039–2060
3. Abramowitz M. and Stegun I. Handbook of mathematical functions, New York, 1965
4. Reichel L. On the determination of collocation points for some problems for the Laplace operator, Report TRITA-NA-8006, Dept. of Numer. Anal. and Comp. Sci., Royal Inst. of Technology, Stockholm, Sweden, 1980
5. Reichel L. Solving a model interface problem for the Laplace operator by the boundary collocation method. Report TRITA-NA-8116, Dept. of Numer. Anal. and Comp. Sci., Royal Inst. of Techn., Stockholm, Sweden, 1981

Appendix. Formulae for particular solutions

We will give explicit formulae for the particular solutions of Eq (13). We introduce:

$$\begin{aligned}f(\vec{r}') &= \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\g(\vec{r}') &= \left(ik - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{\partial}{\partial \xi'} (|\vec{r}-\vec{r}'|) \\\frac{\partial^l f(\vec{r}')}{\partial \xi'^l} &= \sum_{k=0}^{l-1} \left(\frac{l-1}{k} \right) \frac{\partial^k g}{\partial \xi'^k} \frac{\partial^{l-k-1} f}{\partial \xi'^{l-k-1}}\end{aligned}$$

We need to compute the derivatives of g . These computations are simplified by introducing:

$$s(\xi') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

and

$$v(\xi') = \xi' - \xi \cos(\theta - \theta')$$

Then:

$$\left. \begin{aligned}\frac{ds}{d\xi'} &= -vs^3 \\\frac{dv}{d\xi'} &= 1\end{aligned} \right\} \quad (A1)$$

and:

$$g(\vec{r}') = ikvs - vs^2 \quad (A2)$$

The formulae (A1) and (A2) lend themselves to computer-aided formula manipulation. Some of the derivatives obtained this way are:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi'}(vs) &= s(-v^2s^2 + 1) \\\frac{\partial^2}{\partial \xi'^2}(vs) &= 3s^2v(s^2v^2 - 1) \\\frac{\partial^3}{\partial \xi'^3}(vs) &= 3s^3(-5s^4v^4 + 6s^2v^2 - 1) \\\vdots \\\frac{\partial}{\partial \xi'}(vs^2) &= s^2(-2s^2v^2 + 1) \\\frac{\partial^2}{\partial \xi'^2}(vs^2) &= 2s^4v(4sv^2 - 3) \\\vdots\end{aligned}$$